Nouveaux cahiers de la recherche en éducation

Un modèle épistémologique de référence pour la recherche sur l'algèbre élémentaire
An epistemological reference model for primary-level algebra research
Un modelo epistemológico de referencia para la investigación del álgebra elemental

Noemí Ruiz-Munzón, Marianna Bosch et Josep Gascón

Volume 22, numéro 1, 2020

Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (Vol. 2)

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1070027ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1070027ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke

ISSN

1911-8805 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2020). Un modèle épistémologique de référence pour la recherche sur l'algèbre élémentaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *22*(1), 123–144. https://doi.org/10.7202/1070027ar

Résumé de l'article

La théorie anthropologique du didactique attribue un rôle déterminant au questionnement du savoir mathématique et propose comme outil d'analyse l'élaboration de modèles épistémologiques de référence (MER). Nous présentons un MER du développement de l'algèbre scolaire qui s'inscrit dans un modèle plus large permettant d'articuler l'arithmétique, l'algèbre, les nombres relatifs, la modélisation fonctionnelle et le calcul différentiel. Ce modèle prend comme point de départ les « programmes de calcul » et considère l'algèbre comme un processus de modélisation structuré en trois étapes. Nous illustrons sa potentialité pour la création et l'analyse de séquences didactiques dans la première étape du processus d'algébrisation.

Nouveaux cahiers de la recherche en éducation
Vol. 22, nº 1, 2020

Un modèle épistémologique de référence pour la recherche sur l'algèbre élémentaire

Noemí Ruiz-Munzón
Universitat Pompeu Fabra
Marianna Bosch
Universitat Ramon Llull
Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona

Résumé
La théorie anthropologique du didactique attribue un rôle déterminant au questionnement du savoir mathématique et propose comme outil d'analyse l'élaboration de modèles épistémologiques de référence (MER). Nous présentons un MER du développement de l'algèbre scolaire qui s'inscrit dans un modèle plus large permettant d'articuler l'arithmétique, l'algèbre, les nombres relatifs, la modélisation fonctionnelle et le calcul différentiel. Ce modèle prend comme point de départ les «programmes de calcul» et considère l'algèbre comme un processus de modélisation structuré en trois étapes. Nous illustrons sa potentialité pour la création et l'analyse de séquences didactiques dans la première étape du processus d'algébrisation.

Mots-clés : théorie anthropologique du didactique, modèle épistémologique de référence, processus d'algébrisation, programmes de calcul, jeux de mathémagie

Remerciements

Travail réalisé avec le support du projet de recherche RTI2018-101153-B-C21 (MCIU/AEI/FEDER, UE) du gouvernement de l'Espagne.

An epistemological reference model for primary-level algebra research

Abstract

The anthropological theory of the didactic sets out the questioning of mathematical knowledge as playing a decisive role, and proposes the development of reference epistemological models (REMs) as an analytical tool. We present a REM of the development of school algebra that fits into a broader model connecting arithmetic, algebra, relative numbers, functional modeling and differential calculus. This model takes "calculation programs" as a starting point, viewing algebra as a structured modeling process in three stages. We illustrate the potential of this model for creating and analyzing didactic sequences in the first stage of the algebrization process.

Keywords: algebrization process, anthropological theory of didactics, calculation programs of computation, epistemological reference model, mathemagic games

Un modelo epistemológico de referencia para la investigación del álgebra elemental

Resumen

La teoría antropológica de lo didáctico atribuye un rol determinante al cuestionamiento del conocimiento matemático y propone como herramienta de análisis la elaboración de modelos epistemológicos de referencia (MER). Presentamos un MER del desarrollo del álgebra escolar que forma parte de un modelo más amplio que permite articular la aritmética, el álgebra, los números relativos, la modelización funcional y el cálculo diferencial. Este modelo toma como punto de partida los "programas de cálculo" y considera el álgebra como un proceso de modelización estructurado en tres etapas. Ilustramos su potencial para la creación y análisis de secuencias didácticas en el primer paso del proceso de algebrización.

Palabras clave: teoría antropológica de lo didáctico, modelo epistemológico de referencia, proceso algebraico, programas de cálculo, juegos de *matemagia*

1. Introduction

Dans ce travail nous présentons la première phase d'une méthode de recherche qui s'inscrit dans la théorie anthropologique du didactique (TAD) appliquée au problème didactique de l'algèbre élémentaire. Cette méthode part du questionnement de ce que l'on entend par «algèbre élémentaire» et ce que l'on enseigne à ce propos dans l'institution de référence – dans notre cas, l'enseignement secondaire obligatoire en Espagne. Ce questionnement est issu de l'analyse des processus transpositifs qui ont conditionné l'état actuel de l'algèbre scolaire et les conséquences didactiques qui en découlent (Chevallard, 1985b; Chevallard et Bosch, 2012). Il conduit à se demander quel est le modèle épistémologique dominant dans cette institution (Bolea, Bosch et Gascón, 1999, 2001, 2004). Pour répondre à cette question, nous avons été conduits à créer un modèle de l'algèbre construit depuis la recherche, c'est-à-dire un système de référence qui permette de prendre en compte les faits didactiques qui émergent dans l'institution considérée, et de proposer des processus d'étude qui permettent de dépasser certaines des limitations présentes dans les organisations mathématiques scolaires analysées. C'est là le rôle du modèle épistémologique de référence (MER), un instrument d'analyse élaboré pour expliquer ces limitations et mettre en évidence les phénomènes qui en découlent.

En tant que modèle, un MER est nécessairement réducteur de la réalité qu'il vise à étudier. Il est aussi provisoire, car régulièrement soumis à la confrontation avec cette réalité et avec d'autres modèles alternatifs possibles. Sa puissance explicative et productrice – de phénomènes didactiques nouveaux et de séquences didactiques associées – est ce qui en mesure la qualité. Dans le cas de l'algèbre élémentaire, ce MER, que nous décrivons dans les sections qui suivent, permet en particulier de mettre en évidence des obstacles didactiques engendrés par: l'algébrisation abrupte des organisations mathématiques dans la dernière étape de l'enseignement secondaire (Bolea, Bosch et Gascón, 2001); la considération des nombres négatifs comme objets arithmétiques (Cid, 2016); et la désarticulation entre l'algèbre scolaire et la modélisation fonctionnelle (Ruiz-Munzón, 2010).

Les phases suivantes de la méthode de recherche que nous proposons consistent à créer, expérimenter et analyser un *parcours d'étude et de recherche* (Chevallard, 2005) qui s'appuie sur ce MER. Ce processus permet de mettre à l'épreuve, valider et faire évoluer le MER qui donnera lieu à un développement du premier parcours d'étude et de recherche (PER), dans un processus cyclique. L'objectif premier de ce travail consiste à décrire la première phase de cette méthode de recherche introduite par Ruiz-Munzón (2010) et à poser quelques éléments d'un possible PER pour l'introduction de l'algèbre élémentaire.

