Revue des sciences de l'éducation

Le problème de la détermination du nombre de facteurs en analyse factorielle

Djavid Ajar

Volume 8, numéro 1, 1982

URI : https://id.erudit.org/iderudit/900356ar
DOI : https://doi.org/10.7202/900356ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (imprimé)
1705-0065 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Ajar, D. (1982). Le problème de la détermination du nombre de facteurs en analyse factorielle. *Revue des sciences de l'éducation*, *8*(1), 45–62. https://doi.org/10.7202/900356ar

Résumé de l'article

Dans le but de vérifier l'efficacité de certains critères, empiriques ou statistiques, utilisés pour fin de détermination du nombre de facteurs dans une analyse factorielle, 125 matrices échantillonnales provenant de deux matrices paramètres sont soumises à deux solutions factorielles. Les effets de la taille des échantillons et des communautés des variables sont également explorés. Les résultats obtenus permettent d'identifier les conditions d'utilisation de ces critères.

Revue des sciences de l'éducation, vol. VIII, no 1, 1982

Le problème de la détermination du nombre de facteurs en analyse factorielle

Djavid Ajar *

Résumé — Dans le but de vérifier l'efficacité de certains critères, empiriques ou statistiques, utilisés pour fin de détermination du nombre de facteurs dans une analyse factorielle, 125 matrices échantillonnales provenant de deux matrices paramètres sont soumises à deux solutions factorielles. Les effets de la taille des échantillons et des communautés des variables sont également explorés. Les résultats obtenus permettent d'identifier les conditions d'utilisation de ces critères.

Abstract — With the objectif of studying the efficiency of certain empirical or statistical criteria used to determine the number of factors to extract in a factor analysis, 125 sample matrices representing two matrix parameters were subjected to two factorial solutions. The effects of sample size and of the communalities of variables are also explored. The results permitted to identify the conditions under which these criteria are to be employed.

Resumen — Con el objeto de verificar la eficacia de ciertos criterios, empíricos o estadísticos, utilizados con fines de determinar el número de factores de un análisis factorial, se sometieron a dos soluciones factoriales 125 matrices de muestras provenientes de dos matrices parámetros. Los efectos del tamaño de las muestras y de las comunidades de variables son igualmente exploradas. Los resultados obtenidos permiten la identificación de las condiciones de utilización de esos criterios.

Zusammenfassung — Um die Wirksamkeit gewisser empirischer oder statistischer Kriterien zu prüfen, die zur Bestimmung der Faktorenzahl in einer faktoriellen Analyse verwendet werden, unterwerfen wir 125 Mustergitter aus zwei als Parameter dienenden Gitterschemata zwei faktoriellen Lösungen. Die Auswirkung der Grösse der Stichprobenauswahl und der Gemeinsamkeiten unter den Variablen werden ebenfalls untersucht. Die so gefundenen Ergebnisse erlauben die Identifizierung der Bedingungen, die bei der Verwendung dieser Kriterien nötig sind.

Introduction

L'analyse factorielle est une branche des statistiques multivariées qui est utilisée dans la recherche en sciences humaines d'une façon assez extensive. Ainsi, on compte en mesure et évaluation plus de 880 publications[1] relatives à ce domaine.

Les méthodes de l'analyse factorielle présentent certains problèmes pour lesquels aucune solution définitive n'a encore été proposée. La détermination du nom-

Ajar, Djavid: professeur, Université de Montréal.

bre de facteurs à retenir en est un d'importance. À la question: « Comment doit-on décider du nombre de facteurs à extraire pour expliquer des interrelations observées entre les variables initiales », il n'existe pas de réponse claire et nette. En fait, en analyse factorielle, il n'existe pas de critère standard de détermination du nombre de facteurs à extraire. Les critères couramment utilisés apportent en général des solutions partielles qui ne font pas l'unanimité. Ces critères relèvent de deux approches conceptuellement différentes: l'une, psychométrique, et l'autre, statistique.

La présente étude a pour but de vérifier empiriquement l'efficacité des critères utilisés pour déterminer le nombre de facteurs à extraire dans une analyse factorielle.

Dans la première partie, nous passerons brièvement en revue les critères les plus fréquemment utilisés; la deuxième partie sera consacrée à la description de l'étude; nous finirons cet exposé par l'interprétation des résultats obtenus et par la formulation de quelques remarques destinées à l'utilisateur.

I — Les critères de détermination du nombre de facteurs

Nous examinerons successivement les critères relatifs aux approches psychométrique et statistique.

A — Approche psychométrique

Cette approche est issue du développement de l'analyse factorielle en psychologie. Ici, l'erreur de mesure est la seule source d'erreur dont le modèle factoriel tient compte, l'erreur échantillonnale est ignorée. Les critères principaux de choix d'un facteur donné sont: « l'interprétabilité scientifique et la réplicabilité ». En se basant sur ces critères, les psychométriciens ont eu recours à des méthodes empiriques pour régler le problème du nombre de facteurs à extraire. Ces méthodes sont souvent appelées « les règles empiriques ».

Il existe un grand nombre de règles empiriques; dans ce qui suit nous en décrivons quatre, choisies en fonction de l'importance de leur utilisation.

a) Le nombre de facteurs à retenir est déterminé par la grandeur des valeurs-propres de la matrice de base. Cette règle, connue sous le nom de « règle de Kaiser-Guttman » est définie de la façon suivante:

> « Le nombre des valeurs-propres supérieures à l'unité d'une matrice d'intercorrélation, est égal au nombre de facteurs à extraire ». Cette règle empirique dérive des travaux de Guttman (1954) sur la limite inférieure « faible » du rang d'une matrice. Présentée par Kaiser (1960), sa simplicité lui a valu d'être largement utilisée. Cette règle repose sur le principe qu'un facteur doit posséder une variance vraie non négative pour avoir un coefficient de fidélité strictement positif. Ceci correspond à une valeur-propre, relative à ce même facteur, plus grande que l'unité.

Il faut noter que les arguments de Guttman et de Kaiser sont basés sur les paramètres d'une population. L'utilité pratique de cette règle est donc limitée par le fait qu'en général les matrices d'intercorrélations observées proviennent des données d'un échantillon et non d'une population.

