Moebius
Écritures / Littérature

mœbius

La logique de l’imagination
Métamathématique, métalangage

Marc Vaillancourt

Numéro 64, été 1995

L’imaginaire de la science

URI : https://id.erudit.org/iderudit/13875ac

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Éditions Triptyque

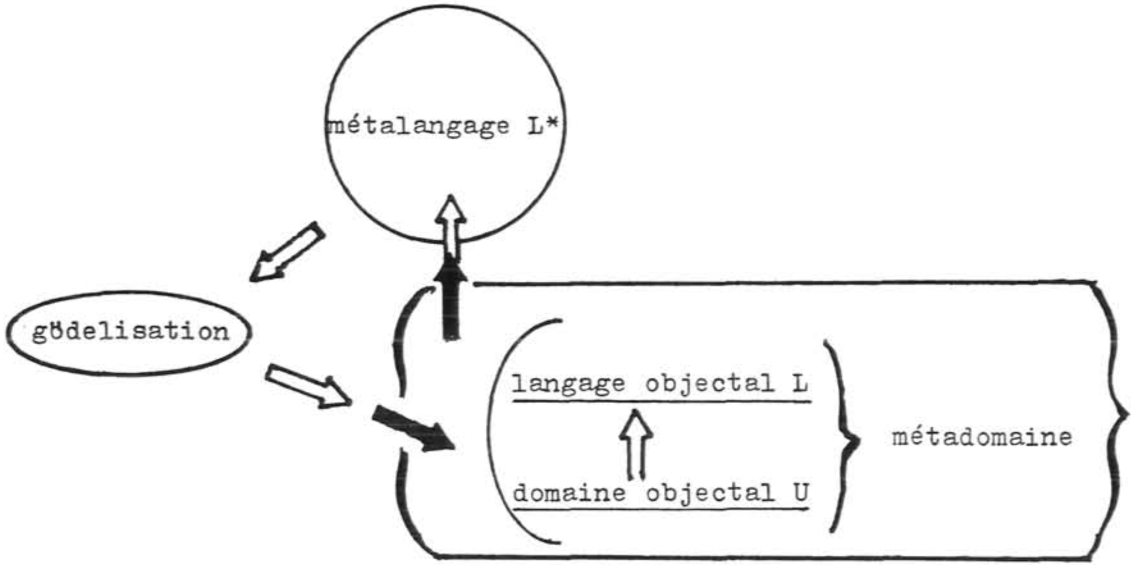
ISSN

0225-1582 (imprimé)
1920-9363 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Vaillancourt, M. (1995). La logique de l’imagination : métamathématique, métalangage. *Moebius*, (64), 112–124.


métalangage L*
gödelisation
langage objectal L
domaine objectal U
métadomaine

La logique de l'imagination
Métamathématique, métalangage

Marc Vaillancourt

> La mathématique universelle doit traiter d'une méthode exacte de détermination des choses qui tombent sous le pouvoir de l'imagination : elle est, pour ainsi dire, une logique de l'imagination. *Cum Deus calculat et cognitationem exercet, fit mundus.*
>
> G.W. Leibniz, *Opuscules*

I. Introduction

> «... mon ami Fagot, montre-nous pour commencer quelque chose d'un peu simple.»
>
> Mikhaïl Afanassievitch Boulgakov, *Le Maître et Marguerite*

La réflexion sur le fondement des mathématiques est apparue il y a un siècle environ, en même temps que la mise en place de la logistique, à laquelle cette discipline est étroitement apparentée. Ce problème de la *métamathématique* embrasse une foule de questions, depuis la justification de l'heuristique et de la zététique des sciences particulières jusqu'au questionnement sur la nature des énoncés mathématiques et sur leur contenu formel. Et c'est bien son souci tatillon de rigueur qui rattache cette activité spéculative à l'ensemble des recherches mathématiques ; avec cette singularité que ce sont les outils mêmes du mathématicien qui sont examinés. Veut-on une image ? Le logisticien serait une sorte de grammairien, qui ne demande pas raison au poète, mais au langage même – le poète, on l'a compris, est ici la profonde, volage et inspirée tête à «X».

Nous nous contenterons d'une approche anecdotique et d'un survol de cette grande contrée, renvoyant le lecteur aux ouvrages spéciaux. On ne saurait trop recommander d'aborder le sujet par un article très fouillé de A. Mostowskii[*], article pourvu d'une bibliographie *sérieuse* – lisez une bibliographie commentée, et point uniquement copieuse. (Ce vieux truc : copier potachesquement des bibliographies, pour *faire* universitaire !)