2. Recherche en didactique et modèles épistémologiques de référence

La mise en évidence des processus de transposition didactique (Chevallard, 1985a) montre que les contenus, mathématiques ou autres, qui sont au cœur du questionnement didactique ne peuvent pas être pris comme une donnée. Les questions sur la nature et la fonction des différents éléments des mathématiques à enseigner constituent, en ce sens, un élément incontournable de l'analyse didactique. Qu'est-ce que l'algèbre que l'on enseigne ou que l'on est censé enseigner au secondaire? De quoi est-elle faite? À quoi sert-elle?

Les différentes institutions qui participent au processus didactique proposent des réponses plus ou moins explicites à ces questions, dans un découpage des mathématiques curriculaires qui peut varier selon le pays, le niveau éducatif et la période historique, mais qui comporte toutefois des invariants, tout particulièrement dans la dénomination des contenus. Il y aura souvent dans l'algèbre scolaire, par exemple, le travail avec des expressions alphanumériques (ou expressions algébriques, justement), la factorisation et le développement de ces expressions, la résolution d'équations et d'inéquations du premier et second degrés à une variable. L'inclusion de paramètres, la manipulation de formules, l'interprétation en termes fonctionnels des expressions algébriques sont des éléments plus erratiques, ainsi que le lien entre l'algèbre et les nombres entiers, la mesure des grandeurs ou la géométrie.

Dans la perspective de la TAD, et devant un problème didactique lié à un certain domaine mathématique, le chercheur doit prendre comme objet premier d'étude le modèle épistémologique dominant de l'institution dans laquelle il étudie un contenu (comment celui-ci est délimité, défini, utilisé, valorisé, etc.), pour éviter de l'assumer de manière non critique. Ce modèle est un composant principal du rapport institutionnel au domaine étudié et, de ce fait, intervient dans la construction des rapports personnels des sujets de l'institution. Ne pas l'assumer comme sien mais, au contraire, se donner des outils pour le questionner est un geste fondamental de l'émancipation épistémologique du didacticien et de la science didactique (Chevallard, 2007).

D'une manière plus générale, le besoin pour la recherche en didactique d'élaborer ses propres découpages et reconstructions du savoir à enseigner constitue ce que nous avons appelé les «modèles épistémologiques de référence» (Bosch et Gascón, 2005). Ceux-ci permettent d'expliciter la perspective adoptée sur le thème, secteur ou domaine concerné dans le processus didactique en question. Ils déterminent, entre autres, l'ampleur du champ mathématique dans lequel on situe les problèmes de recherche, les phénomènes qui se rendent visibles et les explications provisoires apportées. Les «modèles» doivent s'entendre au sens scientifique du terme: ils fonctionnement comme des hypothèses de travail, et sont soumis à révision et développements permanents à partir des éléments empiriques auxquels on les confronte.

Pour comprendre la nature provisoire des modèles épistémologiques de référence (MER), il faut rappeler que leur fonction n'est pas uniquement de redéfinir un domaine mathématique dans des termes propres à la recherche. Un MER représente aussi une tentative de réponse à des questions de recherche à propos de la structure et de la dynamique du domaine considéré, ainsi que sur les rapports entre ce domaine et d'autres contenus d'enseignement (Gascón, 2014).

Dans la TAD, les MER se formulent en termes de séquences ou d'arborescences de praxéologies (Bosch et Gascón, 2005). La notion de praxéologie sert de cadre général pour modéliser les activités humaines ainsi que les savoirs et connaissances utilisés et engendrés par ces activités. Les praxéologies sont formés par deux blocs inséparables: la *praxis*, pratique ou savoir-faire (intégrant des types de tâches et des techniques pour les réaliser) et le *logos*, théorie ou savoir, qui constitue un discours descriptif, explicatif, justificatif et organisateur de la *praxis*. Dans les blocs du *logos*, on distingue un premier niveau de description appelé «technologie» (le *logos* de la technè) et un second niveau, la «théorie» proprement dite, qui contient les fondements de la technologie. Les praxéologies sont ainsi formées par des types de tâches plus ou moins articulées, des techniques pour les effectuer, des discours technologiques pour décrire, expliquer, engendrer, justifier et organiser les techniques et types de tâches, et des éléments théoriques (notions, principes, hypothèses, croyances, etc.) qui alimentent les technologies et apportent un dernier niveau d'explication et de justification de la *praxis* et de la technologie. Les praxéologies sont des entités dynamiques: la mise en œuvre de techniques sous différentes conditions soulève souvent des questions (Peut-on faire autrement?) et engendre de nouveaux besoins techniques et technologiques (Comment faire? Est-ce que cela marche? Pourquoi?), ce qui produit l'émergence de nouvelles tâches problématiques et l'élaboration de nouveaux éléments praxéologiques pour les accomplir.

Bien que la notion de MER provienne de la TAD, d'autres approches en didactique utilisent des constructions théoriques analogues, même si elles reçoivent d'autres noms ou restent parfois implicites. Un cas bien connu est celui de la notion de situation fondamentale en théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) qui permet de modéliser les connaissances en matière de jeu contre un milieu. Mais on peut citer d'autres exemples, comme la théorie des champs conceptuels qui utilise des triplets de situations, invariants opératoires et signifiants pour décrire les concepts (Vergnaud, 1991); la théorie APOS et la notion de décomposition génétique d'un concept (Dubinsky et McDonald, 2002); la théorie de l'abstraction en contexte et les actions épistémiques RBC+C (*recognizing*, *building*, *constructing*, *consolidating*) (Dreyfus, Hershkowitz et Schwarz, 2001); etc.

Les modèles épistémologiques de référence construits dans la TAD possèdent des caractéristiques particulières. Tout d'abord, les données empiriques utilisées ne proviennent pas uniquement du système d'enseignement et de son entourage, mais incluent des matériaux des différentes institutions qui participent du processus de transposition didactique sur différentes périodes temporelles: l'école et sa noosphère, les mathématiques savantes, les disciplines qui interagissent avec les mathématiques, etc. Par exemple, dans le cas qui nous occupe, il est très important de prendre en considération l'organisation curriculaire antérieure aux mathématiques modernes, où l'algèbre constituait l'un des principaux blocs de contenus à enseigner, à côté de l'arithmétique et la géométrie.

Une autre caractéristique des MER est qu'ils n'incorporent pas initialement l'idiosynchrasie des possibles acteurs des processus didactiques ni des conditions particulières d'organiser l'enseignement. Ces aspects y sont intégrés ultérieurement en tant que possibles conditions pour la mise en place des processus didactiques. Toutefois, étant donné que les modèles se spécifient en termes de praxéologies, ils incluent des activités concrètes qui peuvent être regardées comme des raisons d'être du contenu mathématique étudié et donc justifier son besoin sous certaines conditions données. D'où le fait qu'ils incorporent une certaine notion, non pas de sujet mais de positions de référence relatives aux institutions considérées.

Finalement, il est important de noter que les MER construits correspondent à des organisations mathématiques relativement larges et interconnectées, afin de pouvoir incorporer des raisons d'être non artificielles qui les motivent et les rendent fonctionnelles. Ainsi, on ne parlera pas, par exemple, du MER des équations du premier degré ou de la distributivité, mais du MER de l'algèbre élémentaire ou de la modélisation algébrico-fonctionnelle (Ruiz-Munzón, 2010), ce qui supposera, en outre, l'existence d'un MER sur l'arithmétique élémentaire et préconisera un MER sur la modélisation fonctionnelle et le calcul différentiel (Fonseca, Gascón et Lucas, 2014).