Dans une note inédite, R.P. McDonald[2] montre que la règle de Kaiser-Guttman n'est pas utilisable pour les données échantillonnales et qu'une matrice aléatoire (c'est-à-dire, dont le nombre de facteurs est nul) d'ordre (p x p) possède un nombre de valeurs-propres plus grand que l'unité qui tend en moyenne vers ½ p.

Humphreys (1964) pense que pour de grands échantillons cette règle aboutit à une sous-estimation du nombre de facteurs expliquant un domaine.

Linn (1968) estime que la pratique habituelle qui consiste à garder autant de facteurs que le nombre de valeurs-propres supérieures à l'unité n'est pas souhaitable.

Cliff et Hamberger (1967) en se référant aux études de Jöreskog (1963), Linn (1964), Horn (1965) et Hamberger (1965) ont constaté que dans des conditions idéales, c'est-à-dire quand:

i) le nombre de facteurs est considérablement inférieur à celui des variables;

ii) les communautés des variables sont clairement plus grandes que leur unicité;

iii) l'échantillon est suffisamment grand;

alors la grandeur des valeurs-propres peut indiquer adéquatement le nombre de facteurs à extraire. Lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites, les auteurs suggèrent de poursuivre les recherches.

b) « Le nombre de facteurs à extraire est déterminé par les saturations provenant des variables réelles ».

Cette règle empirique proposée par Linn (1964), n'a pas produit des résultats satisfaisants.

c) « Le nombre de facteurs est déterminé par le point de rupture dans la courbe des valeurs-propres » ou « règle de Linn ».

Cette règle est associée à la règle de Kaiser-Guttman d'une part et au « Scree test » de Cattell (1966) d'autre part. Le principe en est qu'une fois extraits les facteurs importants (reliés aux valeurs-propres élevées), il ne reste que les facteurs triviaux reliés aux valeurs-propres moins élevées.

Linn (1968) propose que la rupture dans la courbe des valeurs-propres de la matrice d'intercorrélation, ou dans une autre courbe directement reliée à celle-ci, soit utilisée pour déterminer le nombre de facteurs à extraire. L'inconvénient est qu'en général, la courbe en question peut ou bien compter plus d'un point de rupture, ou bien n'en compter aucun. Dans de pareils cas, Linn pense qu'il n'y a pas de solution au problème du nombre de facteurs.

Cliff (1970) vérifie l'efficacité statistique de la règle de Linn et conclut que, pour de grands échantillons, ayant des différences considérables entre les valeurs-propres successives, le point de rupture de la courbe des valeurs-propres échantillonnales correspond à celui de la population correspondante.

d) « Le nombre de facteurs est déterminé par le nombre de valeurs-propres réelles plus grandes que les valeurs-propres aléatoires » ou « règle de Horn ».

Horn (1965) a suggéré une règle qui, à partir du point d'intersection de deux courbes, l'une basée sur les valeurs-propres réelles et l'autre sur les valeurs-propres aléatoires, définit la règle sus-mentionnée. L'auteur n'expose pas les fondements théoriques de cette règle. Il semble qu'elle soit fondée sur le postulat implicite que les valeurs-propres d'une matrice aléatoire expliquent la fluctuation échantillonnale des valeurs-propres d'une autre matrice réelle de même dimension. Un tel postulat ne nous paraît pas acceptable.

En tenant compte des caractéristiques des règles empiriques mentionnées dans les paragraphes précédents, seules les règles de Kaiser-Guttman et de Linn sont retenues dans la présente recherche.

B — Approche statistique

Cette approche est basée sur la théorie de l'échantillonnage et relève des mêmes techniques que les tests statistiques. L'approche statistique a été ignorée par les praticiens surtout à cause de la quantité de calculs qu'exigeait leur utilisation. Avec le développement des ordinateurs, ce problème n'existe plus ; en fait, plusieurs tests statistiques concernant le nombre de facteurs à extraire sont inclus dans certains logiciels dont SPSS. Parmi ces tests, les plus fréquemment utilisés sont le test de sphéricité de Bartlett et le test de Lawley.

a) Le test de Bartlett (1950) est développé spécifiquement pour l'Analyse en Composantes Principales ; il équivaut à tester la diagonalité de la matrice des covariances. En d'autres termes, selon l'hypothèse nulle, le nombre de facteurs à extraire est égal à zéro. Ce test selon plusieurs recherches dont celles de Knapp et Swayer (1967), Tobias et Carlson (1969) est un test puissant.

Il convient de noter que lorsque $(p - 1) \geqslant k > 0$, où p est le nombre de variables et k le nombre de facteurs à extraire, on peut utiliser une extension du test de Bartlett. Toutefois, selon Lawley et Maxwell (1971) son utilisation sera appropriée seulement si les k premiers facteurs expliquent la majeure partie de la variance totale des variables observées.

Bartlett (1950) reconnaît que pour de grands échantillons son test peut déceler des facteurs statistiquement significatifs mais pratiquement triviaux. Il faut néanmoins ajouter que tous les tests statistiques souffrent de cette même faiblesse au niveau de leurs applications.

b) Le test de Lawley (1940) sert à vérifier la signification des résidus obtenus par la solution factorielle de maximum de vraisemblance. On y postule que la distribution du vecteur aléatoire χ^2 de dimension p est multivariée normale avec un vecteur des moyennes μ et une matrice de dispersion Σ, (p x p), dont les valeurs-propres sont distinctes.

Lawley (1955) a généralisé l'application de son test au-delà de la solution du maximum de vraisemblance. Brown (1968) estime que cette généralisation est inappropriée et qu'elle conduit à une surestimation du nombre de facteurs.

Brown (1968) trouve le test de Lawley puissant, par contre, Linn (1968) n'est pas de cet avis. Harris et Harris (1971) ont comparé le nombre de facteurs obtenus au moyen du test de Lawley au nombre de facteurs retenus à l'aide des règles empiriques: ils ont constaté que le test produit parfois une surestimation excessive.