On peut soutenir sans craindre un démenti que la métamathématique (elle-même couronnement de la science qui fait le plus d'honneur à l'intelligence) est la plus achevée et la mieux assurée des disciplines. Les mathématiciens ont toujours été préoccupés par l'architectonique de leurs systèmes, en ont toujours voulu assurer les fondations ; le caractère abstrait des êtres de raison dont ils font les objets de leurs recherches, l'extrême précision avec laquelle ils les définissent renforcent le caractère contraignant du raisonnement déductif. Le système des concepts d'une théorie mathématique – ou plutôt d'une théorisation – qui rend compte de certains aspects de la réalité objective, consiste presque toujours dans une idéalisation ensembliste, nonobstant le fait que l'appellation des notions s'inspire du commun usage : le plan, la mesure, le point, l'algorithme...

De nos jours, presque toutes les branches des mathématiques fonctionnent selon un mode déductivo-axiomatique, d'après les règles strictes du raisonnement par inférence. Dans la présentation (si l'on peut dire) « physique » des théories, on a toutefois recours à des concepts qui ne ressortissent pas à la seule logique, mais à certains acquis de l'arithmétique générale, par exemple, ou de la topologie – à moins que cela ne soit axiomatiquement exclu. Dans le processus de l'invention, il arrive souvent (presque toujours !) que l'on fasse d'abord l'impasse sur l'appareil technique de la démonstration formelle, quitte à y revenir : au reste, le problème pratique du mathématicien « de terrain » n'est point d'abord de démontrer telle ou telle proposition mais de postuler des conjectures à étayer d'analogies et de rencontres – cela s'appelle, comme dans tous les domaines de l'activité humaine, cela se nomme *culture* : présence des autres en soi, et présence de soi au monde – puis à revenir sur la rigoureuse, la logique, l'ennuyeuse (parfois) démonstration inébranlable ; de faire, de broche en bouche, la *métathéorie* de sa discipline, puis d'assurer la vitalité de ce drageon en l'allant greffer au tronc comme de la théorie générale. « Seule l'erreur est féconde », tel est le sens de la boutade d'Évariste Galois : seule l'erreur rectifiée porte fruit, et si le bâton plongé dans l'eau ne m'apparaissait point rompu, c'est toute la dioptrique que je devrais révoquer en doute.

Le problème central de la métamathématique est celui de la vérité des énoncés. Les propositions tenues pour vraies sont-elles l'expression d'une propriété objective, ou de simples constructions nominalistes qui ne se justifient que par un caractère de commodité ? Par exemple, la possibilité d'ordonner les nombres réels est-elle une caractéristique intrinsèque de ces nombres, ou n'est-elle qu'une façon pratique – et riche en applications – de les définir ? Au fait, que veux dire « définir » ?

II. Les principaux courants de pensée

« Le nombre "Un" sera défini au Chapitre Trois. »
Bourbaki, *Cours de mathématiques,* I-1

Aucune recherche de mathématiques ne se fait sans souci de justifier sa démarche, comme mode opératoire : la lecture de Diophante et de Viète (entre cent autres) nous éclaire sur ce point. Ce qu'a inauguré notre époque, c'est l'examen critique des fondements, érigé en discipline autonome. Force nous est ici de renvoyer le lecteur à l'histoire de la pensée mathématique – en mettant chacun en garde contre la puérilité de certaines vulgarisations. Il faut aller aux auteurs. Ils sont difficiles, vous dites ? J'espère bien !

II.1 Le logicisme

Sans se concerter, G. Frege et R. Dedekind ont élaboré une théorie « logico-logique » des nombres naturels. Pour emprunter à Kant son jargon, disons que Frege entendait établir le caractère analytique des propositions de l'arithmétique, et de généraliser ce résultat à toute la science de la quantité. Frege, de son côté, s'est proposé d'unifier la logique pure et les mathématiques, définissant ainsi ce que l'on a nommé le *logicisme.* B. Russell fit remarquer les incohérences du système de Frege et donna, avec la collaboration de A.N. Whitehead, ses *Principia Mathematica,* ouvrage désormais classique, où il est montré que la mathématique peut se construire toute sur la théorie ensembliste ramifiée des types. Cette conception poussée dans ses limites ultimes aboutit à une espèce de platonisme mathématique, auquel ressortit la pensée profonde (profonde est un euphémisme) de G. Cantor ; selon les idées cantoriennes, les ensembles sont des objets idéaux, qui existent en dehors de toute activité intellectuelle – comme les essences de Platon. On parle alors de l'univers de Cantor, dont le mathématicien est le séraphique explorateur. Nous verrons ci-bas (III-1) comment l'ensemblistique fondamentale tend à englober le logicisme sans le dissoudre.