3. Un modèle épistémologique de référence pour l'algèbre élémentaire

Dans le cas de l'algèbre élémentaire, le MER que nous proposons s'appuie sur un grand nombre de recherches antérieures dans le cadre de la TAD, qui va des premières études sur la transposition didactique, la notion de modélisation et l'écologie des savoirs (Chevallard, 1985b, 1989, 1990; Assude, 1992; Gascón, 1994-1995, 1999), jusqu'aux développements plus récents en matière de praxéologies, objets ostensifs, programmes de calcul, parcours et activités d'étude et de recherche (Ruiz-Munzón, 2010; Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch et Gascón, 2012).

L'algèbre élémentaire y est interprétée comme un processus d'algébrisation de praxéologies mathématiques déjà disponibles ou de praxéologies non mathématiques facilement mathématisables en termes d'opérations sur des grandeurs numériques ou géométriques (Bolea, Bosch et Gascón, 2001). Ce processus d'algébrisation est un outil de modélisation qui finit par affecter les praxéologies de tous les secteurs des mathématiques. En ce sens, l'algèbre nous apparaît à un niveau différent des autres praxéologies enseignées à l'école, comme celles de l'arithmétique, la géométrie ou les statistiques, car elle constitue un instrument de modélisation de la plupart des praxéologies mathématiques (Bolea, Bosch et Gascón, 1998, 2004). Elle apparaît aussi comme un instrument à la fois théorique et pratique, qui élargit la capacité à résoudre des problèmes ainsi que les possibilités de questionnement, explication et réorganisation de savoirs déjà élaborés. Un exemple éclairant du rôle théorique de l'algèbre serait, par exemple, le fait de définir par le biais d'équations simples comme $a + b = x$, $a + x = c$ et $x + b = c$ le champ des problèmes additifs à une opération. L'algèbre n'est donc pas uniquement un instrument puissant pour aborder des problèmes qui apparaissent dans divers domaines des mathématiques scolaires (tout particulièrement, l'arithmétique et la géométrie) et qui sont très coûteux ou ne peuvent se résoudre en restant dans ces domaines (niveau de la *praxis*). Elle permet aussi de fournir des descriptions des types de problèmes abordés et des techniques utilisées pour les résoudre (niveau du *logos*).

Cette double puissance, à la fois pratique et théorique, c'est ce qui permet de définir l'algèbre élémentaire comme une «arithmétique généralisée»: l'algèbre permet d'étudier des relations entre objets indépendamment de la nature des objets, ce qui conduit à des descriptions et solutions «généralisées» de tout un type de problèmes, au lieu de réponses concrètes à des problèmes isolés, comme c'est le cas en arithmétique.

Le processus d'algébrisation peut se réaliser de différentes manières et en différents degrés. Nous avons ainsi défini quatre indicateurs du degré d'algébrisation d'une praxéologie mathématique (Bolea, Bosch et Gascón, 2001) qui correspondent à:

1. La possibilité de décrire et manipuler la structure globale des types de problèmes abordés;
2. La possibilité d'«objectiver» ou «thématiser» les techniques mathématiques utilisées, afin de mieux les décrire, questionner et développer;
3. L'unification et réduction ostensive des types de problèmes, des techniques et des technologies qui tendent à concentrer les outils sémiotiques utilisés dans le registre de l'écriture (Bosch et Chevallard, 1999);
4. L'émergence de nouveaux problèmes indépendants des systèmes modélisés.

Ces niveaux ont été utilisés pour mettre en évidence, en particulier, en quel sens on peut considérer que les mathématiques du collège ne sont que très partiellement algébrisées, alors qu'il se produit une algébrisation abrupte dès qu'on aborde les mathématiques de niveau supérieur (Bolea, Bosch et Gascón, 2001). Les indicateurs du degré d'algébrisation permettent d'identifier des contraintes transpositives mais ne nous semblent pas suffisamment opératoires pour créer, expérimenter et analyser des processus d'introduction de l'algèbre élémentaire. Voilà pourquoi une construction explicite d'un MER alternatif à l'arithmétique généralisée, et cohérente avec ces indicateurs, nous semble nécessaire.

3.1 Programmes de calcul et première étape du processus d'algébrisation

Dans cette perspective, l'introduction de l'algèbre comme instrument de modélisation requiert d'une construction première celle du système que l'on va modéliser. En d'autres termes, il faut un amalgame de praxéologies qui puisse fonctionner comme milieu (au sens de la TSD) et qui soit suffisamment riche pour engendrer, lorsque le processus de modélisation se met en place, les différentes entités essentielles au fonctionnement de l'instrument. Autrement dit, il faut partir d'un système à modéliser que l'on puisse faire varier de manière simple pour que les modèles à construire incluent les différents éléments de la modélisation algébrique: notions d'expression algébrique, d'inconnue, de paramètre; techniques de manipulation des expressions algébriques; différence entre identité, équation, inéquation, et formule; etc.

Dans le modèle que nous proposons, le système de départ est l'ensemble de ce que nous appellerons, à la suite de Chevallard (2002, 2007), des «programmes de calcul» (PC). Un PC est formé par une suite d'opérations avec des quantités ou des nombres pouvant s'effectuer l'une après l'autre et qui finit toujours par un résultat numérique concret. On peut les désigner par l'expression $PC(a_1, a_2... a_n)$ où $a_1, a_2... a_n$ sont les quantités à opérer (ou «arguments» du PC). Les problèmes traditionnels de l'arithmétique élémentaire se résolvent par le biais de la description verbale ou graphique d'un PC et son effectuation (souvent réalisée en même temps que la verbalisation du PC). L'habitude scolaire est toutefois de réduire les PC à des suites de PC à deux arguments et une opération, le résultat de l'un étant utilisé comme argument du suivant. On peut donc dire, de manière duale, que le système de départ est formé par les problèmes arithmétiques définis comme ceux qui peuvent se résoudre à partir de l'exécution d'un PC.

Un exemple de problème arithmétique, que nous formulerons ici dans sa forme plus simple comme l'exécution directe d'un PC, serait le suivant:

> P_0: Gabriel pense à un nombre, il lui ajoute 6, divise le résultat par 2, ajoute 1 et multiplie le tout par 4. Si le résultat qu'il obtient est 36, quel est le nombre auquel a pensé Gabriel?

Une possible résolution arithmétique (verbale) du problème serait:

> Si à la fin il obtient 36, c'est qu'avant de multiplier par 4 il avait 9, avant d'ajouter 1 il avait 8, avant de diviser par 2 il avait 16 et avant d'ajouter 6 il avait 10. Donc Gabriel a pensé au nombre 10.