Jöreskog (1967) a approfondi la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance, ainsi qu'une nouvelle version du test de Lawley.

D'une façon générale le teste de Bartlett et celui de Lawley engendrent une surestimation du nombre de facteurs. Pour pallier au problème de la surestimation du test de Lawley, Tucker et Lewis (1973) ont proposé un indice similaire à un coefficient de fidélité et dépendant de la statistique de Lawley. Cet indice selon ses auteurs indiquerait le degré d'adéquation du modèle factoriel pour un nombre prédéterminé de facteurs.

Dans la présente étude, nous vérifierons l'efficacité du test de Bartlett pour le nombre de facteurs à extraire, k, égal zéro et celle de Lawley (version Jöreskog) pour k = 4, ce dernier correspondant au nombre réel de facteurs dans les matrices paramètres préparées pour cette étude. L'indice de Tucker et Lewis sera utilisé pour vérifier son efficacité en ce qui concerne la correction de la surestimation du test de Lawley.

II — Schéma expérimental

Un ensemble de 125 matrices échantillonnales tirées aléatoirement de deux matrices paramètres, Ω_1 et Ω_2, chacune de dimension (20 x 20) est soumis à deux méthodes d'analyse factorielle et l'efficacité de chaque critère, règle empirique ou test statistique, pour déterminer le nombre de facteurs à retenir, est étudié.

A — *Les variables indépendantes*

La variable indépendante majeure dont l'effet sera l'objet de vérifications dans la présente étude est la méthode de détermination du nombre de facteurs. Nous avons retenu les quatre méthodes qui suivent:

a) pour l'approche psychométrique, la règle de Kaiser-Guttman et celle de Linn.

b) pour l'approche statistique, le test de Bartlett et celui de Lawley, ce dernier accompagné de l'indice de Tucker et Lewis.

Les variables indépendantes secondaires seront plutôt considérées comme les conditions expérimentales. Ces variables sont:

a) La grandeur de l'échantillon. Pour les échantillons tirés de Ω_1, la grandeur de l'échantillon, N, est fixée par

   i) $N_1 = (p + 50) = 70$ (voir Lawley et Maxwell, 1971, p. 20)

   ii) $N_2 = 5\ p = 100$ (voir Gorsuch, 1974, p. 331)

   iii) $N_3 = 15\ p = 300$ (un nombre considéré comme modérément grand)

   Pour les échantillons tirés de Ω_2 seules N_1 et N_3 sont considérées. Nous procéderons à 25 réplications pour chaque niveau de N.

b) La communauté des variables. Les communautés des variables

   h_j^2, j = 1, ..., 20, font parties de l'une des deux catégories suivantes:

   i) $h_j^2 \geqslant 0{,}60$, pour les 75 matrices tirées de Ω_1

   ii) $h_j^2 \leqslant 0{,}30$, pour les 50 matrices tirées de Ω_2

c) La méthode d'extraction des facteurs. Il faut souligner qu'il existe plusieurs méthodes et chacune d'entre elles répond aux multiples exigences théoriques ou pratiques, spécifiques à une situation expérimentale donnée. Parmi ces méthodes nous avons choisi les deux méthodes suivantes:

   i) la méthode de maximum de vraisemblance (MV),

   ii) la méthode des moindres carrés généralisée (MCG).

   La rigueur relative et l'accessibilité sont deux critères qui nous ont guidé dans ce choix.

B — *Les matrices paramètres*

Les deux matrices paramètres, Ω_1 et Ω_2, sont construites à partir de la matrice d'intercorrélation de 39 variables étudiées par Lord (1956); leurs constructions suivent les étapes suivantes:

a) Des 39 variables initiales, nous avons éliminé les variables ayant un coefficient de fidélité faible et/ou une structure factorielle complexe. Ainsi, le nombre de variables, p, est réduit à 20. La matrice d'intercorrélations entre ces 20 variables est alors analysée pour quatre facteurs en utilisant la méthode MV; la matrice des saturations obtenue est à son tour utilisée pour reconstruire une matrice d'intercorrélations, R_c, (20×20), qui est strictement explicable par 4 facteurs.

b) Nous avons ensuite construit une matrice des résidus, E, (20×20), E est diagonale sauf pour des erreurs aléatoires minimes (aucun élément hors de la diagonale de E n'est plus grand que 0,09).

c) La première matrice paramètre, Ω_1, est alors obtenue en faisant la somme de R_C et E.

La matrice Ω_1 possède les propriétés qui suivent:

i) elle est de dimension (20 × 20),

ii) les communautés de ses variables sont toutes plus grandes ou égales à 0,60

iii) elle est conforme au modèle de l'analyse factorielle classique.

d) Pour obtenir la deuxième matrice paramètre, Ω_2, nous avons suivi la même démarche, sauf qu'en manipulant la matrice des saturations obtenue lors de l'analyse initiale, nous avons réduit les communautés des variables à des valeurs inférieures ou égales à 0,30.

La première matrice paramètre représente un cas idéal pour effectuer une analyse factorielle. Tandis que la deuxième, Ω_2, bien qu'elle soit conforme au modèle factorielle, représente un cas où l'utilisation de l'analyse factorielle est à déconseiller car les facteurs extraits n'expliquent qu'une fraction infime de la variance des 20 variables observées. Dans des pareils cas l'analyse factorielle n'atteindra pas l'objectif principal, la parcimonie, pour lequel elle est conçue.

C — *Les échantillons*

Les 125 échantillons sont générés, à partir de ces deux matrices paramètres, d'une manière aléatoire. Nous avons suivi la méthode développée par Odel et Feivson (1966) pour la génération des matrices échantillonnales. Le programme d'ordinateur utilisé est une adaptation du programme préparé par Montanelli[3] (1975). Pour le détail de la technique utilisée pour le choix des échantillons, voir Ajar (1978).

III — Les résultats

Les résultats obtenus en appliquant les deux règles empiriques retenues ainsi que les tests de Bartlett et de Lawley à 125 matrices échantillonnales sont présentés dans les paragraphes qui suivent.

