Philosophiques

philosophiques

Poincaré et le principe d'induction

Jacqueline Boniface

Volume 31, numéro 1, printemps 2004

Poincaré et la théorie de la connaissance

URI : https://id.erudit.org/iderudit/008937ar
DOI : https://doi.org/10.7202/008937ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Société de philosophie du Québec

ISSN

0316-2923 (imprimé)
1492-1391 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Boniface, J. (2004). Poincaré et le principe d'induction. *Philosophiques*, *31*(1), 131–149. https://doi.org/10.7202/008937ar

Résumé de l'article

Le principe d'induction est lié à la définition des nombres entiers d'une façon à la fois essentielle et sujette à controverse. Fonde-t-il ces nombres, ou bien trouve-t-il en eux son fondement ? Son statut lui-même peut être conçu de diverses manières. Est-il donné par l'expérience, par l'intuition, par la logique, par convention ? Ces questions furent l'objet d'une âpre discussion, autour des années 1905-1906, dans le cadre plus large d'un débat sur les fondements des mathématiques qui opposa Poincaré aux logicistes (en particulier Russell et Couturat) et aux « axiomatistes » (en particulier Peano et Hilbert). Nous proposons dans cet article de faire le point sur les termes et les enjeux de cette discussion. Nous montrerons en outre qu'elle fut l'occasion d'une redéfinition de l'analytique et, par suite, des frontières de la logique.

Poincaré et le principe d'induction

JACQUELINE BONIFACE
Université Toulouse 2 Le Mirail
boniface@univ-tlse2fr

RÉSUMÉ. — Le principe d'induction est lié à la définition des nombres entiers d'une façon à la fois essentielle et sujette à controverse. Fonde-t-il ces nombres, ou bien trouve-t-il en eux son fondement ? Son statut lui-même peut être conçu de diverses manières. Est-il donné par l'expérience, par l'intuition, par la logique, par convention ? Ces questions furent l'objet d'une âpre discussion, autour des années 1905-1906, dans le cadre plus large d'un débat sur les fondements des mathématiques qui opposa Poincaré aux logicistes (en particulier Russell et Couturat) et aux « axiomatistes » (en particulier Peano et Hilbert). Nous proposons dans cet article de faire le point sur les termes et les enjeux de cette discussion. Nous montrerons en outre qu'elle fut l'occasion d'une redéfinition de l'analytique et, par suite, des frontières de la logique.

ABSTRACT. — The principle of induction is linked essentially to the definition of "integers", but at the same time has been the subject of controversy: Is the principle founded on integers or, on the contrary, are integers founded on it? The principle itself can be understood in different ways: as a result of experiment, intuition, logic or convention. These topics were hotly debated in the years 1905-06, in the context of a larger debate on the foundations of mathematics, in which Poincaré opposed the logicists (in particular Russell and Couturat) and the "axiomatists" (in particular Peano and Hilbert). This article reconsiders what is at stake by looking at the debate in detail and also shows that the debate provided an opportunity for redefining analyticity, and in doing so, redefining the domain of logic.

Introduction

Dans le premier chapitre de *La Science et l'hypothèse*, intitulé « Sur la nature du raisonnement mathématique[1] », Poincaré relève une contradiction apparente qui mettrait en question la possibilité même de la science. La contradiction repose sur la nécessité supposée, pour une science, d'être à la fois rigoureuse et créative. Elle s'appuie en outre sur une réduction de la rigueur à la méthode déductive et sur une caractérisation de cette dernière comme stérile. Si la science est rigoureuse (entendez déductive), alors elle est nécessairement stérile et n'apportera donc aucune connaissance nouvelle, ce qui est impossible. Si la science est créative, alors elle n'est pas entièrement déductive, donc pas complètement rigoureuse, ce qui est également impossible. Pour résoudre l'aporie, si l'on maintient la nécessité, pour la science, d'être à la fois rigoureuse et créative, il faut revoir les présupposés qui identifient d'une part rigueur et déduction, d'autre part

1. Paru une première fois dans la *Revue de métaphysique et de morale* en 1894, cet article est repris dans Poincaré, 1902.

déduction et stérilité. Poincaré ne remet pas en question le second ; c'est le premier qu'il scrute. Tout raisonnement mathématique est-il déductif, ou bien y a-t-il en mathématique des raisonnements non déductifs et pourtant rigoureux ? C'est en arithmétique, là où la pensée mathématique est « restée pure », qu'il choisit d'enquêter pour répondre à cette question. Le raisonnement non déductif et pourtant rigoureux qu'il y découvre est le raisonnement par récurrence, fondé sur le principe d'induction. Avant de nous intéresser à ce raisonnement, voyons ce qu'il en est du présupposé que Poincaré n'interroge pas, à savoir la caractérisation de la déduction comme stérile.

Si le raisonnement déductif est stérile, c'est qu'il est tautologique. Ce caractère tautologique apparaît d'une façon particulièrement nette dans le syllogisme, qui est la forme *princeps* de la déduction. Dans le syllogisme, en effet, la conclusion est « contenue » dans les prémisses, elle particularise la première proposition. « Le raisonnement syllogistique, dit Poincaré, reste incapable de rien ajouter aux données qu'on lui fournit ; ces données se réduisent à quelques axiomes, et on ne devrait pas retrouver autre chose dans les conclusions[2]. » La déduction, que Poincaré décrit comme une suite de syllogismes, ne serait donc « qu'une manière détournée de dire que *A* est *A*[3] ». Même si Poincaré concède que tous les raisonnements déductifs ne se réduisent pas complètement au syllogisme, ces raisonnements sont cependant, selon lui, tous « impuissants », et cette impuissance est due à leur caractère *analytique*. C'est donc finalement le caractère analytique du raisonnement déductif qui est cause de stérilité. Puisque, selon la définition kantienne, un jugement est analytique si « le prédicat *B* appartient au sujet *A* comme quelque chose déjà contenu (implicitement) dans ce concept *A*[4] », tout jugement analytique, et donc tout raisonnement déductif, ne ferait, en effet, que développer le contenu implicite des données initiales.

Frege et les logicistes, on le sait, se sont opposés à ce qu'ils jugeaient être une sous-estimation de la valeur des jugements analytiques. Frege, par exemple, reprochait à Kant de déterminer d'une manière trop étroite les concepts, par « une simple conjonction de caractères[5] ». Ce qui, explique-t-il, est « la manière la moins féconde de construire des concepts ». Aucune des définitions mathématiques fécondes, par exemple celle de la continuité d'une fonction, ne procède ainsi. Dans de telles définitions, dit-il, « on ne peut pas savoir d'avance ce qu'on en pourra déduire ; on ne se contente plus de retirer de la boîte ce qu'on y a placé ». Il conclut ainsi :

> De telles déductions accroissent notre connaissance et il faudrait, si on veut être fidèle à Kant, les tenir pour synthétiques. On peut cependant les

2. Poincaré, 1902, p. 10.
3. *Ibid.*, p. 10.
4. Kant, 1781, p. 63.
5. Frege, 1884, p. 100 ; trad. franç., p. 212.

> démontrer d'une manière purement logique : elles sont donc analytiques. Elles sont bien, en fait, contenues dans les définitions, mais elles le sont *comme une plante l'est dans une graine*, non pas comme une poutre l'est dans la maison. Souvent, plusieurs définitions sont nécessaires à la démonstration d'une proposition ; elle n'est donc contenue dans aucune d'entre elles prises séparément, bien qu'elle découle de leur conjonction par le seul fait de la logique pure[6].