Notons que la technique utilisée ici est basée sur la méthode d'«analyse-synthèse» (Gascón, 1994-1995) qui permet d'obtenir la valeur d'un argument inconnu d'un PC à partir de son résultat final et par le biais des opérations inverses (addition-soustraction, multiplication-division) réalisées en ordre inverse. Nous parlons ici de méthode d'analyse-synthèse au sens de Pappus (cité par Lakatos, 1978, p. 107-108). Les géomètres grecs l'appliquaient pour la construction de figures en partant de la figure à construire E_n (l'inconnue) et en cherchant une autre figure E_{n-1} plus accessible à partir des données du problème et telle qu'il existe une transformation géométrique T_n qui transforme E_n en E_{n-1}. Ce processus d'*analyse* continue jusqu'à trouver une figure E_0 qui peut se construire à partir des données du problème. Lorsque l'analyse est finie, la *synthèse* consiste à partir de E_0 et à appliquer successivement les transformations T_i. Descartes utilisa cette méthode en remplaçant les figures E_i par des nombres et les transformations géométriques T_i par des opérations arithmétiques. D'ailleurs Descartes considérait l'algèbre comme une méthode *analytique par excellence* au sens de Pappus (Lakatos, 1978-1981, p. 121).

La praxéologie «arithmétique» où s'inscrit ce type de travail avec les PC atteint des limites à la fois techniques et théoriques, aussi bien pour résoudre des problèmes complexes comme pour justifier un résultat, le généraliser ou le connecter avec celui d'un autre problème. Cela conduit à un élargissement du système initial par des modélisations successives qui donnent lieu à ce que nous appelons «différentes étapes d'algébrisation» (Ruiz-Munzón, 2010; Ruiz-Munzón *et al.*, 2012; Cid, Ruiz-Munzón, Bosch et Gascón, 2016) et que nous décrivons ci-après.

Si nous considérons une première praxéologie S engendrée par les problèmes arithmétiques qui se résolvent par l'exécution de PC à arguments numériques déterminés, la première étape du processus d'algébrisation a lieu lorsqu'il devient nécessaire de considérer un PC comme un tout, et non comme un processus décomposé en étapes successives. Pour cela, il faut pouvoir représenter le PC dans son ensemble d'une manière suffisamment matérielle (écrite, graphique ou symbolique) pour pouvoir le manipuler. Cela ne comporte pas nécessairement l'utilisation de lettres pour indiquer les nombres ou grandeurs qui interviennent dans le PC (ses «arguments»); mais cela demande toutefois de pouvoir écrire la suite d'opérations sans les effectuer, d'expliciter sa structure et de prendre en compte l'ordre et la hiérarchie des opérations à effectuer (les «règles des parenthèses»).

Il faut aussi pouvoir déterminer si deux PC sont ou non équivalents, les simplifier, voire les comparer pour savoir si l'un est toujours plus grand ou plus petit qu'un autre. Cette nouvelle pratique engendre le besoin de nouvelles techniques pour créer et simplifier des PC et de nouveaux environnements théoriques pour les interpréter et les justifier.

Dans le cas du problème précédent, une possible résolution dans la première étape du processus d'algébrisation consisterait à écrire le programme de calcul sans l'effectuer, puis le simplifier, par exemple en désignant par n le nombre pensé par Gabriel (ou par un petit carreau □): $[(n + 6)/2 + 1]\times4$. Si on dispose de techniques de simplification, on peut alors engendrer des PC équivalents:

$[(n + 6)/2 + 1]\times4$

$[n/2 + 6/2 + 1]\times4$

$4n/2 + 3\times4 + 4$

$2n + 16$

On se ramène ainsi à un PC équivalent plus simple qui permet de conclure que, si le résultat final est 36, $2n + 16 = 36$, d'où $2n = 20$ et $n = 10$.

Notons à cet égard que le choix des valeurs numériques et des opérations constitue des variables didactiques déterminantes des possibles stratégies de résolution. Par exemple, le problème arithmétique P_0 (basé sur le PC $[(n + 5)/2 - 8]\times3$) se résout de manière relativement simple en restant dans la praxéologie des problèmes arithmétiques S et en utilisant la technique d'analyse-synthèse. Par contre, il donne lieu à des manipulations écrites complexes lorsque l'on se situe dans la première étape du processus d'algébrisation.

À l'inverse, un problème avec une structure similaire comme:

> P_1: Gabriel pense à un nombre, il ajoute 20, divise le résultat par 5, ajoute 2, multiplie le tout par 3 et soustrait la moitié du nombre pensé. Si à la fin il obtient 24, à quel nombre a pensé Gabriel?

Dans ce problème, la technique «inverse» (d'analyse-synthèse) échoue. Nous considérons alors qu'il se situe dans la première étape du processus d'algébrisation car, pour le résoudre, il faut considérer et pouvoir manipuler le PC comme un tout. Par exemple, on peut le simplifier jusqu'à obtenir un PC équivalent pouvant se résoudre par analyse-synthèse:

$[(n + 20)/5 + 2] \times 3 - n/2$

$[(n + 20 +10)/5] \times 3 - n/2$

$(3n + 90)/5 - n/2$

$3n/5 + 18 - n/2$

$n/10 + 18$

> À partir de ce point, par le biais de la technique inverse et sachant que le résultat final est 24, on arrive à la solution $n = 60$.

Le problème peut aussi se résoudre par essais ou, plus précisément, par «tâtonnements[1]»:

> On essaie plusieurs solutions possibles (par exemple 0, 10, 20) et on considère l'écart entre la valeur cible (24) et la valeur trouvée (6, 5, 4 respectivement). Une petite induction pousse à choisir la valeur 60 (pour avoir un écart nul), la vérification du calcul confirme que 60 est le nombre cherché.

Cette dernière solution peut aussi se considérer dans la première étape du processus d'algébrisation – ou dans la transition entre les deux – dans la mesure où l'on ne se limite pas à exéctuer des PC mais à les étudier, au sens de chercher un lien entre les arguments du PC et les résultats obtenus.

Remarquons que, dans la première étape du processus d'algébrisation, l'environnement technologico-théorique s'élargit et le sens des ostensifs utilisés pour désigner les opérations et les égalités entre PC se voit modifié. Pour justifier la nouvelle pratique mathématique, les propriétés des opérations entre nombres ou grandeurs et les hiérarchies opératoires ne suffisent plus. Comme le montre Cid (2016), ce travail dans la première étape permet aussi d'engendrer des situations suffisamment riches pour l'introduction des nombres relatifs, en modifiant ainsi radicalement non seulement le champ numérique dans lequel on travaille mais encore la notion même de nombre – qui devient, désormais, inséparable de son rôle comme opérateur numérique.

Remarquons aussi que cet exemple, qui se situe dans la première étape du processus d'algébrisation, correspond à ce que l'on peut appeler le cas linéaire, puisque sa structure est donnée par un PC dont la forme simplifiée – que nous appellerons «forme canonique» – est du type $an + b$ (dans notre cas, $n/10 + 18$). C'est aussi cette linéarité qui permet à la technique par «tâtonnements réfléchis» de réussir. Bien que les PC qui structurent les problèmes de cette première étape ne sont pas linéaires, nous nous limiterons ici à ce cas.