A — *La règle de Kaiser-Guttman*

Rappelons que d'après cette règle le nombre de facteurs à retenir est égal au nombre de valeurs-propres plus grandes que 1. Son application aux données reliées aux échantillons tirés de Ω_1, pour déterminer le nombre de facteurs à extraire a produit les résultats qui suivent:

a) pour N = 300, dans 100% des cas la règle de Kaiser-Guttman a spécifié le nombre exact de facteurs à extraire, soit 4 facteurs;

b) pour N = 100, nous avons observé 92% de cas de décisions exactes et 8% de cas de sous-estimation;

c) pour N = 70, nous avons obtenu les mêmes résultats qu'en b).

En ce qui concerne les échantillons tirés de la deuxième matrice paramètre, Ω_2, les résultats ne sont pas encourageants :

a) pour N = 300, nous avons observé une surestimation absolue (aucun cas de sous-estimation et aucun cas de décision correcte). La surestimation moyenne est 1,60 fois supérieure au nombre réel de facteurs ;

b) pour N = 70, la surestimation est à nouveau absolue ; dans ce cas, la surestimation moyenne est 1,75 fois plus grande que le nombre réel de facteurs.

Les résultats obtenus en appliquant le critère de Kaiser-Guttman, sont résumés au Tableau I. Il apparaît donc que cette règle empirique est fiable seulement dans des conditions où les matrices sont idéales pour l'application de l'analyse factorielle, et tout particulièrement si l'échantillon est modérément grand.

B — *La règle de Linn*

D'après cette règle le nombre de facteurs à retenir est déterminé par le point de rupture dans la courbe des valeurs-propres. Avec cette règle on obtient les résultats suivants :

a) En ce qui concerne les échantillons tirés de Ω_1, cette règle a produit des résultats assez semblables à ceux obtenus en utilisant la règle de Kaiser-Guttman. Il faut souligner qu'en général l'identification du point de rupture s'est faite d'une manière subjective.

b) Les résultats obtenus pour les échantillons tirés de Ω_2, sont tout à fait confus. En fait, pour ces échantillons, l'identification d'un point de rupture clairement établi est très difficile.

À titre d'exemple, les courbes des valeurs-propres correspondant à 8 échantillons tirés de Ω_1, et Ω_2, N = 300, sont représentées aux Diagrammes I et II. Ces courbes sont choisies au hasard parmi les 50 échantillons disponibles.

Les résultats obtenus permettent d'établir qu'en général, cette règle empirique va dans le même sens que celle de Kaiser-Guttman. Sa subjectivité relative la rend moins intéressante et son utilisation est déconseillée.

C — *Test de Bartlett*

Pour le nombre de facteurs à extraire égal zéro, le test de Bartlett s'est avéré très puissant et efficace, en fait même avec α = 0,001, l'hypothèse nulle concernant zéro facteur est rejetée pour toutes les matrices échantillonnales. Les résultats obtenus sont résumés au Tableau I.

D — *Test de Lawley*

Pour les échantillons tirés de Ω_1 et pour k = 4 et α = 0,01, nous avons observé les résultats suivants :

Tableau I
Les résultats obtenus en appliquant le critère de Kaiser-Guttman et le test de Bartlett

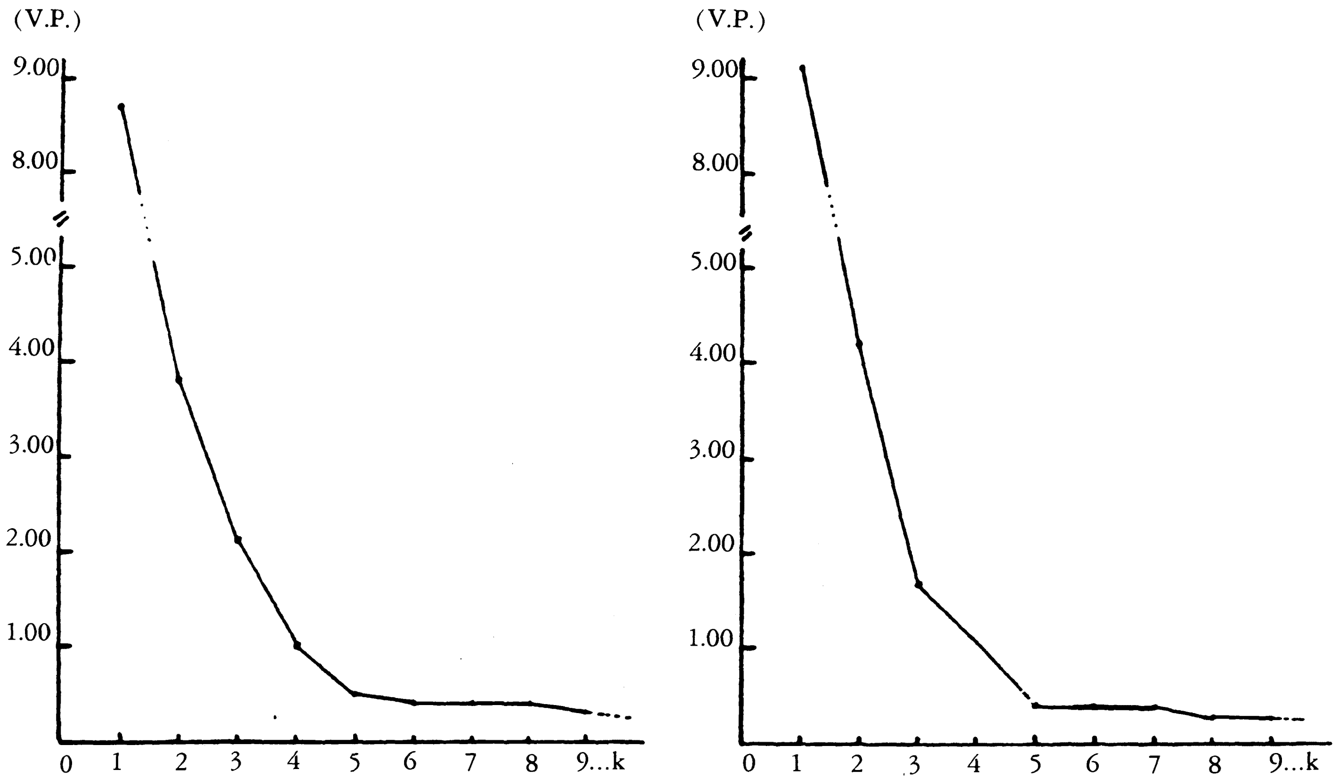
	% de sous estimations					% de décisions correctes					% de surestimations				
	Ω_1			Ω_2		Ω_1			Ω_2		Ω_1			Ω_2	
	N=300	N=100	N=70	N=300	N=70	N=300	N=100	N=70	N=300	N=70	N=300	N=100	N=70	N=300	N=70
Kaiser-Guttman pour k = 4	0[a]	8	8	0	0	100	92	92	0	0	0	0	0	100	100
Test de Bartlett pour k = 0[b]	0	0	0	0	0	100	100	100	100	100	0	0	0	0	0