C'est en fait une redéfinition de l'analytique que propose Frege ; selon cette nouvelle définition, l'analytique n'est plus caractérisée comme tautologique, et la science peut prétendre à la rigueur déductive sans être menacée de stérilité.

On pourrait penser, de prime abord, que la divergence entre Frege et les logicistes d'une part, Poincaré et les kantiens de l'autre, n'est finalement qu'une question de vocabulaire : des propositions étant appelées *analytiques* par les premiers alors qu'elles sont nommées *synthétiques* par les seconds. Cette divergence ne se réduit cependant pas à une querelle de mots ; la frontière entre propositions analytiques et propositions synthétiques délimite en effet le domaine de la logique. C'est d'ailleurs ce qu'exprime Poincaré lui-même dans sa critique de la logique de Russell, où il écrit au sujet des principes indémontrables que Russell y introduit :

> Mais ces principes indémontrables, ce sont des appels à l'intuition, des jugements synthétiques *a priori*. Nous les regardions comme intuitifs quand nous les rencontrions, plus ou moins explicitement énoncés, dans les traités de mathématiques ; ont-ils changé de caractère parce que le sens du mot logique s'est élargi et que nous les trouvons maintenant dans un livre intitulé *Traité de logique* ? Ils n'ont pas changé de nature ; ils ont seulement changé de place[7].

Alors que cette question de la délimitation du domaine de la logique semble être secondaire aux yeux de Poincaré, elle nous paraît être au cœur de la controverse qui l'opposa aux logicistes. Le statut du principe d'induction, qui fut très discuté lors des débats qui ont alimenté cette controverse, y a une importance centrale, car il décide du rapport entre logique et arithmétique ainsi que du fondement de cette dernière.

1. Le principe d'induction : principe intuitif, principe logique ou définition ?

L'exemple de raisonnement non déductif et pourtant rigoureux, auquel Poincaré parvient en parcourant les démonstrations élémentaires de l'arithmétique, est, nous l'avons dit, le raisonnement par récurrence. Selon ce raisonnement, « on établit d'abord un théorème pour $n = 1$; on montre ensuite que s'il est vrai de $n - 1$, il est vrai de n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers[8] ». La caractéristique de ce procédé, qui

6. *Ibid.*, p. 100-101, trad., franç., p. 212. Nous soulignons.
7. Poincaré, 1905, p. 829.
8. Poincaré, 1902, p. 19.

est le *principe d'induction complète*, est « qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes[9] ». Ce qui distingue donc le raisonnement par récurrence d'un raisonnement déductif, qui, lui, contient seulement un nombre *fini* de syllogismes, c'est qu'il est un « instrument qui permet de passer du fini à l'infini ». Ce raisonnement, qui est pour Poincaré le « raisonnement mathématique par excellence », est indispensable pour établir les théorèmes généraux de l'arithmétique, et donc pour faire de cette discipline une science.

Quelle est la nature du principe d'induction qui fonde le raisonnement par récurrence ? Poincaré le définit d'abord négativement. Le principe d'induction est irréductible au principe de non-contradiction et ne peut pas être donné par l'expérience, car les deux ne peuvent fonctionner que dans le fini. Ce principe, « inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience », est donc un jugement *synthétique* a priori. Ce jugement ne saurait se réduire à une convention comme les axiomes de la géométrie, selon la conception de Poincaré. On ne peut pas non plus assimiler ce jugement à l'induction telle qu'elle est utilisée dans les sciences physiques, car une telle induction, reposant sur la croyance en un ordre de l'univers, est toujours incertaine. Pourtant ce jugement s'impose à nous « avec une irrésistible évidence ». Pourquoi ? « C'est, répond Poincaré, qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. » Cette faculté de l'esprit, Poincaré l'appelle encore « intuition du nombre pur ». Elle est le complément indispensable de la logique : la logique « qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration : l'intuition est l'instrument de l'invention[10] ».

Bien que Poincaré se réclame de Kant, sa conception de l'intuition est très différente de celle de Kant. Plus exactement, Poincaré distingue trois sortes d'intuition : « d'abord, l'appel aux sens, et à l'imagination ; ensuite, la génération par induction, calquée, pour ainsi dire, sur les procédés des sciences expérimentales », enfin « l'intuition du nombre pure[11] ». C'est cette dernière qui est à l'origine du principe d'induction et qui « peut engendrer le véritable raisonnement mathématique ». Elle est la seule des trois sortes d'intuition à ne pas nous tromper ; elle n'est pas sensible mais intellectuelle, alors que pour Kant, l'intuition est toujours sensible. Ainsi, selon Poincaré, le raisonnement mathématique, notamment en analyse, comprend deux composantes, la logique, réduite à un calcul aveugle, et l'intuition du nombre pur, qui fonde le principe d'induction.

Pour les logicistes, et en particulier pour Frege et Russell, la logique ne se réduit pas à être l'« instrument de la démonstration » ; elle en est aussi

9. *Ibid.,* p. 20.
10. Poincaré, 1905, p. 37.
11. *Ibid.,* p. 33.

la matière ; elle est la « science de l'être-vrai ». L'arithmétique doit se développer en un système de propositions analytiques, dérivées à partir d'un noyau de vérités logiques. Ce système n'est pas purement formel, il a un contenu qui est en germe dans les propositions primitives. Ce qui fait dire à Frege que l'arithmétique est une « logique développée ». Ainsi, la logique n'est pas seulement rigoureuse, elle est aussi efficace et créative. Cette fécondité ne repose pas sur le pouvoir d'un sujet, qu'il soit mathématicien, esprit humain, voire sujet transcendantal, elle repose sur la « source logique », le « réservoir de pensées » inépuisablement disponibles. « Les lois de la logique, écrit par exemple Russell, quoiqu'on ait coutume de les appeler "lois de la pensée", sont des lois aussi objectives que la loi de la gravitation. Les vérités abstraites expriment des relations qui subsistent entre les universels ; l'esprit peut reconnaître ces relations, mais ne peut les créer[12]. »

Frege marqua le début du mouvement logiciste en tentant de donner un fondement purement logique à l'arithmétique. Son projet, entrepris dans la *Begriffsschrift*[13] (*Idéographie*), parue en 1879, est achevé dans les deux tomes des *Grundgesetze der Arithmetik*[14] (*Lois fondamentales de l'arithmétique*), en 1893 et 1903. Ce projet comprend une définition purement logique du concept de nombre et une démonstration purement logique du principe d'induction. Contrairement à Poincaré qui affirmait que le principe d'induction est indémontrable, Frege entend faire de ce principe une simple conséquence du concept de succession dans une suite, concept défini dans le troisième chapitre de la *Begriffsschrift*, et ainsi le fonder dans la logique. Il écrit dans les *Grundlagen* :

> Seule cette définition de la succession dans une suite permet de réduire aux lois logiques générales l'inférence de n à $(n+1)$, qui pourrait sembler propre aux mathématiciens[15].