3.2 La deuxième étape du processus d'algébrisation

Le passage à la seconde étape d'algébrisation apparaît lorsque les techniques de simplification et les équivalences entre PC ne suffisent pas pour résoudre des problèmes, par exemple lorsque les données à modéliser et les inconnues du problème apparaissent comme des relations entre quantités. Dans ces cas, les techniques de manipulation de PC deviennent plus complexes et incluent la manipulation d'équations (ou égalités entre PC). Entre la fin de la première étape et le début de la seconde, les PC doivent pouvoir être symbolisés, ainsi que leur identité et égalité.

1 Nous remercions les relecteurs pour cette contribution.

Considérons par exemple le problème suivant:

> P_2: Eva a acheté des assiettes et des verres. Elle rentre avec 20 assiettes et 90 verres. Bernard est allé au même magasin et est rentré avec 40 assiettes et 60 verres du même modèle et aux mêmes prix. S'ils ont dépensé le même montant, combien coûtent les verres et les assiettes?

Ce problème peut se traduire en une égalité entre deux PC ($20a + 90v = 40a + 60v$ où a désigne le prix des assiettes et v celui des verres) pour obtenir comme résultat final la relation $a = (3/2)v$, qui indique que le prix des assiettes doit être 1,5 fois le prix des verres.

Notons ici que ce problème donne lieu à une équation à deux inconnues (ou une inconnue et un paramètre). On peut concevoir des variantes qui se résolvent par des équations à une inconnue (par exemple si l'on assume que la dépense totale de chacun est de 38 €). Notons aussi que la relation entre a et v obtenue permet de poser de nouvelles questions de type technologico-théorique: on peut se demander, par exemple, dans quel cas le prix des assiettes sera égal au prix des verres ou bien si on peut trouver une combinaison d'assiettes et verres pour n'importe quel rapport entre les prix des deux articles.

Pour ce qui est des nouveaux objets mathématiques qui émergent dans cette deuxième étape, on voit apparaître ici des techniques algébriques du calcul équationnel, ce qui modifie profondément l'usage du signe «=» qui passe à signifier une égalité conditionnelle entre deux PC (valable uniquement pour un certain ensemble de valeurs des arguments, qui peut être éventuellement vide).

Aujourd'hui, dans de nombreux pays, l'algèbre scolaire se situe presque entièrement dans une sous-partie de cette seconde étape du processus d'algébrisation, avec un passage très rapide et partiel par la première étape, uniquement pour introduire les expressions algébriques et les techniques de simplification et développement (souvent réalisées à vide, sans aucun contexte de modélisation). Le travail dans la deuxième étape est aussi très partiel, car il se limite presque à la résolution de problèmes par des équations à une inconnue. En outre, il ne contient pas habituellement le travail avec paramètres, ce qui réduit énormément les possibilités de modélisation des techniques et problèmes arithmétiques réalisés auparavant. En particulier, l'utilisation de la modélisation algébrique comme outil théorique, pour décrire, expliquer et justifier ce que l'on fait, reste très partielle, sinon inexistante.

3.3 La troisième étape du processus d'algébrisation

La *troisième étape* du processus d'algébrisation apparaît lorsque disparaît la distinction entre inconnues et paramètres pour donner lieu à une praxéologie centrée sur la production, transformation et interprétation de formules. Cette étape n'est pas très présente dans l'enseignement actuel en Espagne, même si elle apparaît sous une forme faible dans d'autres disciplines (comme la physique, la chimie ou l'économie). Aujourd'hui, au moins en Espagne, l'utilisation des techniques algébriques pour manipuler des formules est très peu diffusée au-delà de l'étude des cas généraux des équations linéaires et quadratiques. Or, elle joue un rôle essentiel dans la transition vers la modélisation fonctionnelle et le calcul différentiel, transition qui se produit dans une forme très abrupte dans l'enseignement secondaire, tout spécialement lors du passage au lycée. De plus, les mathématiques du secondaire n'incluent pas la manipulation systématique de la structure des problèmes abordés, ce qui apparaît dans le fait que les lettres utilisées dans les expressions algébriques ne jouent que le rôle d'inconnues (dans les équations et inéquations) ou variables (dans les fonctions). On peut toutefois montrer en quel sens l'omission de paramètres – c'est-à-dire l'utilisation de lettres pour désigner les quantités «connues» aussi bien que les «inconnues» – peut limiter le développement d'outils algébriques de modélisation et constitue une claire dénaturalisation de l'art algébrique (Chevallard et Bosch, 2012).

Un exemple de problème dans ce troisième niveau serait le suivant:

> P_3: Un groupe d'amis va au restaurant. Au moment de payer l'addition, ils décident de la partager équitablement, mais un certain nombre d'entre eux n'ont pas apporté d'argent. Combien devront payer les autres en plus?

Si N est le nombre d'amis, n celui de ceux qui n'ont pas d'argent, p le prix du menu et e l'excès ou quantité à payer en plus par chacun. L'addition totale est pN, les amis «payants» devront payer chacun $pN/(N-n)$. L'excès est $e = pN/(N - \mathrm{n}) - p$ qui, simplifiée, donne $e = np/(N-n)$.

C'est dans cette troisième étape que l'on trouve les *formules* et où culmine la modélisation algébrique élémentaire de systèmes mathématiques et extramathématiques. Cette activité mathématique constitue la raison d'être, en remplacement de l'officielle (au moins en Espagne), que le MER proposé assigne à l'algèbre scolaire.

Bien sûr, le travail de manipulation algébrique de formules présente des limitations, tout particulièrement lorsque l'on veut comparer des PC à plusieurs arguments. Le passage à la modélisation fonctionnelle apparaît alors comme une ressource possible et permet d'articuler le travail algébrique avec l'étude de familles de fonctions. On aura pu inclure, déjà dans les étapes antérieures, la représentation graphique des PC dans le système de coordonnées euclidien, et aborder la question du choix des variables indépendantes et dépendantes, ainsi que la possibilité de modifier et inverser ce choix. Nous arrêterons ici la description du MER, qui apparaît avec plus de détails dans Ruiz-Munzón *et al.* (2012) et, pour son dernier développement vers le calcul différentiel élémentaire, dans Fonseca, Gascón et Lucas (2014).

3.4 Le MER et ses potentialités

L'effort pour rendre explicite un modèle épistémologique de référence pour l'algèbre élémentaire revêt différents rôles. Il peut être utilisé comme un outil descriptif pour analyser les types de praxéologies algébriques qui sont enseignées et étudier leur écologie (conditions d'existence et contraintes à leur développement). Par exemple, lorsque l'on considère quels aspects de l'algèbre élémentaire ne sont pas enseignés et que l'on enquête sur les possibles raisons de leur absence, aussi bien que la nature et origine de ses raisons (Chevallard et Bosch, 2012).