II.2 Le formalisme

L'interprétation formaliste a été élaborée en réponse aux difficultés que soulève le logicisme appliqué à la théorie de la connaissance. L'acte de naissance du formalisme consiste dans le livre de D. Hilbert, *Les fondements de la géométrie,* où il est montré pour la première fois ce qu'il faut entendre par l'axiomatique formelle et ce qu'il faut attendre de l'analyse métalogique. En 1920, Hilbert définit son programme complet de formalisation des mathématiques, et fonda une manière d'école. Selon ce programme, même la théorie des nombres, l'analyse infinitésimale et la théorie des ensembles, domaines à première vue autonomes et étanches, peuvent être construits comme des théories formelles. Le premier problème qui se présente est de se persuader qu'un système est exempt de contradictions, c'est-à-dire d'établir qu'un énoncé et son contraire ne sont pas tous deux contenus «en puissance» dans les axiomes, et dérivables «en acte» selon les règles opératoires de la logique formelle. Cette dérivation doit se faire selon des méthodes d'une sûreté absolue, méthodes que Hilbert nomme *finies* (comme celles de la combinatorique élémentaire dont le principe de la preuve par induction est le paradigme), et qu'il oppose à celles de la théorie des ensembles transfinis, les méthodes *infinies.* Hilbert et P. Bernays ont publié, en 1938, le résultat de ces travaux *(Fondements des mathématiques).*

Certains résultats obtenus par K. Gödel firent bientôt l'effet d'un coup de tonnerre. Par exemple celui-ci: Toute preuve qu'un système formel est exempt de contradictions ne s'obtient que grâce à des méthodes qui sortent du cadre des définitions et des opérations de ce système; c'est ainsi qu'on ne saurait prouver que la théorie des nombres est non contradictoire uniquement avec des méthodes finies au sens strict.

Les métamathématiciens discutent toujours sur la nature et la portée des méthodes finies (un domaine de recherche fécond est celui des fonctionnelles récursives). Il nous est impossible d'entrer dans les détails; disons seulement que ces recherches sur la finitude ne se limitent pas à la non-contradiction mais concernent aussi les questions de choix et d'analyse de la substitution.

II.3 L'intuitionnisme

Ce point de vue s'oppose presque point par point aux interprétations logistiques et formalistes; non qu'il brosse un autre portrait de la science mathématique dans son ensemble, mais bien plutôt qu'il en donne, au sens photographique du terme, l'épreuve négative. C'est L.E.J. Brouwer qui introduisit cette manière de voir. Il eut en fait des prédécesseurs illustres: L. Kronecker et H. Poincaré. On peut caractériser l'intuitionnisme par: 1° le rejet de l'infini *actuel* (contre Cantor); 2° le postulat de la constructibilité *réelle* comme unique voie de définition des objets mathématiques (contre les russelliens); 3° l'élaboration de tous les systèmes à partir des nombres naturels, en tant qu'agrégation de concepts à édifier (contre Hilbert); 4° la limitation des principes de la logique classique lorsqu'on les applique aux agrégats infinis. Ce dernier point suppose une certaine limitation du principe du tiers exclu. Un exemple nous éclairera là-dessus. Donnons une idée du problème de Goldbach-Vinogradov.

Définissons $a(n) = 0$, si $2(n + 1)$ est somme de deux nombres premiers;

$a(n) = 1$, dans tous les autres cas.

Le nombre réel $g = 0, a(1){\bullet}a(2){\bullet}a(3){\bullet}...$ se nomme nombre de Goldbach; on le calcule avec toute la précision souhaitée, et pourtant on ne peut dire si $g = 0$ ou non. On ne saurait non plus affirmer que le problème de Goldbach-Vinogradov sera un jour résolu. On en conclut à une limitation nécessaire du principe du *tertium non datur*.