Russell fut le premier à reconnaître l'intérêt du travail de Frege. Plus de vingt ans après la parution de la *Begriffsschrift*, il donna une analyse critique très élogieuse des « doctrines arithmétiques et logiques de Frege » dans l'appendice A aux *Principles of Mathematics*[16]. Il vanta notamment sa « très admirable théorie des suites (*progressions*) ou plutôt des suites généralisées (*series*) que l'on peut engendrer par des relations de un à plusieurs[17] ». Sa propre théorie est tout à fait parallèle à celle de Frege ; Russell insiste toujours à la fois sur l'antériorité du travail de Frege et sur l'indépendance de ses propres découvertes. Nous présenterons la théorie

12. Russell, 1911, p. 58 ; repris dans Heinzmann, 1986, p. 301.
13. Frege,1879.
14. Frege, 1893, Frege 1903.
15. Frege, 1884, p. 93 ; trad. franç., p. 206.
16. Russell, 1903.
17. *Ibid.*, § 495.

logiciste, et plus particulièrement la conception logiciste de l'induction mathématique, à partir de la théorie de Russell qui fut l'objet de la critique de Poincaré.

Dans les *Principles of Mathematics*, Russell part de l'axiomatisation de Peano auquel il reconnaît le mérite d'avoir montré que la théorie des nombres peut être dérivée de trois notions primitives : 0, nombre, successeur, et de cinq propositions primitives :

1. 0 est un nombre.
2. Le successeur de tout nombre est un nombre.
3. Deux nombres différents n'ont pas le même successeur.
4. 0 n'est le successeur d'aucun nombre.
5. Toute propriété possédée par 0 et par le successeur de tout nombre est vraie de tous les nombres.

Cependant, pour Russell, le travail accompli par Peano est à compléter. Pour Peano et les axiomatistes, un système axiomatique constitue une définition, dite « par postulats », ou, selon l'expression de Poincaré, une définition « déguisée » des notions primitives introduites par le système. De telles définitions sont inacceptables pour les logicistes, notamment parce qu'elles n'assurent pas l'unicité de ce qui est défini. Un système axiomatique définit au contraire une infinité d'objets. Afin que les nombres satisfaisant aux axiomes de Peano soient *déterminés* et correspondent à nos nombres ordinaires, il faut, selon les logicistes, donner aux notions primitives une interprétation qui soit conforme à la réalité, c'est-à-dire leur donner un fondement logique :

> Nous désirons que « 0 », « nombre » et « successeur » aient une signification telle que nous ayons notre compte de doigts, nos deux yeux, notre nez, […] nous voulons que nos nombres soient *déterminés*, et ne se contentent pas de satisfaire certaines propriétés formelles. La théorie logique de l'arithmétique, elle, permet de définir une interprétation déterminée[18].

Le problème de Russell sera donc de faire accéder les notions primitives, puis les propositions primitives, considérées dans un premier temps comme simples principes, au statut de définitions, c'est-à-dire de leur donner un contenu déterminé. Ceci concerne notamment la 5e proposition de Peano, le principe d'induction :

> La clé du problème, c'est l'induction mathématique. Souvenons-nous qu'au chapitre premier, c'était là le contenu de la cinquième proposition primitive concernant les nombres naturels : si une propriété appartient à 0, ainsi qu'au successeur de tout nombre qui la possède, elle appartient à tout nombre. Nous l'avons présentée comme un principe, nous allons maintenant en faire une définition[19].

18. Russell, 1919, trad., p. 47-48.
19. *Ibid*, p. 70.

À cette fin, Russell définit les notions de propriété et de classe héréditaires, de propriété et de classe inductives, et de postérité.

> On dit qu'une propriété est « héréditaire » dans la suite des nombres naturels, si, quand elle appartient à un nombre n, elle appartient aussi au successeur de n, $n + 1$. Une classe est dite de même « héréditaire », lorsque, si n appartient à cette classe, il en est de même pour $n + 1$. [...] On dit qu'une propriété est « inductive » quand elle est héréditaire et appartient à 0. Une classe est dite de même « inductive » lorsqu'elle est héréditaire et contient 0. [...] On définit la « postérité » d'un nombre naturel donné, par rapport à la relation « prédécesseur immédiat » (la converse de la relation « successeur »), comme la totalité des objets qui appartiennent à toute classe héréditaire contenant ce nombre[20].

À partir de ces définitions, dont il donne ensuite des énoncés plus généraux en les appliquant à une relation R quelconque, Russell peut définir les nombres naturels comme « la postérité de 0 pour la relation "prédécesseur immédiat" ». Il s'ensuit d'abord une réduction du nombre des notions primitives de trois à deux (la notion de nombre découle des deux autres), et du nombre des propositions primitives de cinq à trois (la première, affirmant que 0 est un nombre, et la dernière, le principe d'induction, sont conséquences de la définition précédente des nombres naturels). Russell donne ensuite des définitions logiques des deux notions primitives, 0 et successeur, puis démontre les trois propositions primitives restantes. Ainsi, pour Russell, l'induction mathématique, de principe devient *définition* ; elle n'est plus liée à des notions primitives considérées comme indéfinissables et susceptibles d'une infinité d'interprétations, mais à des notions définies logiquement, et donc déterminées : la logique est *onto*-logique.

Ce sont ces thèses que Poincaré critiqua sévèrement dans deux articles parus dans la *Revue de métaphysique et de morale*, en 1905 et 1906, sous le titre « Les mathématiques et la logique[21] ». La critique de Poincaré visait aussi, en plus des travaux de Russell diffusés en France par Couturat, ceux de Peano et de Hilbert. En considérant le principe d'induction comme un principe intuitif, Poincaré s'opposait en effet à la fois aux points de vue axiomatiques, représentés par Peano et par Hilbert, et à la conception logiciste, représentée par Russell et Couturat. Nous verrons plus loin les divergences entre Poincaré et Hilbert.