Lorsqu'on l'utilise comme outil heuristique pour rendre visibles certains phénomènes didactiques, le MER sur l'algèbre élémentaire permet de mettre en évidence le caractère préalgébrique de la mathématique scolaire et l'identification de l'algèbre élémentaire comme une généralisation très partielle de l'arithmétique (Gascón, 1994-1995; Bolea *et al.*, 2004; Ruiz-Munzón, 2010). Plus concrètement, on a montré deux phénomènes distincts d'évitement de l'algèbre, le premier dans le cas de la proportionnalité qui apparaît comme un objet isolé aussi bien du travail algébrique que de la modélisation fonctionnelle (Bolea *et al.*, 2001 ; García, 2005); le second dans le cas de l'introduction des nombres négatifs, qui se fait souvent dans le contexte de la mesure de grandeurs où ils ne sont pas nécessaires, au lieu d'être introduits dans le contexte algébrique qui leur a donné naissance historiquement (Cid et Bolea, 2011).

En outre, le MER constitue aussi un outil productif pour mettre en rapport différentes perspectives théoriques à propos de l'algèbre élémentaire, en permettant tout particulièrement d'expliciter les hypothèses ou fondements d'autres approches et son lien avec celle de la TAD (Ruiz-Munzón, Bosch et Gascón, 2013).

Finalement, le MER permet de créer et d'expérimenter de nouvelles propositions d'enseignement (ingénieries) pour mieux connaître les possibilités de modification de l'écologie du système scolaire actuel. En ce sens, le MER présenté est à la base d'un certain nombre d'ingénieries sur l'utilisation des PC pour introduire les nombres négatifs au collège et sur le passage de la modélisation algébrique à la modélisation algébrico-fonctionnelle (Ruiz-Munzón *et al.*, 2012; Cid et Bolea, 2011 ; Cid *et al.*, 2016; Cid, 2016).

4. L'introduction de l'outil algébrique à partir de jeux de «mathémagie»

Les éléments que nous présentons ici proviennent d'une expérimenation menée avec des élèves du secondaire (13-14 et 14-15 ans) pendant les années scolaires 2006-2007, 2007-2008 et 2008-2009 dans deux collèges de Barcelone. Le but des ingénieries était d'initier les élèves à l'utilisation de l'outil algébrique en partant du travail d'exécution de PC dans le cas d'un type de problèmes arithmétiques simple – les jeux de mathémagie – afin de mener les élèves dans les différentes étapes du processus d'algébrisation. Du point de vue de la recherche, ces ingénieries avaient aussi pour objectif d'explorer les différents éléments du MER presenté afin d'en mesurer la viabilité dans le système éducatif espagnol, sa mise en place par des professeurs non spécialistes en didactique et les modifications que pouvait entraîner l'usage d'une calculette symbolique.

Le système mathématique S que nous avons pris comme point de départ est l'ensemble des PC qui, une fois simplifiés, peuvent s'exprimer sous la forme canonique d'un PC linéaire: $an + b$ avec $n \in N$ et $a, b \in Q$. Nous avons déjà indiqué que le recours non formel à l'outil algébrique demande de se situer dans la première étape du processus d'algébrisation. Or, le passage du travail arithmétique à cette première étape n'est ni immédiat ni spontané. Pour cela, S constitue un point de départ suffisamment riche pour développer au départ un travail «arithmétique» d'exécution de PC d'une manière relativement économique et faire surgir des limitations qui motivent le passage à la première puis à la deuxième étape du processus d'algébrisation.

Nous considérons un système S formé par un certain type de «jeux de mathémagie» basés dans l'exécution d'un PC par un «magicien» (en l'espèce, le professeur ou l'un des élèves de la classe), le but étant de deviner l'astuce employée et l'utiliser pour créer de nouveaux jeux. Il existe deux modalités principales de jeux. Une fois que l'on a pensé à un nombre et executé le PC dicté par le magicien, dans la première modalité le magicien devinera le nombre pensé; dans la seconde, il lui faudra connaître le résultat obtenu avant de deviner le nombre pensé.

Dans les deux modalités, pour expliquer le tour du magicien il faut répondre à des questions technologiques qui requièrent la construction et le travail dans un modèle algébrique – plus ou moins algébrisé selon le cas – des PC considérés, ce qui inclut au moins la première étape du processus d'algébrisation. Les jeux de magie proposés peuvent être simples, comme celui présenté dans la section 3.1, et aller jusqu'à des cas plus complexes comme le suivant, qui requiert une modélisation de l'écriture des nombres dans le système décimal:

> On demande à une personne (de 10 ans ou plus) d'écrire son âge sur un bout de papier. En dessous il faut écrire le nombre magique 90, puis additionner les deux nombres. Du résultat obtenu, il faut barrer le dernier chiffre à gauche et le transporter en dessous du dernier nombre écrit. Finalement on additionne ces deux nombres. Lorsque l'on presente au magicien le résultat final, celui-ci déduira immédiatement l'âge de la personne. (Son tour consiste tout simplement à ajouter 9 au résultat.)

4.1 La simplification comme technique explicative

Les ingénieries qui ont été expérimentées partaient d'un ensemble de jeux simples où se combinent les deux modalités: le magicien devine le résultat indépendamment du nombre pensé ou il devine le nombre pensé une fois qu'il connaît le résultat:

> (J1) Au nombre pensé, soustraire 10, multiplier par 10, ajouter 100 et diviser par 10. [Le résultat est le nombre pensé: $((n - 10)\cdot 10 + 100)/10 = (10n - 100 + 100)/10 = n$.]
>
> (J2) Au nombre pensé, ajouter 2 000, diviser par 10, soustraire 200 et multiplier le tout par 20. [Le résultat est le double du nombre pensé: $((n + 2\,000)/10 - 200)\cdot 20 = (n/10 + 200 - 200)\cdot 20 = 2n$.]
>
> (J3) Multiplier le nombre pensé par 2, ajouter 10, soustraire 8 et diviser par 2. [Le résultat est $n + 1$.]
>
> (J4) Au nombre pensé, ajouter son double, ajouter 75, diviser le résultat par 3 et soustraire le nombre pensé. [Le résultat est 25.]
>
> (J5) Multiplier le nombre pensé par 4, ajouter 684 au résultat, diviser par 2 et soustraire le double du nombre pensé. [Le résultat est 342.]

Remarquons que les trois premiers cas peuvent se résoudre par le biais de techniques arithmétiques de type analyse-synthèse (en restant dans *S*) par l'inversion des opérations, alors que les deux derniers requièrent de passer à la première étape du processus d'algébrisation, soit d'avoir un modèle du PC qui permette de le manipuler comme un tout. Dans tous les cas, pour découvrir le tour de magie il faut manipuler le PC à travers la simplification, qui devient par là un outil explicatif, mettant en relief la fonction technologique de l'algèbre, plus que sa puissance technique.

Le besoin d'assigner un symbole à l'argument du PC (le «nombre pensé») apparaît lorsque la séquence des opérations requiert un processus de simplification assez long. Dans ce cas la simplification verbale devient une technique coûteuse, peu économique et dans certains cas presque impraticable. Par exemple, le jeu suivant qui est une version modifiée de J4 (on divise d'abord par 3 et ajoute 75 après) permettrait un travail dans *S* à partir d'une résolution verbale du type:

> Un nombre plus son double donne le triple du nombre. En divisant par 3 on obtient le nombre de départ. Si on soustrait celui-ci il ne reste plus rien, donc en ajoutant 75 on obtient 75.

