Éducation et francophonie

Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires

Dual-process theory and additive comparison problem solving by university students

Dual-process theory y resolución de problemas aditivos de comparación realizados por estudiantes universitarios

Miranda Rioux et Audrey Ann Couture

Volume 42, numéro 2, automne 2014

Résolution de problèmes en mathématiques : un outil pour enseigner et un objet d'apprentissage

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1027909ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1027909ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Association canadienne d'éducation de langue française

ISSN

1916-8659 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Rioux, M. & Couture, A. A. (2014). *Dual-process theory* et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires. *Éducation et francophonie*, *42*(2), 120–137. https://doi.org/10.7202/1027909ar

Résumé de l'article

Plusieurs variables peuvent être manipulées afin de complexifier volontairement le traitement d'un problème additif de comparaison. Dans cet article, nous cherchons à déterminer si 1) la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée et 2) l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les valeurs numériques sont des variables à considérer lors de la conception de tels problèmes. Afin de vérifier l'effet de ces variables sur les taux de réussite ainsi que sur les stratégies de résolution adoptées, nous avons recruté 272 étudiants universitaires, lesquels ont été invités à résoudre des problèmes additifs de comparaison. Nous avons sélectionné, dans la littérature, deux problèmes dont les taux de réussite étaient particulièrement bas. Nous avons ensuite élaboré une version modifiée de ces problèmes, version à l'intérieur de laquelle seules les valeurs numériques variaient. Nous avons effectué une analyse par problème et comparé les taux de réussite des deux versions. Nos résultats indiquent un taux de réussite significativement plus bas aux problèmes originaux. L'analyse des réponses révèle par ailleurs qu'il nous a été possible de manipuler les valeurs numériques de manière à freiner la formulation d'un jugement intuitif incorrect.

Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires

Miranda RIOUX
Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada

Audrey Ann COUTURE
Université du Québec à Rimouski, Québec, Canada

RÉSUMÉ

Plusieurs variables peuvent être manipulées afin de complexifier volontairement le traitement d'un problème additif de comparaison. Dans cet article, nous cherchons à déterminer si 1) la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée et 2) l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les valeurs numériques sont des variables à considérer lors de la conception de tels problèmes. Afin de vérifier l'effet de ces variables sur les taux de réussite ainsi que sur les stratégies de résolution adoptées, nous avons recruté 272 étudiants universitaires, lesquels ont été invités à résoudre des problèmes additifs de comparaison. Nous avons sélectionné, dans la littérature, deux problèmes dont les taux de réussite étaient particulièrement bas. Nous avons ensuite élaboré une version modifiée de ces problèmes, version à l'intérieur de laquelle seules les valeurs numériques variaient. Nous avons effectué une analyse par problème et comparé les taux de réussite des deux versions. Nos résultats indiquent un taux de réussite significativement plus bas aux problèmes originaux. L'analyse des réponses révèle par ailleurs qu'il nous a été possible de

manipuler les valeurs numériques de manière à freiner la formulation d'un jugement intuitif incorrect.

ABSTRACT

Dual-process theory and additive comparison problem solving by university students

Miranda RIOUX
University of Québec in Rimouski, Québec, Canada

Audrey Ann COUTURE
University of Québec in Rimouski, Québec, Canada

Several variables can be manipulated to deliberately complicate an additive comparison problem. In this article, we attempt to determine if 1) congruity between the writing of numbers and the relationship expressed and 2) the appearance of a proportional relationship between numerical values, are variables to consider when designing such problems. To test the effect of these variables on success rates and on the problem solving strategies adopted, we recruited 272 university students, who were invited to solve additive comparison problems. From the literature, we selected two problems for which the success rates were particularly low. We then developed a modified version of these problems, within which only the numerical values varied. We performed one analysis per problem and compared the success rate for the two versions. Our results indicate a significantly lower success rate for the original problems. The analysis of answers reveals that we were able to manipulate numerical values to curb the formation of incorrect intuitive judgments.

RESUMEN

Dual-process theory y resolución de problemas aditivos de comparación realizados por estudiantes universitarios

Miranda RIOUX
Universidad de Quebec en Rimouski, Quebec, Canadá

Audrey Ann COUTURE
Universidad de Quebec en Rimouski, Quebec, Canadá

Se pueden manipular diversas variables para complicar voluntariamente el tratamiento de un problema aditivo de comparación. En este artículo buscamos determinar: a) si la congruencia entre la escritura de los números y la relación expresada, y 2) si la apariencia de una relación de proporcionalidad entre los valores numéricos, son variables que deben ser consideradas durante la concepción de tales problemas. Con el fin de verificar el efecto de dichas variables sobre la tasa de éxito así como sobre las estrategias de resolución adoptadas, reclutamos 272 estudiantes universitarios, quienes fueron invitados a resolver problemas aditivos de comparación. Seleccionamos en la literatura dos problemas cuya tasa de éxito era particularmente baja. En seguida, elaboramos una versión modificada de dichos problemas, versión al interior de la cual sólo los valores numéricos variaban. Realizamos un análisis por problema y comparamos las tasas de éxito de las dos versiones del problema. Nuestros resultados indican una tasa de éxito significativamente inferior para los problemas originales. El análisis de las respuestas muestra, por otro lado, que es posible manipular los valores numéricos de manera que se frene la producción de un juicio intuitivo incorrecto.