II.4 Les tendances actuelles

Aucune des écoles ci-haut mentionnées n'a pu s'acquitter complètement du programme de la construction *ad initio* des mathématiques. Ces différentes optiques ont pourtant permis d'achever un tableau complémentaire, sinon complet, de la science mathématique. La question de la décidabilité des propositions a conduit d'abord à préciser la notion, naïve et tout opératoire, d'algorithme. La syntaxe formelle, précisée par Hilbert et ses disciples, a reçu des applications (pour nous) quotidiennes (Algol, Fortran, etc.). Les chercheurs contemporains ne se regroupent plus sous des bannières, mais mettent en pratique un syncrétisme dialectique, en variant les points de vue; si les travaux se rangent sous le signe d'un constructivisme critique, c'est moins par parti-pris philosophique que par souci de sûreté et de rigueur dans l'invention.

III. Perspectives

> «Le goût des sciences abstraites, en général (...) est fort rare; on ne s'en étonne pas. Les charmes enchanteurs de ces sciences sublimes ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de les approfondir.»
>
> Carl Friedrich Gauss
>
> *Lettre à Sophie Germain,* 30.IV.1807

III.1 L'ensemblistique fondamentale

La faillite relative du logicisme «pur et dur» a montré qu'on ne saurait construire les mathématiques sur la seule théorie axiomatique des ensembles. Il faut comprendre par cela que toutes nos théories mathématiques (qu'elles soient de caractère axiomatique ou qu'elles n'intéressent qu'un ensemble limité d'objets) peuvent être regardées comme un sous-domaine de l'axiomatique ensembliste soumis à certaines conditions.

Les axiomes correspondent aux quelques principes qu'énonce la théorie des ensembles, où les règles déductives sont les règles formelles de la logique mathématique. Les concepts sont définis explicitement; les autres définitions récursives ou quasi implicites se construisent dans le cadre de la théorie axiomatique des ensembles. Cette structure très abstraite concerne les pures recherches mathématiques, et non toutes leurs applications aux sciences de la nature et aux processus extramathématiques. Il convient ici de faire remarquer que des chapitres entiers des mathématiques supposent un appareil formel très complexe et que leur réduction ensembliste ne tombe pas d'abord sous le sens: on se représente mal comment ces très majestueux édifices pourraient être décrits exhaustivement dans le langage ensembliste; mieux (pire), cela s'applique à la représentation même du contenu heuristique et idéatique de la théorie des ensembles. (La syntaxe, condition de la poésie, *n'oblige* pas la poésie, même si le poète est son obligé...) Par exemple, pour former l'ensemble de tous les sous-ensembles des nombres réels, il faut posséder une définition du concept de nombre réel qui appartienne à l'axiomatique ensembliste; cela implique à son tour une définition du supra-concept «ensemble des nombres naturels» et conduit à l'examen axiomatique de la notion de finitude à l'intérieur de la théorie générale des ensembles. De plus, tous les concepts mis en œuvre par la sémantique des langages formels peuvent être définis ensemblistiquement; cela vaut, en particulier, pour les êtres de la linguistique elle-même, qui sont représentés par des caténations de symboles. Crayonnons une rapide analogie avec la topologie ensemblistique abstraite: là, les éléments d'un ensemble structuré selon certaines règles se nomment points, tout comme les éléments d'un ensemble arbitraire (éléments dénombrables, dans le cas des «langages» au sens le plus large) seront nommés symboles.

III.2 L'ensemblistique, du point de vue des fondements de la mathématique

Il convient de se demander si la possibilité d'un fondement théorique ensembliste des mathématiques jette un éclairage suffisant sur le problème des assises métamathématiques de la science. Même si par la réduction des mathématiques à la théorie des ensembles la question métamathématique apparaît dans une large mesure comme ramenée à l'axiomatique ensembliste, dont la syntaxe est simple et les prémisses limpides, on aurait tort de croire que cette réduction idéale résout tous les problèmes.

1° Une objection concerne le fait que le système formel de la théorie des ensembles doit être exempt de contradictions. Or, par rapport à la pratique courante et à l'expérience des contenus de conscience, le système de l'axiomatique théorique des ensembles est beaucoup trop abstrait pour permettre une préhension immédiate de l'esprit et pour que l'on songe même à une vérification directe. (Peut-être Cantor, à la droite du Père, en compagnie des Trônes et des Dominations, y arrive-t-il...) La vérification empirique n'est concevable que sur certaines suites de ces axiomes, comme par exemple lorsque voulant résoudre un système d'équations différentielles, nous nous assurons des conditions aux limites et de l'unicité des solutions. Il ne faut donc pas s'étonner que la théorie des ensembles, dans la première phase de son élaboration, ait eu à rejeter certains paradoxes ruineux «dans les ténèbres extérieures» et à éliminer les méthodes infinies (cf. II.2) de son axiomatique. C'était larguer du lest, pour s'élever encore.