Concernant la présentation axiomatique de Peano, Poincaré objecte que le principe d'induction qui y est introduit doit être considéré soit comme un axiome proprement dit, soit comme une définition par postulats. Le premier cas, selon Poincaré, fait appel à l'intuition, le second nécessite une preuve de non-contradiction. Si donc on veut véritablement ancrer

---

20. *Ibid.*, p. 71-72.
21. Voir Poincaré, 1905 et 1906.

l'arithmétique, et par suite toutes les disciplines mathématiques, dans la logique, il faudra démontrer la non-contradiction du système axiomatique de Peano. Or une telle démonstration est, selon Poincaré, aussi impossible qu'elle est nécessaire. En effet, elle exige de procéder soit « *par l'exemple* », en cherchant « à former un exemple d'un objet satisfaisant à la définition[22] », soit en établissant qu'on ne peut déduire, à partir des axiomes, deux propositions contradictoires. La première solution n'est pas toujours possible, la seconde implique l'utilisation du principe d'induction qu'il s'agit de définir, ce qui constitue un cercle vicieux. Sur cette critique du système de Peano, Russell est d'accord avec Poincaré ; nous avons vu qu'il juge ce système insuffisant ; l'amélioration qu'il propose évite le cercle vicieux évoqué par Poincaré. En effet, les définitions que Russell donne des notions et des propositions primitives de Peano ne sont pas des « définitions déguisées », des définitions par postulats, mais des définitions *directes*. Ce sont de « *véritables* définitions » qui assurent l'unicité des concepts mathématiques par leur réduction (logique et ontologique) à des idées logiques antérieurement admises et qui ne nécessitent donc pas une démonstration de non-contradiction.

Une deuxième objection de Poincaré concerne le rapport du principe d'induction à la définition des nombres entiers. Pour Russell, le principe d'induction permet de définir la suite des nombres naturels. « Par l'expression "les nombres inductifs", écrit-il, nous désignerons l'ensemble jusqu'ici appelé "ensemble des nombres naturels". Dans la mesure où elle rappelle que la définition de l'ensemble utilise l'induction mathématique, l'expression "nombres inductifs" est préférable[23]. » Pour Poincaré, au contraire, la définition des nombres naturels précède le principe d'induction : « Un nombre peut-être défini par récurrence ; sur ce nombre, on peut raisonner par récurrence ; ce sont deux propositions distinctes. Le principe d'induction ne nous apprend pas que la première est vraie, il nous apprend que la première implique la seconde[24]. » Si, pour Poincaré, le principe d'induction ne peut entrer dans la définition des nombres naturels, c'est qu'une telle définition serait inévitablement circulaire. D'une manière plus générale, selon Poincaré, toute définition du nombre est nécessairement circulaire. « Il est impossible, dit-il, de donner une définition sans énoncer une phrase, et difficile d'énoncer une phrase sans y mettre un nom de nombre, ou au moins le mot plusieurs, ou au moins un mot au pluriel[25] ». Cette remarque est sans doute juste, mais elle ne constitue pas, nous semble-t-il, une critique valable des définitions logicistes. Ce ne sont pas en effet ces définitions qui sont circulaires, mais leur traduction dans un lan-

22. Poincaré, 1905, p. 819.
23. Russell, 1919 ; trad. franç., p. 79.
24. Poincaré, 1905, p. 835.
25. *Ibid.*, p. 821.

gage courant inadéquat. Ainsi, la définition de zéro que donne Frege dans les *Grundlagen* — « 0 est le nombre cardinal qui appartient au concept non identique à soi-même[26] » —, après avoir défini le nombre cardinal qui appartient au concept *F* comme « l'extension du concept "équinumérique au concept *F*"[27] », nous paraît échapper à la critique de Poincaré. En effet, Frege lui-même montre que le terme « équinumérique » (*gleichzahlig*), qu'il définit par la correspondance biunivoque, ne suppose pas l'idée de nombre. Il prend l'exemple d'un maître d'hôtel qui voudrait s'assurer qu'il y a sur la table autant de couteaux que d'assiettes : « il n'a pas besoin, dit Frege, de compter les uns et les autres dès lors qu'il met un couteau à droite de chaque assiette, de sorte que chaque couteau soit sur la table à droite d'une assiette ». « Les assiettes et les couteaux, ajoute-t-il, sont dans une correspondance biunivoque parce qu'ils sont tous liés entre eux par le même rapport de position[28]. »

Une troisième objection faite par Poincaré nous paraît plus sérieuse. Il s'agit encore d'un cercle vicieux, mais qui concerne cette fois l'usage du mot « tous », lié à la considération de classes infinies :

> Le mot *tous* a un sens bien net quand il s'agit d'un nombre fini d'objets ; pour qu'il en eût encore un, quand les objets sont en nombre infini, il faudrait qu'il y eût un infini actuel. Autrement *tous* ces objets ne pourront pas être conçus comme posés antérieurement à leur définition et alors si la définition d'une notion *N* dépend de *tous* les objets *A*, elle peut être entachée de cercle vicieux, si parmi les objets *A* il y en a qu'on ne peut définir sans faire intervenir la notion *N* elle-même[29].

Et Poincaré note que dans la définition russellienne du principe d'induction le mot *tous* intervient :

> Appelons *classe récurrente* toute classe de nombres qui contient zéro, et qui contient $n + 1$ si elle contient n.
>
> Appelons *nombre inductif* tout nombre qui fait partie de *toutes* les classes récurrentes. [...]
>
> Un nombre inductif est celui qui appartient à *toutes* les classes récurrentes ; si nous voulons éviter un cercle vicieux nous devons entendre : *à toutes les classes récurrentes dans la définition desquelles n'intervient pas déjà la notion de nombre inductif*[30].

Russell reconnait la difficulté, en 1908, dans son article « Mathematical Logic as Based on the Theory of Types[31] ». Il écrit ainsi qu'« une affirmation concernant "toutes les propriétés de x" est toujours dénuée de

---

26. Frege, 1884, p. 87 ; trad. franç., p. 200.
27. *Ibid.*, p. 79-80 ; trad. franç., p. 194.
28. Frege, 1884, p. 81-82 ; trad. franç., p. 195-196.
29. Poincaré, 1906, p. 316.
30. *Ibid.*, p. 308-310.
31. Russell, 1908.