Problématique

Les problèmes additifs de comparaison posent de nombreuses difficultés aux élèves du primaire. Selon DeBlois (2011), ces problèmes ont une structure relationnelle qui les rend plus difficiles à traiter que les problèmes additifs de réunion ou de transformation. Si ces problèmes posent des difficultés aux élèves des classes primaires, ils ne devraient pas poser problème aux étudiants universitaires, lesquels ont appris à résoudre des problèmes beaucoup plus complexes durant leur parcours scolaire. Dans cet article, nous tentons d'éclairer le faible taux de réussite obtenu par des étudiants universitaires à deux problèmes bien connus de comparaison additive, et ce, en manipulant ces problèmes de manière à tester l'influence de deux nouvelles variables.

Deux problèmes de comparaison additive

Le problème du bâton et de la balle (Frederick, 2005)

Dans une étude menée auprès de plus de trois mille étudiants universitaires, Frederick (2005) a comparé les taux de réussite des étudiants aux deux problèmes suivants :

> « Un bâton et une balle coûtent 1,10 $. Le bâton coûte 1,00 $ de plus que la balle. Combien coûte la balle? »

> « Une banane et un bagel coûtent 37 cents. La banane coûte 13 cents de plus que le bagel. Combien coûte le bagel? »

Son analyse a révélé que le premier problème avait un taux d'échec beaucoup plus élevé que le second. Comment expliquer cette différence? Le contexte du problème n'est certes pas le même, mais cette différence est-elle suffisante pour expliquer l'écart observé dans les taux de réussite? En fait, Frederick a mis en évidence que, contrairement au second problème, le problème du bâton et de la balle incitait les étudiants à émettre une réponse intuitive incorrecte, laquelle se traduisait par une simple soustraction des données numériques. Selon Kahneman, « [p]resque tout le monde rapporte une tendance initiale à répondre 10 cents parce que la somme de 1,10 $ se sépare naturellement en 1 $ et 10 cents et parce que 10 cents est dans le même ordre de grandeur que la réponse » (trad. libre de Kahneman, 2003, p. 699).

Le problème de la piste de course (Gillard *et al.*, 2009)

Gillard, Van Dooren, Schaeken et Verschaffel (2009) ont proposé le problème suivant à 167 étudiants de la Faculté de psychologie et de sciences de l'éducation de l'Université de Louvain :

> « Hélène et Kim coursent sur une piste. Elles courent à la même vitesse, mais Hélène a commencé la course plus tard. Quand Hélène aura parcouru 5 tours, Kim en aura parcouru 15. Quand Hélène en aura parcouru 30, combien Kim en aura-t-elle parcouru? »

Leur analyse a révélé un taux d'échec moyen de 45 %. Les erreurs commises par les étudiants dans la résolution de ce problème étaient pour la plupart liées à l'utilisation d'un raisonnement proportionnel. Les auteurs mentionnent également que moins les étudiants disposaient de temps pour résoudre le problème, plus ils avaient tendance à utiliser un raisonnement proportionnel. Dans une étude menée auprès de 33 futurs enseignants du primaire, Cramer, Post et Currier (1993) ont expérimenté un problème presque en tous points similaire. Leur étude montrait que 32 des futurs enseignants du primaire avaient résolu ce problème en utilisant un raisonnement proportionnel. D'ailleurs, selon Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens et Verschaffel (2004) qui ont originellement expérimenté, auprès de 729 élèves du primaire, le problème qui fut ensuite repris par Gillard et ses collègues (2009), la fréquence de l'utilisation d'un raisonnement proportionnel augmente avec le niveau scolaire des élèves et varie selon le contexte du problème. En effet, chez les élèves de 6^{e} année ayant participé à l'étude, alors que 50,3 % des réponses données au problème de la piste de course étaient liées à un raisonnement proportionnel, dans le problème suivant, seulement 12,6 % des réponses données étaient liées à un raisonnement proportionnel :

> « Aujourd'hui, Bert fête ses 2 ans et Lies fête ses 6 ans. Quand Bert aura 12 ans, quel âge aura Lies? »

Comme pour le problème du bâton et de la balle, il convient de s'interroger sur les facteurs déclenchant l'utilisation d'un raisonnement intuitif erroné. Selon Van

Dooren et ses collègues (2004), le contexte du problème expliquerait la propension à utiliser, à tort, un raisonnement proportionnel. Pour arriver à cette conclusion, il aurait été souhaitable, selon nous, que les nombres soient les mêmes dans les deux problèmes expérimentés.