2° Une deuxième objection est soulevée par le caractère d'incomplétude *essentielle* du système des axiomes de l'ensemblistique théorique (cf. III.3, ci-bas). Tout système récursif d'axiomes comprend des énoncés qui n'appartiennent pas au système. (C'est là le « prix à payer » pour que les mathématiques ne soient pas qu'une vaste tautologie !) Il est *impensable* (au sens le plus fort) de croire embrasser l'univers intuitif des ensembles grâce à quelque système d'axiomes que ce soit.

3° Toutefois, on peut affirmer qu'un certain « domaine chosal », l'ensemble U de l'univers intuitif correspond à en ensemble E d'axiomes théoriques, et que tout énoncé se trouve ainsi vrai (valide dans U) ou non valide. Il est ainsi possible de parler d'une structure <E, U> dans le cadre d'un métalangage convenable L. Dans L, on peut formuler le résultat connu sous le nom de paradoxe de Skolem ; ce paradoxe stipule qu'il existe plusieurs modèles non isomorphes non seulement du système E, mais encore du système entier de tous les énoncés syntactiquement valides dans U. Mais alors, la notion de modèle de référence, c'est-à-dire de modèle de contrôle (de « référentiel absolu ») se trouve vidée de sens.

Ces trois graves objections mettent en évidence le fait qu'il est chimérique de poursuivre le dessein de fonder sur une base empirico-logique pure toute la mathématique, dessein qui était celui du platonisme cantorien. On est donc autorisé de se demander si l'exigence de fonder les mathématiques sur une ensemblistique théorique n'est pas un peu arbitraire (de nature *esthétique...*), ou si des principes d'un caractère plus constructivistes ne seraient pas suffisants ; en ce qui a trait aux applications effectives des méthodes mathématiques aux domaines extramathématiques, force est d'admettre que seules les méthodes constructivistes sont praticables. Dans l'état actuel de la théorie, on peut affirmer que les méthodes infinies ne sauraient être abandonnées.

III.3 Incomplétude des théories axiomatiques

Lorsqu'on évalue une certaine théorie mathématique T créée pour fournir un modèle applicable à un ensemble d'objets, comme l'espace cosmique ou des processus physiques, seul compte l'aspect heuristique. Puisque T ne saurait représenter que certains aspects des processus en cause, la question de la véracité des énoncés de T est secondaire. Toutefois, ce problème de la vérité est primordial si T doit s'appliquer aux sciences mathématiques elles-mêmes ; cela est vrai dans tous les domaines, même pour l'arithmétique qui n'était pourtant pas, à ses débuts, axiomatique. Les tables, abaques, nomographies étaient représentés comme des espèces de laboratoire, et les opérations élémentaires figuraient des processus physiques (si l'on veut...).

Soit U un certain domaine d'objets (univers ou discours) et L un langage formel sur U ; on sait qu'il est possible, dans le cadre d'une métathéorie sur L et U, de préciser le concept de *validité*, ou de vérité, d'un énoncé de L dans U. La première question qui surgit est celle de la représentation (codification) d'un ensemble E d'axiomes de telle sorte que l'ensemble des énoncés déductibles de E par les règles formelles puisse coïncider avec l'ensemble des énoncés vérifiés dans U. Dans certains cas, cela est possible en pratique, par exemple lorsque U est un ensemble fini de discours ou lorsque le langage L est tellement pauvre d'expression qu'il ne permet pas de formuler toutes les propriétés de U.