a) le signe de pourcentage est éliminé partout.

b) $\alpha = 0,01$

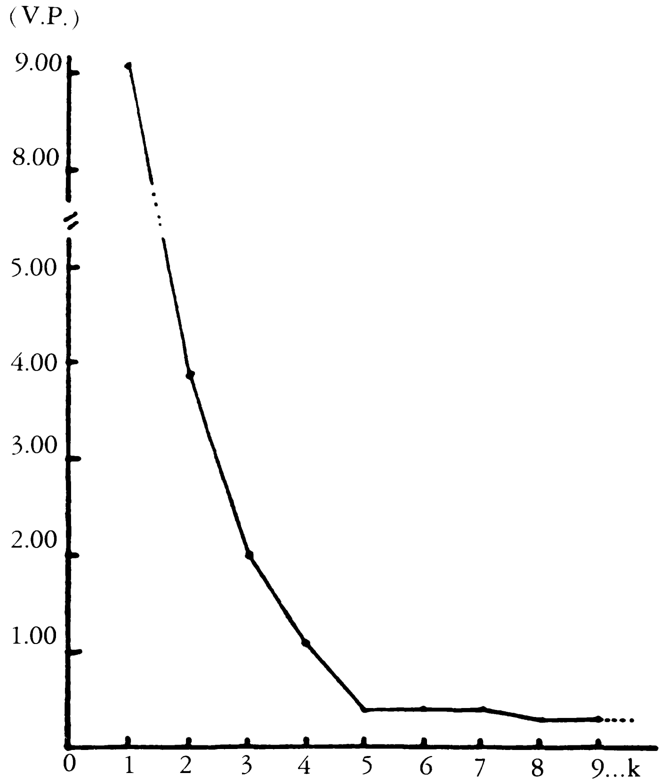
Diagramme I

Échantillon aléatoire de 4 courbes de valeurs-propres provenant de Ω_1, et choisies parmi 25 courbes ; N= 300.