Ainsi, un simple changement dans l'ordre des opérations du PC peut suffire à limiter fortement cette technique.

Une fois que les élèves sont entrés en contact avec les PC et ont appris à les écrire puis les simplifier pour des cas relativement simples du type $PC(n) \equiv b$ (une constante), $PC(n) \equiv n$ (le nombre pensé), $PC(n) \equiv 2n$ (le double du nombre pensé) ou $PC(n) \equiv n + 1$

(le consécutif du nombre pensé), on a demandé aux élèves d'aborder un nouveau type de tâches qui consiste à inventer de nouveaux tours et à les dicter à leurs camarades. Ce type de tâches permet d'institutionnaliser la technique de simplification utilisée pour expliquer les tours antérieurs et qui apparaît ici comme une technique productrice de nouveaux jeux.

Ainsi, par exemple, les élèves partent de jeux très simples du type $n + 15 - n$ pour deviner le résultat 15 et, petit à petit, ils les compliquent pour obtenir des cas plus complexes comme $((n - 10)\cdot 10 + 100)/10$ ou $((n + 2(n + 1)) - 2)/3$, qui donnent tous les deux le nombre pensé. Bien sûr, ce travail demande aussi une certaine maîtrise de la technique de verbalisation des PC pour pouvoir dicter les jeux à d'autres.

4.2 Premières limitations de la technique d'analyse-synthèse

Le parcours d'étude continue par l'introduction de nouveaux jeux de la seconde modalité (déduire le nombre pensé à partir du résultat du PC) dans des cas où le nombre pensé apparaît aussi comme terme à ajouter ou soustraire, voire à multiplier ou diviser. De cette manière, la technique d'analyse-synthèse doit se compléter avec des simplifications préalables, ce qui situe le travail pleinement dans le premier niveau d'algébrisation. En voici quelques exemples:

> (J6) Si on soustrait 1 au nombre pensé, on multiplie le résultat par 3, on ajoute le nombre pensé, on ajoute 3 et on divise le tout par 4, on obtient 13. Devine le nombre pensé! [$((n - 1)\cdot 3 + n + 3)/4 = n$, et $n = 13$]
>
> (J7) Si au nombre pensé on ajoute son consécutif, au résultat on ajoute le triple du nombre pensé, au tout on ajoute le consécutif du nombre pensé et au résultat on ajoute 6, on obtient 1 544. Devine le nombre pensé! [$(n + (n + 1) + 3n + (n + 1) + 6 = 6n + 8$]
>
> (J8) Si au quatruple du nombre pensé on ajoute 60, au résultat on ajoute le double du nombre pensé, on divise le tout par 6 et on soustrait le nombre pensé, on obtient 10. Devine le nombre pensé! [$(4n + 60 + 2n)/6 - n = 10$]

Les élèves peuvent exécuter les PC dans quelques cas concrets et essayer de deviner le tour de magie, mais la technique est peu économique et risque de ne pas mener à la solution. On peut alors combiner la technique inverse (analyse-synthèse) et celle de simplification, que l'on peut considérer comme les germes des techniques équationnelles. On peut aussi élargir le domaine des nombres pensés aux rationnels (si les calculs intermédiaires ne donnent pas des divisions exactes) et poser la question de savoir dans quels cas on peut ou pas deviner le nombre pensé. Les cas examinés permettent donc de faire surgir un questionnement technologique sur les conditions d'existence d'une solution, le rang possible des arguments des PC, les relations entre paramètres et inconnues, etc.

4.3 Comparer deux PC: introduction à l'usage fonctionnel du calcul équationnel

La réalisation et la production de jeux de magie conduisent assez vite au problème de déterminer si deux PC sont équivalents dans un certain domaine ($P(n) \equiv Q(n)$) ou coincident seulement pour certaines valeurs de n ($P(n_0) = Q(n_0)$ pour un certain n_0). Le problème surgit généralement de manière spontanée lorsqu'un élève propose un jeu de la premiere modalité qui ne vaut que pour le nombre qu'il a pensé, par exemple en prétendant que $(2n + 5n + 20)/5 \equiv 11$ alors que l'égalité n'est vraie que pour le cas $n = 5$. Il peut aussi être provoqué, par exemple en donnant aux élèves une suite d'opérations (ajouter 8, diviser par 2, soustraire 4 et multiplier par 6) et demander tous les différents jeux que l'on peut concevoir en modifiant l'ordre de ces opérations. Ce type de problème mène à parler de l'expression «simplifiée» (ou «canonique») d'un PC.

Pour savoir si deux PC sont équivalents, il ne suffit pas de vérifier certains cas particuliers. Si nous nous limitons au cas de deux PC qui peuvent se simplifier pour donner lieu à une forme canonique élémentaire de type $an + b$, alors le travail peut se réaliser en comparant les deux expressions canoniques obtenues, en restant dans le premier niveau d'algébrisation. Or, dans le cas où les deux PC ne sont pas équivalents, la simplification séparée des deux PC ne suffit pas à déterminer les valeurs où ils coincident – et il en va de même évidemment si les PC ne correspondent pas à des formes canoniques linéaires. Il faudra alors passer au deuxième niveau d'algébrisation, soit d'entrer dans la manipulation d'égalités entre PC et l'utilisation de techniques graphiques (représentation des PC dans un repère cartésien) ou du calcul équationnel. Ces techniques vont à nouveau modifier l'usage et interprétation des signes, en particulier du signe «=» qui était conçu jusque-là comme indiquant le résultat d'exécuter un PC et qui va passer à représenter un certain type d'équivalence entre deux PC.

Nous ne développerons pas davantage la suite du processus d'étude, qui peut prendre différents chemins. Une possible suite consisterait à partir de la comparaison de deux PC «linéaires» et à utiliser la représentation graphique des PC pour avancer vers l'étude de certaines fonctions simples et d'inégalités algébriques. On peut aussi aborder l'étude des règles de divisibilité des nombres pour les cas des jeux qui demandent de manipuler les chiffres du nombre pensé ($n = 100a + 10b + c$, par exemple). Ces activités peuvent préparer le passage à la troisième étape d'algébrisation qui, dans tous les cas, supposera un changement radical du travail mathématique des élèves et une porte d'entrée vers la modélisation algébrico-fonctionnelle (Ruiz-Munzón *et al.*, 2012).

Nous avons montré, en prenant comme exemple un ensemble de problèmes arithmétiques élémentaires comme les jeux de magie, comment peuvent se matérialiser les différentes étapes du processus d'algébrisation et quelles sont les questions qui engendrent et guident les processus d'étude basés sur le MER proposé. Nous n'avons pas abordé la panoplie d'activités possibles et d'itinéraires différents que l'on peut concevoir, mais nous croyons avoir montré la richesse génératrice des PC pour créer des cas différents menant à des questionnements divers. Dans tous les cas, la raison d'être des successives étapes du processus d'algébrisation surgit du besoin de répondre à des questions qui ne peuvent s'aborder complètement dans l'étape précédente.