sens ». La nécessité de telles affirmations se manifestant dans de nombreux cas, et « tout spécialement en relation avec l'induction mathématique », Russell propose de remplacer « tous les » par « un quelconque ». Ainsi, poursuit-il, nous pouvons dire « une propriété quelconque, possédée par 0, et par le successeur de tout nombre qui la possède, est une propriété de tous les nombres finis », ce qui permet de définir le principe d'induction. Mais le problème persiste si l'on veut définir un nombre entier ; du principe d'induction énoncé précédemment, on ne peut en effet déduire qu'« un nombre fini est un nombre qui possède *toutes* les propriétés possédées par 0 et par le successeur de tout nombre qui les possède[32] ». « Si nous limitons la portée de cette affirmation aux propriétés des nombres du premier ordre, nous ne pouvons en inférer qu'elle vaut aussi pour les propriétés du deuxième ordre. Nous ne pourrons prouver, par exemple, que si m et n sont des nombres finis, $m + n$ est un nombre fini. » En effet, « m est un nombre fini » est, dans la théorie des types de Russell, une propriété du deuxième ordre, car elle enveloppe l'ensemble des propriétés inductives (qui sont du premier ordre). Pour résoudre la difficulté, Russell introduit un axiome, l'axiome de réductibilité, selon lequel « toute fonction propositionnelle est équivalente, pour toutes ses valeurs, à une certaine fonction prédicative », une fonction prédicative étant une fonction d'un ordre immédiatement supérieur à l'ordre de son argument[33]. Il suffit alors de remplacer, dans la définition d'un nombre fini, « toutes les propriétés » par « toutes les propriétés prédicatives ». Mais cette solution, comme le fait remarquer Poincaré en 1909, dans son article « La logique et l'infini », revient en fait à remplacer un principe par un axiome[34]. Qu'il y ait là un gain demande à être prouvé. Plus radicalement encore, Wittgenstein contesta le caractère logique de l'axiome de réductibilité et des deux autres axiomes que Russell avait dû introduire, l'axiome de l'infini et l'axiome

32. *Ibid.*, § 5, p. 80 ; trad. franç., p. 330.

33. Une fonction est dite d'ordre 1 si elle n'admet pour argument que des individus ; une fonction est d'ordre 2 si elle admet pour argument des fonctions d'ordre 1, et, éventuellement, des individus ; une fonction est d'ordre n si elle admet comme argument des fonctions d'ordre $n - 1$ et, éventuellement, des individus, des fonctions d'ordre 1, …, des fonctions d'ordre $n - 2$. Pour prendre un exemple, « x est courageux », « x est mortel » sont des fonctions du premier ordre, car elles ne mettent en cause que l'ensemble des individus susceptibles de constituer les valeurs de x, « x possède toutes les qualités d'un bon général », « x est un nombre » sont des fonctions d'ordre 2, car elles enveloppent l'ensemble des propriétés de premier ordre : pour la première : « être courageux », « être bon stratège », etc., pour la seconde : toutes les propriétés inductives. L'axiome de réduction permet de dire, dans le premier exemple, qu'il existe une qualité spécifique que possèdent tous les grands généraux, dans le second exemple, qu'il existe une fonction prédicative F, donc d'ordre 1, équivalente à « x est un nombre ». Cette fonction F étant d'ordre 1, on peut lui appliquer le principe d'induction (ce qui permet par exemple de démontrer que la somme de deux nombres entiers est un nombre entier).

34. Poincaré, 1909, p. 470.

multiplicatif. Il écrit ainsi dans une lettre à Russell : « [L'axiome de réductibilité] *n'est absolument pas une proposition logique*, de même que l'axiome de l'infini et l'axiome multiplicatif. *Si ces propositions sont vraies, elles sont ce que j'appellerai "accidentellement" vraies et non pas "essentiellement" vraies*[35] ». Selon Wittgenstein, seules les propositions « essentiellement » vraies, qu'il appelle des *tautologies*, c'est-à-dire les propositions dont la vérité ne dépend pas d'un état de choses dans un monde donné, sont des propositions logiques. Et l'axiome de réductibilité ne remplit pas, selon lui, cette condition nécessaire. Russell reconnut le bien-fondé de la critique wittgensteinnienne.

> Il y a une certaine noblesse d'attitude que le logicien doit préserver : il ne doit pas condescendre à tirer argument de ce qu'il voit autour de lui. De ce strict point de vue logique, je ne vois aucune raison de penser que l'axiome de réductibilité est une vérité logiquement nécessaire, ce qu'on veut dire lorsqu'on affirme qu'il est vrai dans tous les mondes possibles. C'est donc un défaut d'admettre cet axiome dans un système logique, quand bien même il serait empiriquement vrai[36].

Après des tentatives infructueuses, pour se passer de l'axiome de réductibilité, Russell, reconnut, très honnêtement, son échec, en 1925 :

> Il serait possible de sacrifier les suites bien ordonnées infinies à la rigueur logique, mais la théorie des nombres réels fait partie intégrante des mathématiques ordinaires, et peut difficilement faire l'objet d'un doute raisonnable. Nous sommes donc en droit de supposer qu'un axiome logique vrai justifiera cela. L'axiome requis peut être plus restreint que l'axiome de réductibilité mais, s'il en est ainsi, il reste à découvrir[37].

Le projet logiciste de réduction de l'arithmétique, et par suite de toute la mathématique, à la logique n'est ainsi qu'en partie réalisé. Le « poids » logique des notions et propositions primitives, qui doit se transmettre à toutes les disciplines scientifiques déduites de l'arithmétique, n'est pas tout à fait suffisant pour ancrer totalement ces disciplines dans la logique. La faute en revient aux classes infinies, source de paradoxes, dont l'évitement nécessite le recours à des principes non logiques (axiome de réductibilité, par exemple). La définition logiciste du principe d'induction ne parvient donc pas, malgré les amendements que lui a apportés Russell, à ébranler la conviction de Poincaré, ni à désarmer son ironie. Ce dernier conclura finalement le débat, en 1906, par ces mots : « La logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie »[38].

---

35. Wittgenstein, 1971, lettre de novembre 1913, p. 228.
36. Russell, 1919, p. 192-193 ; trad. franç., p. 353.
37. Russell, 1910-1913, 2e éd., 1925, § VII, p. XIV.
38. Poincaré, 1906, p. 316.

2. Le principe d'induction est-il démontrable ?

Nous avons vu que Poincaré reprochait à Peano de considérer le principe d'induction comme une « définition déguisée » du nombre entier, c'est-à-dire comme une définition par postulats, sans fournir de preuve de la non-contradiction du système axiomatique. Il considérait une telle preuve à la fois comme nécessaire et comme impossible. Hilbert, qui avait abordé dès 1899 le problème du fondement de l'arithmétique, juste après ses *Grundlagen der Geometrie,* reprend l'idée péanienne d'un fondement axiomatique de l'arithmétique, mais partage avec Poincaré l'idée de la nécessité d'une preuve de non-contradiction du système axiomatique. Contrairement à Poincaré, il considère cependant une telle preuve comme possible et présente au Congrès des mathématiciens de 1904, à Heidelberg, l'ébauche d'une construction axiomatique de l'arithmétique et de la logique, ainsi que les premiers linéaments d'une preuve de non-contradiction de ce système. Hilbert reconnaît à Frege « le mérite d'avoir correctement saisi les propriétés essentielles du nombre entier et la signification du principe de l'induction complète[39] », mais pense pouvoir aller plus loin que son prédécesseur en évitant les difficultés qui avaient, finalement, fait échouer ce dernier. Alors que Frege, et à sa suite Russell, pensaient pouvoir trouver le fondement de l'arithmétique *dans* la logique, Hilbert va tenter une construction *simultanée* des lois de la logique et de l'arithmétique. Poincaré fit une analyse détaillée de la construction de Hilbert, suivant « pas à pas le développement de la pensée de Hilbert », dans son article *Les mathématiques et la logique* dont la première partie était consacrée à la logique de Russell.