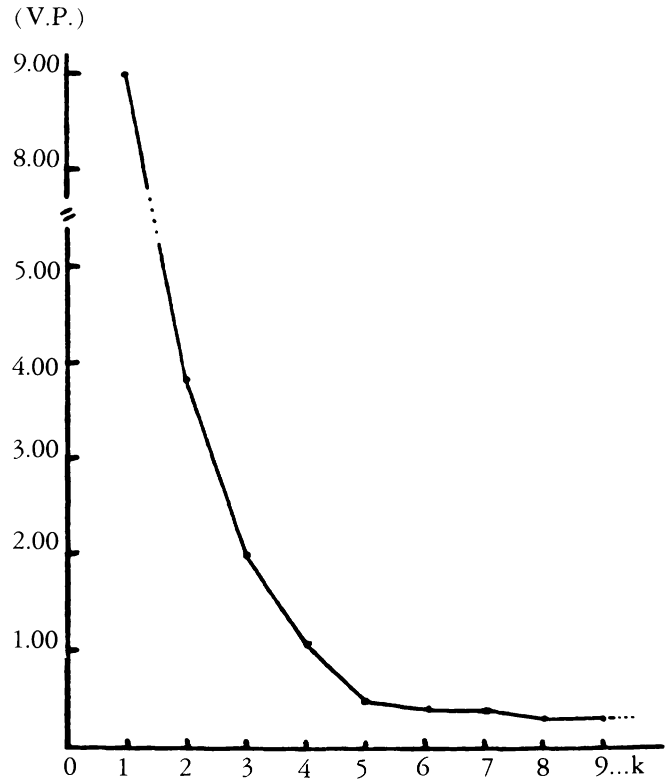


a) M-107

b) M-112


(V.P.)
9.00
8.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9...k

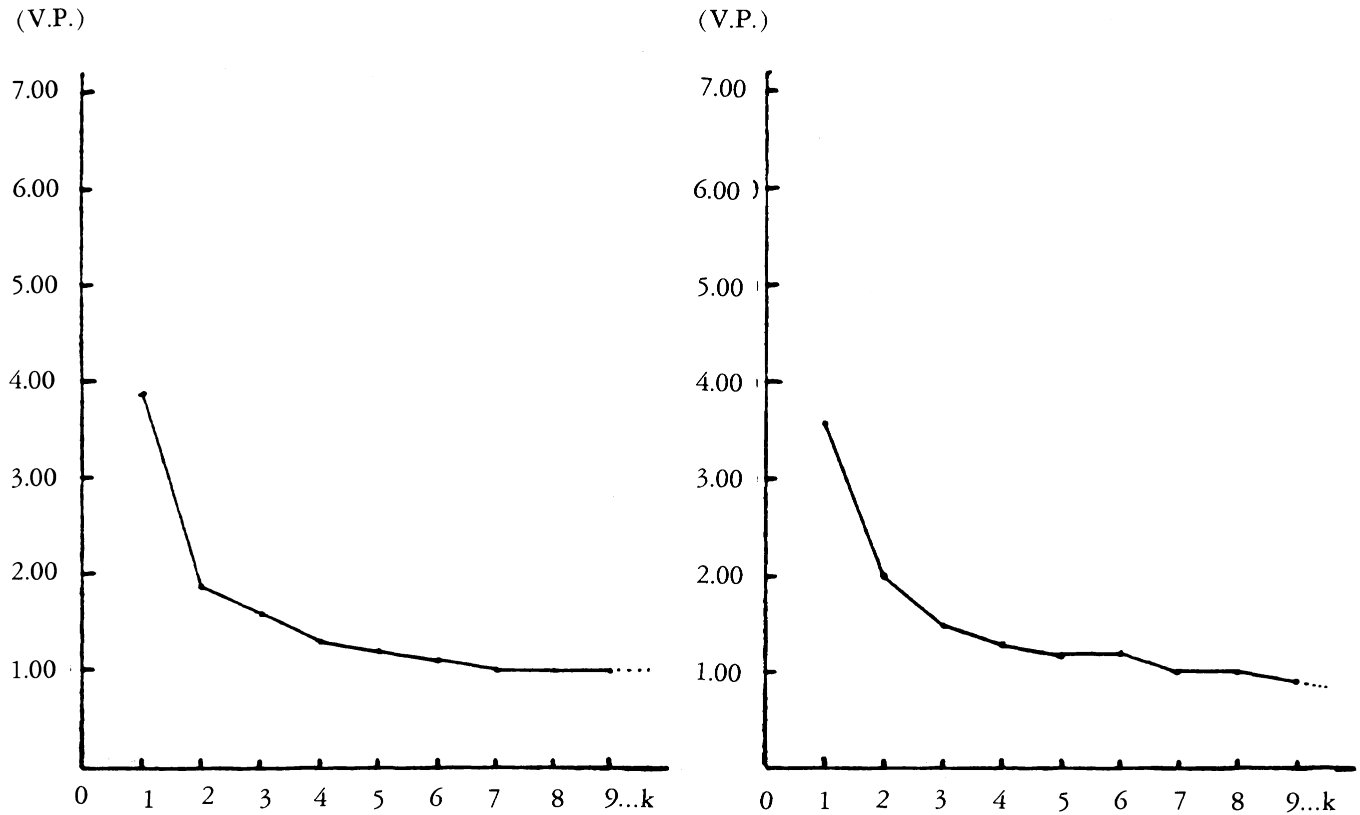
c) **M**-119


(V.P.)
9.00
8.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9...k

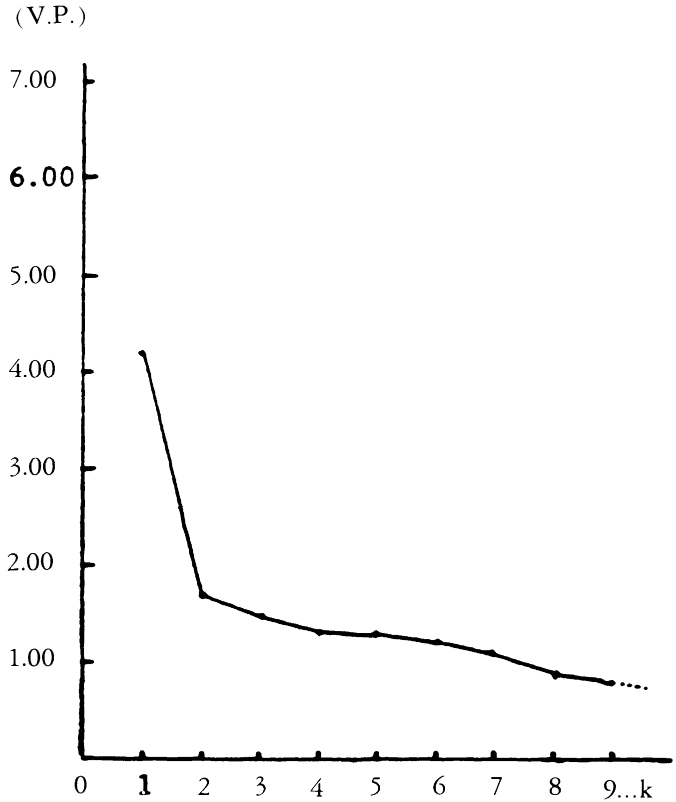
d) **M**-122

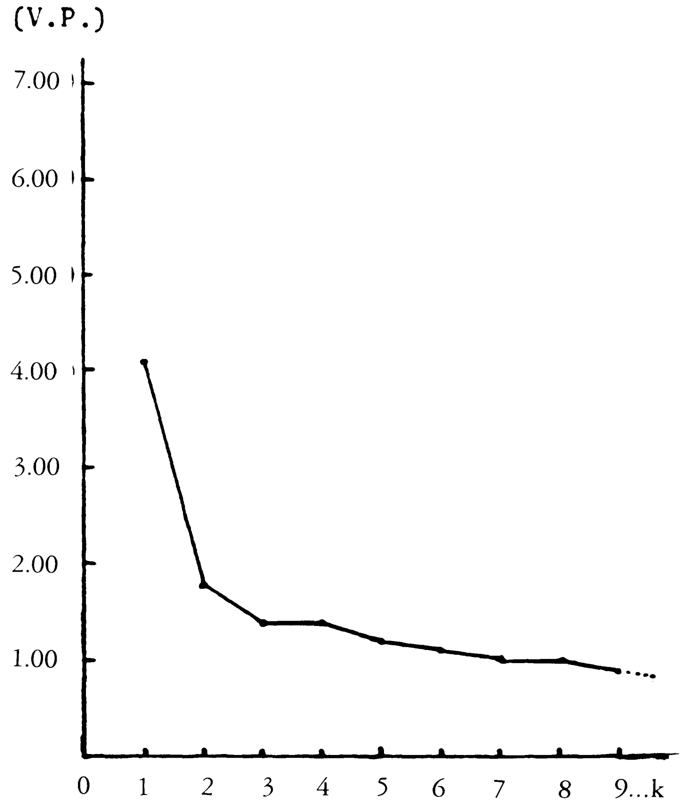
Diagramme II

Échantillon aléatoire des 4 courbes de valeurs-propres provenant de Ω_2 et choisies parmi 25 courbes ; N = 300.