Le travail d'ingénierie n'a été qu'entamé lors des études exploratoires présentées dans Ruiz-Munzón (2010). L'organisation didactique des activités reste encore un problème ouvert, qui inclut non seulement le travail au niveau du contrat didactique (rôles dévoués au professeur et aux élèves, progressions et modifications apportées aux jeux, motivations des différents cas considérés, etc.) mais encore un développement des éléments technologico-théoriques – en particulier les ostensifs langagiers – qui permettent d'outiller le travail réalisé avec les PC et de l'articuler avec les organisations mathématiques plus traditionnelles autour des expressions algébriques, les équations, les inéquations et les fonctions élémentaires. En outre, les PC mentionnés ici n'incluent que des nombres abstraits comme argument, sans aborder le travail avec des grandeurs et la manière de les inclure dans le traitement des expressions algébriques.

5. En conclusion: la délimitation du MER

Nous finirons en montrant le potentiel de l'introduction de l'algèbre comme point de départ d'un processus d'algébrisation et en formulant une question que nous laisserons ouverte.

Nous avons présenté ici la première partie d'un modèle épistémologique de référence (MER) sur l'algèbre élémentaire, en mettant l'accent sur sa première étape. Une caractéristique importante du MER présenté est qu'il inscrit l'introduction de l'algèbre dans un cadre plus large englobant tout le processus d'algébrisation qui démarre avec l'exécution de programmes de calcul (PC) dès l'enseignement primaire.

Ce MER peut être considéré comme un postulat qui permet d'apporter des réponses à certains phénomènes problématiques dans l'organisation scolaire de l'algèbre. En premier lieu, comme le montrent les travaux de Cid (2016), ce même MER permet d'aborder la construction des nombres relatifs dans un contexte algébrique, ce qui conduit à mettre en évidence des limitations dans le travail arithmétique préalable réalisé par les élèves et, en particulier, permet de donner du sens à la règle des signes dans le produit de deux entiers. En deuxième lieu, les étapes successives qui structurent le MER rendent possible une algébrisation progressive de l'activité mathématique qui permet de dépasser le phénomène de l'algébrisation abrupte des mathématiques scolaires, et les difficultés que celle-ci pose à un grand nombre d'élèves dans un moment clé de leur cursus scolaire.

Finalement, le MER se développe vers le travail avec des formules et s'enchaîne avec la modélisation algébrico-fonctionnelle (Ruiz-Munzón *et al.*, 2012) et le calcul différentiel élémentaire (Fonseca, Gascón et Lucas, 2014).

La question que nous voulons soulever a trait justement à cette délimitation du MER, c'est-à-dire à la reconstruction des différents domaines mathématiques que celui-ci réalise et aux relations qu'il établit entre eux. Ce questionnement de la délimitation du MER est en rapport avec les travaux sur l'*Early Algebra* quand ils questionnent une partie de l'organisation mathématique curriculaire qui, avant la réforme des mathématiques modernes, situait l'arithmétique au cœur des mathématiques du primaire et reléguait l'algèbre à l'entrée de l'enseignement secondaire (souvent non obligatoire). Les mathématiques enseignées portent ainsi la marque de la raison sociale des étapes éducatives dans laquelle elles s'inscrivent: les mathématiques pour tous ou les mathématiques comme préparation aux études avancées. Il semble en conséquence nécessaire d'élaborer des modèles épistémologiques assez vastes pour pouvoir appréhender ce type de questions – en situant l'algèbre en articulation avec les autres domaines des mathématiques enseignées – mais suffisamment concrets pour qu'ils permettent de préciser et d'engendrer les activités mathématiques qui les constituent – avec leur ancrage institutionnel particulier. Cela nous paraît une question à la fois difficile et incontournable.

Références

Assude, T. (1992). *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Écologie de l'objet «racine carrée» et analyse du curriculum*. Thèse doctorale. Université d'Aix-Marseille, Marseille, France.

Bolea, P., Bosch, M., et Gascón, J. (1999). The role of algebraization in the study of a mathematical organization. In I. Schwank (dir.), *European Research in Mathematics Education. Proceedings of CERME*, vol. 1 (p. 135-145). Osnabrücke: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik.

Bolea, P., Bosch, M. et Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. et Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *14*, 125-133.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bosch, M. et Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises en didactique des mathématiques* (p. 107-122). Grenoble: La pensée sauvage.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990.* Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985a). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, *5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x*, *19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie. Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, *23*, 5-38.

Chevallard, Y. (2002). Séminaire PLC2, année universitaire 2001-2002.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *Publication de l'APMEP*, *168*, 239-263.

Chevallard, Y. (2007). Séminaire PLC2, année universitaire 2006-2007. Repéré à http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Seminaire_2006-2007.pdf.

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. *Recherches en didactique des mathématiques* (numéro spécial), 19-39.

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Thèse doctorale. Universidad de Zaragoza, Saragosse, Espagne.

Cid, E. et Bolea, P. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. Dans M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage et M. Larguier (dir.), *Un panorama de la TAD*, *10* (p. 579-604). CRM Documents. Bellaterra, Barcelone: Centre de Recerca Matemàtica.

Cid, E., Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. et Gascón, J. (2016). Integración de los números negativos en el modelo epistemológico de referencia de la modelización algebraico-funcional. Dans G. Cirade, M. Artaud, M. Bosch, J.-P. Bourgade, Y. Chevallard, C. Ladage et T. Sierra (dir.), *Actes du CITAD4*. Toulouse: Université de Toulouse.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. et Schwarz, B. (2001). The construction of abstract knowledge in interaction. In M. van den Heuvel-Panhuizen (dir.), *Proceedings of the 25th Annual Conference for the PME*, vol. 2 (p. 377-384). Utrecht: Freudenthal Institute.

Dubinsky, E. et McDonald M. A. (2002). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. *New ICMI Study Series*, *7*(3), 275-282.

Fonseca, C., Gascón, J. et Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de refencia en torno a la modelización funcional. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *17*(3), 289-318.

García, F. J. G. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Thèse doctorale. Universidad de Jaén, Jaén, Espagne.

Gascón, J. (1994-1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *Petit x*, *37*, 43-63.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática*, *11*(1), 77-88.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática, 25 años*, 99-123.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. et Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. Springer International Publishing 9 (ICME-13 Topical Surveys).

Lakatos, I. (1978/1981). *Mathematics, Science and Epistemology. Philosophical Papers*, vol. 2. Cambridge: Cambridge University Press [Trad. espagnole: Matemáticas, ciencia y epistemología, Alianza: Madrid, 1981].

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización functional*. Thèse de doctorat**.** Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelone, Espagne.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. et Gascón, J. (2013). Comparing approaches through a reference epistemological model: The case of school algebra. In B. Ubuz, Ç. Haser et M. A. Mariotti (dir.), *Proceedings of the 8th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2870-2979). Ankara: Middle East Technical University.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. et Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *REDIMAT*, *4*(2), 52-77.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre: les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques* (numéro spécial), 81-101.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. et Brizuela, B. M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética. De las ideas e los niños a las actividades en el aula.* Buenos Aires: Paidós.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2.3), 133-170.