Le présupposé de la doctrine logiciste, l'enracinement de la mathématique dans la logique, nous l'avons souligné, est corrélatif d'une objectivité accordée à celle-ci. Le but de l'entreprise logiciste est par conséquent de trouver le noyau logique objectif duquel toute la mathématique va découler, et de le déterminer avec précision, ce qui revient à établir les *définitions* des notions primitives. La définition a, en effet, pour Frege et pour Russell, une « légitimité objective[40] » ; elle « nous fait passer du domaine des possibles subjectifs à celui de la détermination objective[41] ». Pour Hilbert, au contraire, il n'y a pas d'objectivité logique. Vouloir cerner, en les définissant, les notions primitives est une entreprise stérile, car, dit-il, « à cet endroit, il n'y a rien, et tout se perd, devient confus et vague, dégénère en un jeu de cache-cache[42] ». L'objectivité, absente du fond logique, selon Hilbert, est donc à chercher ailleurs. Elle sera constituée, au

---

39. Hilbert, 1904, p. 175 ; trad. franç., p. 256.
40. Frege, 1884, p. 90 ; trad. franç, p. 203.
41. Frege, 1884, p. 93 ; trad. franç., p. 205.
42. Hilbert, lettre à Frege du 29 décembre 1899, dans Rivenc et Rouihlan, 1992, p. 226.

départ même de la démarche hilbertienne, par la donnée de certains objets primitifs. Au contraire de la méthode logiciste, qui est *analytique*, c'est-à-dire *régressive*, la méthode hilbertienne est *synthétique*, c'est-à-dire *constructive*. Partant d'éléments simples donnés dans l'intuition sensible et de principes premiers, elle se développe déductivement jusqu'aux conséquences. La recherche sur les fondements n'est pas pour Hilbert un but mais un moyen ; le but est la construction de l'édifice.

On comprend, dès ces premières remarques, que Poincaré est plus proche de Hilbert que de Russell ou Frege. Il partage avec Hilbert, par exemple, la conviction que la logique ne peut suffire à fonder l'arithmétique. Les deux mathématiciens se sont cependant opposés sur le statut du principe d'induction. Pour Poincaré, nous l'avons vu, ce principe est indémontrable, Hilbert, quant à lui, entendait bien en donner une démonstration.

Dans la critique qu'il fait de la construction de Hilbert, Poincaré note à deux reprises l'utilisation illicite du principe d'induction. Les commentateurs s'accordent en général pour donner raison à Poincaré. Examinons les termes de la controverse. Hilbert énonce d'abord les deux premiers axiomes, définissant l'égalité :

1. $x = x$
2. $x \equiv y$ e $w(x)$ I $w(y)$

Les conséquences de ces axiomes sont obtenues en remplaçant les indéterminées qui y figurent par des combinaisons des deux objets simples donnés au départ : 1 et $\equiv$, ces deux objets étant, par ailleurs, considérés comme simples signes dépourvus de sens. Hilbert observe qu'on ne peut obtenir, comme conséquences de ces axiomes, que des identités ; il en déduit qu'on ne peut pas obtenir de contradictions, c'est-à-dire d'assertions de la forme $a \wedge \bar{a}$ (a et non a). « Mais comment verra-t-on que toutes ces propositions sont des identités ? » objecte Poincaré. Et il poursuit ainsi :

> Considérons une série de conséquences déduites de nos axiomes, et arrêtons-nous à un certain stade de cette série ; si à ce stade, nous n'avons obtenu que des identités, nous pourrons vérifier qu'en appliquant à ces identités l'une quelconque des opérations permises par la logique, on n'en pourra déduire que de nouvelles identités.
> On en conclura qu'à aucun moment on ne pourra obtenir autre chose que des identités ; mais *raisonner ainsi, c'est faire de l'induction complète*[43].

La critique de Poincaré serait valable si le domaine considéré était un domaine fermé, déjà constitué. Ce qui n'est pas le cas. Hilbert, en effet, *construit progressivement* la classe des conséquences de ses axiomes. Pour cela, il commence par introduire dans cette classe les conséquences du premier axiome, qui est le principe d'identité. À partir de cet axiome, en

43. Poincaré, 1906, p. 20.

remplaçant l'indéterminée *x,* de chaque côté du signe =, par une même combinaison d'objets simples, on ne peut, bien évidemment, obtenir que des identités. À ce stade de la construction, Hilbert n'a donc, dans la classe d'assertions vraies qu'il constitue, que des identités. Le second axiome est une inférence dont la prémisse est la conjonction de $x = y$ et d'une assertion notée $w(x)$, symbolisant une combinaison quelconque contenant l'indéterminée x. Pour obtenir des conséquences non hypothétiques à partir de cette inférence, il faut d'une part remplacer les x par une même combinaison d'objets simples et le y par une (autre) combinaison d'objets simples, et d'autre part prendre pour $x = y$ et pour $w(x)$ des assertions vraies. Ces assertions sont à prendre dans le stock disponible des assertions vraies, qui, nous l'avons vu, sont toutes, à ce stade de la construction, des identités. Or le conséquent est de la même forme que la combinaison $w(x)$, et est donc aussi une identité, obtenue à partir de la précédente en remplaçant la combinaison prise pour x par celle prise pour y. Notons d'ailleurs que x et y sont nécessairement le même objet, puisque l'égalité $x = y$, pour être une assertion vraie, doit être aussi une identité. L'affirmation de Hilbert ne nécessite donc pas de démontrer, comme le pense Poincaré, qu'en appliquant à une identité des opérations logiques valides, on obtient encore une identité, mais elle consiste à *observer,* concernant le second axiome, que les seuls énoncés vrais possibles, obtenus comme conséquences, sont des identités.