a) M-103 b) M-109


(V.P.)
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9...k
c) M-117


(V.P.)
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9...k
d) M-123

a) La méthode du maximum de vraisemblance:

i) pour N = 300, il y a 8% de sous-estimations[4], 68% de décisions correctes et 24% de surestimations;

ii) pour N = 100, nous n'avons observé aucun cas de sous-estimation ou de surestimation et toutes les décisions sont correctes;

iii) pour N = 70, les résultats n'indiquent aucun cas de sous-estimation, 96% de décisions correctes et 4% de surestimations.

b) La méthode des moindres carrés généralisée:

i) pour N = 300, 0% de sous-estimation, 76% de décisions correctes, 20% de surestimations et 4% de cas indéterminés;

ii) pour N = 100, 0% de sous-estimation, 72% de décisions correctes, 0% de surestimation et 28% de cas indéterminés;

iii) pour N = 70, 4% de sous-estimations, 72% de décisions correctes, 4% de surestimations et 20% de cas indéterminés.

Pour les échantillons tirés de Ω_2, et pour k = 4 et α = 0,01, les résultats sont les suivants:

a) La méthode du maximum de vraisemblance:

i) pour N = 300, nous avons observé une surestimation de 100%.

ii) pour N = 70, le rendement du test est meilleur, nous avons constaté 0% de sous-estimation, 80% de décisions correctes et 20% de surestimations.

b) La méthode des moindres carrés généralisée:

i) pour N = 300, les résultats sont identiques à ceux de la méthode MV, à savoir 100% de surestimations;

ii) pour N = 70, nous avons obtenu 0% de sous-estimation, 80% de décisions correctes, 16% de surestimations et 4% de cas indéterminés.

Les résultats obtenus en appliquant le test de Lawley et l'indice de Tucker et Lewis sont résumés au Tableau II.

E — *L'indice de Tucker et Lewis* (ρ_k)

L'indice ρ_k est utilisé pour corriger la surestimation éventuelle du nombre de facteurs résultant de l'utilisation du test de Lawley. Le seuil de décision pour l'acceptation d'un nombre donné de facteurs est fixé à ρ_k = 0,90. Les résultats obtenus sont résumés au Tableau II.

Pour les échantillons tirés de Ω_1, pour k = 4 et ρ_4 critique = 0,90, nous avons obtenu les résultats qui suivent.

a) La méthode du maximum de vraisemblance:

i) pour N = 300, ρ_4 corrige les sous-estimations et les surestimations résultant de l'utilisation du test de Lawley, en fait tous les ρ_4 calculés sont supérieurs à 0,90;

ii) pour N = 100, ρ_4 s'avère inutile, car son rendement est inférieur de 4% à celui du test de Lawley;

iii) pour N = 70, les données changent considérablement: on observe une surestimation de plus de 40%. Si on se réfère aux résultats du test de Lawley, où on n'observe que 4% de surestimations, on constate que dans ce cas particulier, l'indice ρ_4 ne remplit pas la fonction pour laquelle il est conçu.

b) La méthode des moindres carrés généralisée:

i) pour N = 300, ρ_4 élimine complètement les 20% de surestimations découlant de l'utilisation du test de Lawley;

ii) Pour N = 100, il donne les mêmes résultats que le test de Lawley;

iii) pour N = 70, nous avons observé 4% de surestimations de plus que le test de Lawley.

Pour les échantillons tirés de Ω_2, l'application de l'indice ρ_4 a produit les résultats qui suivent.

a) La méthode du maximum de vraisemblance:

i) pour N = 300 et k = 4, nous avons observé une surestimation de 100%. Le fait d'augmenter le nombre de facteurs observés de 4 à 6 (c'est-à-dire permettre une surestimation de 50%) n'a pas modifié le pourcentage de surestimation. En fait les indices ρ_4 et ρ_6 maxima observés dans ces deux cas sont égaux à 0,77 et à 0,82 respectivement et ces valeurs maxima sont en deça de 0,90, la valeur critique pour l'acceptation de l'adéquation de la solution.

ii) pour N = 70, on obtient 0% de sous-estimation, 28% de décisions correctes, 68% de surestimations et 4% de cas indéterminés.

b) La méthode des moindres carrés généralisée:

i) pour N = 300, la surestimation est absolue et le ρ_4 maximum atteint seulement 0,78. Ici, même l'extraction de deux autres facteurs observés ne modifie en rien le pourcentage de surestimation et ρ_6 maximum atteint 0,88.

ii) pour N = 70, on obtient les mêmes résultats que pour N = 300 et le ρ_4 maximum est réduit à 0,76.

En somme, on constate que pour les matrices d'intercorrélations basées sur des variables possédant des communautés fortes, l'indice de Tucker et Lewis a, en général, la même efficacité que le test de Lawley. C'est seulement dans le cas des

Tableau II

Les résultats observés en appliquant le test de Lawley et l'indice de Tucker et Lewis:

($k = 4$, $\alpha = 0{,}01$ et le ρ_4 critique = 0,90)

			Méthode factorielle																							
			Maximum de vraisemblance												Moindres carrés généralisée											
			N = 300				N = 100				N = 70				N = 300				N = 100				N = 70			
			A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
Test de Lawley	Les échantillons tirés de:	Ω_1	8	68	24	0	0	100	0	0	0	96	4	0	0	76	20	4	0	72	0	28	4	72	4	20
		Ω_2	0	0	100	0	-	-	-	-	0	80	20	0	0	0	100	0	-	-	-	-	0	80	16	4
Indice de Tucker et Lewis		Ω_1	0	100	0	0	4	96	0	0	0	60	40	0	0	100	0	0	0	72	0	28	0	68	8	24
		Ω_2	0	0	100	0	-	-	-	-	0	28	68	4	0	0	100	0	-	-	-	-	0	0	100	0

A =% de sous-estimations;
B =% de décisions correctes;
C =% de surestimations;
D =% de cas indéterminés.

grands échantillons qu'il parvient à améliorer le rendement du test en question. Ce n'est toutefois pas le cas pour les matrices basées sur des variables à communautés faibles : ici pour tous les niveaux de N, l'indice de Tucker et Lewis est moins efficace que le test de Lawley et son utilisation n'est pas recommandée.