Donnons-nous un domaine U qui contienne les nombres naturels et un langage L dans lequel on puisse exprimer les propriétés arithmétiques des éléments de U. Dans ces conditions, le premier théorème d'incomplétude de Gödel se vérifie ; si l'arithmétique formelle n'est pas contradictoire, on n'est pas en présence d'une théorie incomplète : les énoncés vrais dans U peuvent n'être pas tous déduits de E. Ajoutons un autre résultat fondamental, le théorème de Tarski : On ne peut définir un prédicat P (x) dans L de telle sorte que pour un objet a de U l'énoncé P(a) soit vrai dans U si et seulement si a est la représentation d'un énoncé vrai dans U. Pour démontrer ces deux théorèmes, il faut procéder à l'arithmétisation ou *gödélisation* du langage L par les nombres naturels. Des nombres naturels sont d'abord assignés aux symboles fondamentaux de sorte qu'une suite de symboles corresponde à une suite finie de nombres naturels. Chaque nombre qui correspond par cette règle à une expression H se nomme nombre de Gödel, et est noté H^*. Le codage de L permet la représentation de certains prédicats de U, qui ne sont en premier lieu que métalangagièrement expressibles dans L. Les aspects techniques de la preuve sont ici encore trop compliqués pour qu'on les expose dans une revue destinée à des littéraires (même rompus aux profondes méthodes de la glorieuse sémiotique), et nous renvoyons (c'est la chanson hélas de Ricochet) aux ouvrages spéciaux. En fait, le type de paradoxe que nous venons d'énoncer ravive un paradoxe qui faisait déjà les délices des Anciens. Un exemple : « Le théorème numéro N de la page P est faux.» Si cet énoncé est faux il est vrai et il est vrai s'il est faux...

III.4 Autour de l'hypothèse du continu

Une théorie est dite exempte de contradictions par rapport à une théorie T^* si les notions fondamentales de T peuvent être définies dans le langage de T^* de manière à ce que les axiomes de T correspondent à certains énoncés valides dans T^* : on dit alors que T^* est une représentation de T.

Les définitions ci-haut sont de nature métathéorique. Il arrive souvent que la démonstration de l'interprétabilité puisse se faire exhaustivement dans T^*, même si par la modélisation théorique de T à T^* on arrive plus aisément à ce résultat. Considérons le cas où T^* est un développement de T dans le même langage L. On dira qu'un énoncé H de L est exempt de contradictions par rapport à T si la théorie $T\cup\{H\}$ est exempte de contradictions par rapport à T; par exemple, on peut montrer que les géométries, les euclidiennes et les non euclidiennes, sont libres de contradictions par rapport à la géométrie absolue, c'est-à-dire que l'axiome des parallèles et sa négation sont non contradictoires avec les autres axiomes.

Gödel a établi en 1938 que l'hypothèse du continu et l'axiome du choix (Zermelo) sont exempts de contradictions par rapport aux autres axiomes de la théorie des ensembles. En 1963, P. Cohen a montré que l'hypothèse du continu est indécidable: si l'ensemblistique de Zermelo est non contradictoire, on peut ajouter à ses axiomes l'hypothèse du continu ou sa négation. Il faut noter que l'analogie n'est ici que formelle, puisqu'il est possible de construire les différentes géométries à partir d'un fondement unique, alors qu'on ne saurait admettre un principe unique, universel générateur des différentes théories ensemblistes, existantes ou pensables. Il ne semble pas qu'un tel principe soit même concevable, pour la raison qu'on ne saurait édifier une théorie qui surpassât en abstraction la théorie des ensembles. Nous touchons Dieu, ne vous déplaise: «Dieu est cela qui existe lorsque je forme ce nom: Dieu.» (Ruysbroeck l'Admirable) Nous touchons Dieu, comme on touche le salaire d'une très longue peine.

Calmez-vous, petits athées au rabais. Gödel avait suggéré que le développement de la théorie des ensembles conduirait à de nouveaux axiomes, qui permettraient de lever l'hypothèse du continu. Il ne semble pas que les axiomes mis de l'avant (comme celui de Tarski sur l'existence de nombres cardinaux inaccessibles) puissent suffire à cette tâche. L'axiome de Tarski nous assure de l'existence d'autres ensembles, par-delà ceux que l'on construit à partir des principes de formation et du choix. L'admission de tels axiomes semble garantir l'extension indéfinie des mathématiques. Tous les énoncés pro-constructivistes permettent, dans une certaine mesure, cette extension ; l'acceptation de l'axiome de la constructibilité de Gödel (qui implique la validité de l'hypothèse du continu) mettrait une limite semi-constructiviste aux possibilités de formation indéfinie d'ensembles. Beaucoup de travaux contemporains portent sur ces très subtiles questions.

IV. Conclusion

> « Ô mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées... »
>
> Lautréamont, *Les chants de Maldoror,* II-24

Conclure est inconcevable.

Note
* Andrzej Mostowskii. *Acta Philosophica Fennica* XXVII-243.