Après cette première étape, Hilbert introduit trois nouveaux objets : *U* (infini, ensemble infini), *S* (successeur), *S*' (l'opération successeur) et pose trois nouveaux axiomes :

3. $S(U\ x) = U\ (S'x)$
4. $S(U\ x) = S(U\ y)$ I $U\ x = U\ y$
5. $\overline{S(U\ x) = U\ 1}$

Dans ces axiomes, les indéterminées désignent maintenant l'un quelconque des cinq objets simples fondamentaux ou l'une de leurs combinaisons. La combinaison *U x* désigne un *élément* de l'ensemble infini *U*. L'axiome 3 exprime que le successeur d'un élément de *U* est un élément de *U*. En effet, soit *x* un élément de *U,* alors $S(U\ x)$ est le successeur de *x;* c'est aussi un élément de *U,* à savoir $S'(x)$. L'axiome 4 exprime le fait que si deux éléments de l'ensemble *U* ont même successeur, alors ils sont égaux. L'axiome 5 exprime le fait qu'il n'existe aucun élément de *U* dont le successeur soit 1 ; cet élément 1 sera appelé en conséquence « le premier élément » de *U*. Ces axiomes sont respectivement les axiomes 3, 4 et 2 de Peano. Hilbert n'énonce pas l'axiome 1 de Peano, « 1 est un nombre[44] », ou

44. Peano fait en réalité commencer la suite des nombres à 0 (et non à 1 comme Hilbert) et énonce comme premier axiome « 0 est un nombre ». On sait que cela ne change rien de fondamental puisque la définition péanienne s'applique en fait à toute progression

estime qu'il est sous-entendu dans l'axiome 5 ; et il laisse de côté, pour le moment, l'axiome d'induction complète (axiome 5 de Peano). La démonstration de la non-contradiction des cinq premiers axiomes suit le même principe que la démonstration précédente. Hilbert souligne d'abord que seul le 5e axiome est de la forme $\bar{a}$ (non a) et que, par suite, une contradiction ne pourrait avoir lieu que si a (la négation du 5e axiome) était une conséquence des quatre premiers axiomes : on aurait alors la contradiction $a \wedge \bar{a}$ (a et non a). Afin de montrer l'impossibilité de cette contradiction, il introduit la notion d'équation *homogène :* une équation est dite homogène si elle comprend le même nombre de signes (d'objets simples) de part et d'autre du signe =. Hilbert observe que les conséquences des quatre premiers axiomes sont nécessairement des équations homogènes, alors que les conséquences de la négation du 5e axiome ne le sont pas : dans ce dernier, en remplaçant x par une combinaison d'objets simples, on aura à gauche du signe = au moins un signe de plus qu'à sa droite. On ne peut donc, selon Hilbert, obtenir la négation du 5e axiome comme conséquence des quatre autres.

Le raisonnement de Hilbert est pris en défaut par Poincaré au niveau de l'axiome 4 dans lequel intervient, comme précédemment, une implication. Dire, comme l'affirme implicitement Hilbert, que si l'hypothèse $S(U\ x) = S(U\ y)$ est une équation homogène, alors le conséquent $U\ x = U\ y$ est aussi une équation homogène nécessite, selon Poincaré, le recours au principe d'induction. Comme précédemment, la critique de Poincaré serait valable si la classe des assertions vraies considérée par Hilbert était déjà constituée, ce qui n'est pas le cas. Ainsi dans l'axiome 4, qui, selon Poincaré, pose problème, les seules prémisses vraies pouvant être considérées sont nécessairement des équations homogènes. Il n'est pas besoin de vérification ou de démonstration de ce fait : cela vient de ce que les seuls énoncés vrais reconnus à ce stade de la construction de Hilbert sont les conséquences des trois premiers axiomes, lesquelles sont des équations homogènes. Il suit de là, *par simple considération morphologique*, que les conséquences de l'axiome 4 sont aussi des équations homogènes. En effet, si $U\ x = U\ y$ est une équation homogène (c'est-à-dire si x et y sont constitués par le même nombre d'objets simples), alors l'écriture de $S(U\ x)$ et celle de $S(U\ y)$ contiendront aussi le même nombre d'objets simples. Hilbert prouve ainsi, par des considérations purement morphologiques et donc sans utiliser le principe d'induction, contrairement à ce qu'affirme Poincaré, que l'on ne peut trouver parmi les conséquences des quatre premiers axiomes une assertion contredisant le cinquième.

Cependant, la preuve de non-contradiction de la théorie entière, dans la construction de 1904, est seulement ébauchée par Hilbert ; elle deviendrait beaucoup plus difficile par la suite. Plus encore, on sait aujourd'hui

---

(autrement dit, la définition axiomatique définit non pas un ensemble de nombres, mais une classe d'ensembles). C'est d'ailleurs le reproche que lui adresse Russell (voir plus haut).

qu'une telle preuve « directe », c'est-à-dire purement syntaxique, de non-contradiction de l'arithmétique n'est pas possible. Seules sont possibles des preuves « par modèle », qui consistent à ramener la non-contradiction d'une théorie formalisée, à celle d'un modèle de cette théorie. Ainsi, la théorie de la démonstration ramènera la non-contradiction de l'arithmétique axiomatisée à celle, supposée, de l'arithmétique « intuitive ». De plus, les premières tentatives qui ont été faites, par Ackermann, Herbrand, von Newmann et Hilbert lui-même, entre 1924 et 1932, pour démontrer la non-contradiction de l'arithmétique par l'intermédiaire d'un modèle ont été vouées à l'échec. Ces tentatives entendaient en effet, conformément aux exigences du programme hilbertien, n'utiliser que des moyens strictement finitistes. Or, Gödel prouvait en 1932 qu'il est impossible de démontrer la non-contradiction de l'arithmétique formalisée à l'intérieur de ce système et donc a fortiori par des moyens strictement finitistes. Les tentatives finitistes de démonstration ne parvenaient ainsi qu'à démontrer la non-contradiction d'une partie seulement de l'arithmétique, ne contenant qu'une forme affaiblie du principe d'induction. Conformément au théorème de Gödel, il faut donc élargir le point de vue finitiste ; on peut alors concevoir des démonstrations utilisant des procédés constructifs, non formalisables dans le système de la théorie (Gödel, Kolmogorov et Gentzen ont donné des démonstrations de ce type). Une preuve de non-contradiction de l'arithmétique est donc possible, mais pas avec des moyens strictement arithmétiques.

Concernant le principe d'induction, ce n'est qu'en 1927 que Hilbert répond aux objections de Poincaré. Sa réponse consiste en la distinction de deux types d'induction : une induction intuitive, qui repose sur un procédé de composition et de décomposition des nombres, et l'induction proprement dite, qui repose sur un principe purement formel, l'axiome d'induction. Ce principe formel apparaît dans la mathématique formalisée de Hilbert comme un axiome dont la compatibilité avec les autres axiomes doit être assurée par une métamathématique dans laquelle peut éventuellement intervenir le principe intuitif. Remarquons que Hermann Weyl a identifié, à tort, le principe d'induction de Poincaré et le procédé intuitif d'induction de Hilbert ; il écrit ainsi : « Lorsque Poincaré qualifia l'*induction complète* de fondement ultime de la pensée mathématique et irréductible à quoi que ce soit de plus primitif, il pensait à la composition et à la décomposition des chiffres qui s'effectuent très intuitivement, et dont Hilbert use aussi dans ses constructions contentuelles »[45]. Le principe énoncé par Poincaré ne se réduit cependant pas à une induction finie ; Poincaré souligne au contraire que le mérite de ce principe est de permettre le passage du fini à l'infini.