IV — Recommandations

En termes pratiques, les résultats de cette étude appellent les recommandations suivantes :

a) Avant de procéder à une analyse factorielle proprement dite, il convient de vérifier l'adéquation des données au modèle de l'analyse factorielle. Pour cette fin certains logiciels dont SPSS, fournissent quelques indices intéressants dont le test de Bartlett.

b) La règle de Kaiser-Guttman est recommandée dans le cas où les communautés des variables sont élevées et les échantillons sont modérément grands. Toutefois pour de petits échantillons ($N \leqslant 100 \leqslant 5P$) son efficacité est douteuse. Pour les cas où les communautés des variables sont faibles, cette règle est à déconseiller, car son application aboutit à des surestimations du nombre de facteurs.

c) La règle de Linn n'est pas à recommander ; car en général elle concorde avec la règle de Kaiser-Guttman ; de plus elle n'aboutit pas toujours à des conclusions sans équivoques.

d) Le test de Bartlett est fortement recommandé dans le seul cas où on veut vérifier si $K = 0$.

e) Le test de Lawley est recommandé bien qu'en général il surestime le nombre de facteurs à extraire. Ce test atteint son maximum d'efficacité dans les cas où les communautés des variables sont fortes et où l'échantillon est de taille moyenne ($N = 5p$).

f) L'indice de Tucker et Lewis n'est pas recommandé, car en général il n'arrive pas à corriger la surestimation due à l'utilisation du test de Lawley. Son emploi est cependant justifié dans le cas où les variables ont des fortes communautés et où l'échantillon est de grande taille ($N \geqslant 15p$).

NOTES

1. Recherche bibliographique effectuée à l'aide du système ERIC en juillet 1981.
2. Le texte de R.P. McDonald est disponible chez l'auteur.
3. M. Montanelli nous a gracieusement fourni une copie de son programme et nous lui offrons nos meilleurs remerciements.
4. Dans ces cas, pour $k = 3$, l'hypothèse nulle est acceptée.

RÉFÉRENCES

Ajar, D., *L'invariance factorielle et le problème de l'échantillonnage des sujets.* Thèse de Ph. D., Université de Montréal, F.S.E., 1978.

Bartlett, M.S., Test of significance in factor analysis. *British Journal of Psychology*, vol. 3, 1950, p. 77-85.

Brown, M.W., A comparison of factor analytic techniques, *Psychometrika*, vol. 33, 1968, p. 267-333.

Cattell, R.B., The Scree test for the number of factors, *Mult. Behav. Res.*, vol. 1, 1966, p. 245-276.

Cliff, N., The relation between sample and population characteristic vectors, *Psychometrika*, vol. 35, 1970, p. 163-176.

Cliff, N. et Hamberger, C.D., The study of sampling errors in factor analysis by mean of artificial experiments, *Psych. Bul.*, vol. 68, 1967, p. 430-445.

Gorsuch, R.L., *Factor analysis*, W.B. Saunders Inc., 1974.

Guttman, L., Some necessary conditions for common factor analysis, *Psychometrika*, vol. 19, 1954, p. 149-161.

Hamberger, C.D., *Factor stability as a function of analytical rotation method, type of simple structure and size of sample*, thèse non publiée de Ph. D., University of Southern California, 1965.

Harris, M.L. et Harris, C.W., A factor analytic interpretation strategy. *Educ. & Psych. Measurement*, vol. 31, 1971, p. 589-606.

Horn, J.L., A rational and test for the number of factor in factor analysis. *Psychometrika*, vol. 30, 1965, p. 179-185.

Humphreys, L.G., Number of cases and number of factors; an example where N is large, *Educ. & Psych. Measurement*, vol. 24, 1964, p. 457-466.

Joreskog, K.G., *Statistical estimation in factor analysis*, Stockholm, Almquist and Wiksell, 1963.

Joreskog, K.G., Some contributions to maximum likelihood factor analysis, *Psychometrika*, vol. 32, 1967, p. 443-482.

Kaiser, H.F., The application of electronic computers to factor analysis, *Educ. & Psych. Measurement*, vol. 20, 1960, p. 141-151.

Knapp, T.R. et Swayer, V.H., Some empirical results concerning the power of Bartlett's test of significance of correlation matrix, *Amer. Edu. Res. Journal*, vol. 4, 1967, p. 13-17.

Lawley, D.N., The estimation of factor loadings by the method of maximum likelihood, *Actes du Congrès, Royal Society of Edinburgh*, vol. 60, 1940, p. 64-82.

Lawley, D.N., A statistical examination of the centroïd method, *Actes du Congrès, Royal Society of Edinburgh*, vol. 64, 1955, p. 175-189.

Lawley, D.N. et Maxwell, A.E., *Factor Analysis as a Statistical Method*, 2ième éd., New York, American Elsevier, 1971.

Linn, R.L., *Use of random normal deviates to determine the number of factor to extract in factor analysis*, thèse non publiée de M.A., University of Illinois, Urbana, 1964.

Linn, R.L., A Monte Carlo approach to the number of factor problem, *Psychometrika*, vol. 33, 1968, p. 37-71.

Lord, F.M., A study of speed factors in tests and academic grades, *Psychometrika*, vol. 21, 1956, p. 31-50.

Montanelli, R.G. jr., A computer program to generate sample correlation and covariance matrices, *Edu. & Psy. Measurement*, vol. 35, 1975, p. 195-197.

Odell, P.L. et Feivson, A.H., A numerical procedure to generate a sample covariance matrix, *Journal of Amer. Stat. Ass.*, vol. 61, 1966, p. 199-203.

Tobias, S. et Calson, J.E., Brief report: Bartlett's test of sphericity and chance findings in factor analysis. *Multivariate Behavioral Research*, vol. 34, 1969, p. 375-377.

Tucker, L.R. et Lewis, C., A reliability coefficient for maximum likelihood factor analysis, *Psychometrika*, vol. 38, 1973, p. 1-10.