45. Weyl, p. 1928 ; trad. franç., p. 166.

Conclusion

Il faut finalement souligner que chacun des interlocuteurs du débat que nous avons évoqué a permis d'élucider une question difficile. L'un des mérites de Frege et Russell fut de généraliser le principe d'induction et d'en donner une définition purement logique. Celui de Hilbert fut d'amorcer une démonstration de ce principe, qu'il jugea lui-même par la suite inaboutie et insuffisante, mais qui marqua la naissance de la théorie de la démonstration ou métamathématique. Quant à Poincaré, son rôle critique fut essentiel. Il inspira à Russell son « principe du cercle vicieux », contribua à l'élaboration de la métamathématique de Hilbert, et fut notamment à l'origine du dédoublement, effectué par Hilbert, du principe d'induction en un principe intuitif et un principe formel.

Pour revenir aux deux principales questions qui se posent à propos du principe d'induction, nous pouvons à présent donner des éléments de réponse. Concernant la possibilité d'une démonstration de ce principe, on peut répondre : oui, le principe est démontrable, mais pas à partir de n'importe quels autres principes ou axiomes. Nous avons vu que l'exigence strictement finitiste que Hilbert pensait dans un premier temps pouvoir imposer ne suffit pas, et qu'il faut des moyens plus puissants. Quant à la question de savoir si le principe d'induction est un principe logique ou un principe intuitif, nous avons déjà souligné que Hilbert distinguait deux principes, l'un intuitif, l'autre formel. On comprend alors la réponse prudente de Zermelo. Ce dernier ayant démontré diverses formes du principe d'induction dans le cadre de sa théorie des ensembles, et l'ayant ainsi « réduit à la définition des ensembles finis » qu'il y a donnée, ou à « une des définitions équivalentes », pose la question : « Mais en résulte-t-il que le principe en question soit un jugement analytique ? » Ce à quoi il répond lui-même : « Cela dépend de la nature des axiomes sur lesquels repose la théorie des ensembles et que nous avons été contraints d'utiliser dans chacune de nos démonstrations. Si ces axiomes, que je me propose d'énoncer complètement dans un autre article, ne sont que des principes purement logiques, le principe de l'induction le sera également ; si au contraire ils sont des intuitions d'une sorte spéciale, on peut continuer à regarder le principe d'induction comme un effet de l'intuition ou comme un "jugement synthétique *a priori*". Quant à moi, je n'oserais pour le moment, décider de cette question purement philosophique[46]. » Nous ajouterons à la réponse de Zermelo, que cette question purement philosophique a cependant eu le mérite, par la recherche d'un fondement purement logique du principe d'induction, de conduire à la construction d'axiomatiques de plus en plus satisfaisantes.

---

46. Zermelo, « Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète », 1907, dans Heinzmann, 1986, p. 155.

Bibliographie

Frege, Gottlob, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle, Nebert, 1879 ; trad. anglaise dans Heijenoort, 1967.

Frege, Gottlob, *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, W. Koebner, 1884 ; trad. franç. et introduction de C. Imbert, Paris, Seuil, 1972.

Frege, Gottlob, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, vol. 1, Iéna, 1893 ; rééd. Heildesheim, Olms, 1962.

Frege, Gottlob, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet,* vol. 2, 1903, trad. anglaise et introduction de M. Furth, Berkeley et Los Angeles, University of California Press, 1964.

Heijnoort, Jeanvan, *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic*, textes choisis par J. van Heijenoort, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1879-1931.

Heinzmann, Gerhard, *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion sur les fondements des mathématiques,* Paris, Blanchard, 1986.

Hilbert, David, « Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik », *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker Kongress in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, Leipzig, Teubner, 1905, trad. franç. par É. Boutroux dans *L'Enseignement mathématique*, 7e année, 1905 ; nouvelle trad. franç. par H. Sinaceur dans Rivenc et Rouihlan, 1992, Paris, Payot.

Kant, Emmanuel, *Critique de la raison pure*, 1781, trad. franç. dans *Œuvres philosophiques*, Paris, Gallimard, coll. « La Pléiade », 1980.

Largeault, Jean, *Intuitionisme et théorie de la démonstration,* Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, coll. « Mathesis », 1992.

Poincaré, Henri, *La Science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, 1902.

Poincaré, Henri, « Les mathématiques et la logique », *Revue de métaphysique et de morale*, 1905, vol. 13, p. 815-835 ; reproduit dans Heinzmann, 1986, p. 11-34.

Poincaré, Henri, *La Valeur de la science*, Paris, Flammarion, 1905.

Poincaré, Henri, « Les mathématiques et la logique », *Revue de métaphysique et de morale*, 1906, vol. 14, p. 17-34 et 294-317 ; reproduit dans Heinzmann, 1986, p. 35-53.

Poincaré, Henri, « À propos de la logistique », *Revue de métaphysique et de morale*, vol. 14, p. 866-868 ; reproduit dans Heinzmann 1986, p. 145-147.

Poincaré, Henri, « La logique de l'infini », *Revue de métaphysique et de morale*, 1909, vol. 17, p. 461-482 ; reproduit dans Heinzmann, 1986, p. 235-256.

Rivenc, François et Philippe de Rouihlan, *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914),* Paris, Payot, 1992.

Russell, Bertrand, *Principles of Mathematics*, Londres, Allen et Unwin LTD, 1903 ; trad. franç. dans Russell, *Écrits de logique philosophique*, Paris, Presses Universitaires de France, 1989.

Russell, Bertrand, « Mathematical Logic as based on the Theory of Types », *American Journal of Mathematics*, 1908, vol. 20, p. 222-262 ; trad. franç. dans Rivenc et Rouihlan, 1992.

Russell, Bertrand et Alfred North Whitehead, *Principia Mathematica*, Cambridge, Cambridge University Press, 1910-1913.

Russell, Bertrand, « Le réalisme analytique », *Bulletin de la Société française de philosophie,* 1911, t. 11 ; repris dans Heinzmann, 1986, p. 296-304.

Russell, Bertrand, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres, Allen and Urwin, 1919 ; trad. franç. de J.M. Roy, Paris, Payot, 1991.

Weyl, Hermann, « Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik », *Abh. aus dem Math. Sem. D. Hamb. Univ.,* 6, 1928, p. 86-88, trad. in Largeault 1992.

Wittgenstein, Ludwig, *Carnets*, trad. franç. de G.-G. Granger, Paris, Gallimard, 1971.

Zermelo, Ernst, « Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète », 1907, *Acta mathematica*, 1909, vol. 32, p. 185-193 ; Heinzmann, 1986, p. 148-156.