Hypothèses de recherche

Pour éliminer l'influence du choix des nombres dans cette tendance 1) à soustraire les nombres en présence et 2) à utiliser un raisonnement proportionnel, il pourrait s'avérer intéressant d'expérimenter deux problèmes partageant le même contexte, mais comportant des données numériques différentes. Nous postulons qu'à elles seules la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée (variable n° 1) ainsi que l'apparence d'une relation de proportionnalité (variable n° 2) sont deux variables susceptibles d'influencer le taux de réussite des problèmes de comparaison additive en favorisant une réponse intuitive. Nous testerons indépendamment l'influence de ces deux variables.

Cadre théorique

Dual-process theory

Selon la *Dual-process theory* (Stanovich et West, 2000; Stanovich, 2009), deux systèmes cognitifs permettent aux individus de porter des jugements : le système 1 (S1) et le système 2 (S2). Le premier système servirait d'assise à l'expression de jugements intuitifs, tandis que le second commanderait une pensée beaucoup plus lente et analytique. Dans la littérature concernant cette théorie (p. ex. Leron et Hazzan, 2009; Tzur, 2011; Böckenholt, 2012), le problème du bâton et de la balle est souvent utilisé pour illustrer comment le système 1 peut prendre le pas sur le système 2. En regardant cette situation à travers le prisme de la didactique, une question nous est apparue : est-il possible de manipuler un problème mathématique de manière à favoriser un jugement s'appuyant sur l'un ou l'autre de ces systèmes? Dans le cas du premier problème, la congruité entre l'écriture décimale du montant d'argent (1,10 $) et la relation exprimée (1 $ de plus) explique probablement, comme l'a signalé Kahneman (2003), pourquoi le système 1 a pris le pas sur le système 2. Si la relation exprimée avait été autre (p. ex. 80 cents de plus), il n'y aurait plus eu de congruité entre l'écriture du nombre et la relation exprimée et nous postulons, comme dans le problème de la banane et du bagel, que le jugement émis par les étudiants aurait été moins intuitif. Dans le cas du second problème, l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les données (5, 15 et 30) explique probablement l'expression d'un jugement qui s'appuie sur le système 1. Si les nombres avaient été autres (p. ex. 3, 4 et 7), peut-être, encore une fois, que les réponses données auraient été moins intuitives.

Définition opérationnelle des deux variables à l'étude

Plusieurs variables concourent à déterminer la complexité des problèmes mathématiques soumis aux apprenants. Certaines de ces variables sont sous le contrôle de l'enseignant et peuvent affecter la réussite des problèmes : il s'agit des variables didactiques (voir Brousseau, 1982). Roegiers (2011) a récemment regroupé ces variables en trois grandes catégories : les variables d'identification, les variables mathématiques et les variables d'habillage. Le tableau 1 en offre un aperçu synoptique.

Tableau 1. **Variables affectant la difficulté des situations-problèmes (Roegiers, 2011)**

Catégories de variables	Variables
1. Variables d'identification	1.1 Répertoire cognitif 1.2 Produit attendu 1.3 Niveau d'ouverture de la situation-problème
2. Variables mathématiques	2.1 Opérations mises en œuvre 2.2 Nombre d'étapes élémentaires et hiérarchisation de ces étapes 2.3 Degré de continuité du processus de résolution minimal
3. Variables d'habillage	3.1 Présentation de la situation-problème 3.2 Place de la question 3.3 Ordre de présentation des données 3.4 Existence de données parasites 3.5 Existence d'indices facilitateurs 3.6 Niveau d'évidence de la réponse 3.7 Cadre 3.8 Caractère significatif de la situation

Jusqu'à tout récemment, nous pensions que ces variables étaient les seules sur lesquelles l'enseignant pouvait agir. Les résultats obtenus par des étudiants universitaires au problème du bâton et de la balle (Frederick, 2005) et au problème de la piste de course (Gillard *et al.*, 2009) nous ont toutefois amenées à réviser notre jugement. Nous envisageons maintenant la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée ainsi que l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les données comme des variables qui peuvent être manipulées par l'enseignant afin d'augmenter ou de diminuer la complexité des problèmes soumis aux apprenants.

La congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée

Dans un problème de comparaison additive, il y a traditionnellement un ensemble de référence, un ensemble comparé ainsi qu'une relation de comparaison (aussi appelée différence) (Vergnaud, 1990; DeBlois, 2011). Dans cette étude, nous considérons qu'il y a congruité entre l'écriture des nombres et la relation de comparaison exprimée lorsque cette relation est symbolisée par un nombre faisant partie intégrante de l'écriture de l'ensemble de référence, de l'ensemble comparé ou de la réunion de ces deux ensembles. Par exemple, considérons le nombre « 315 » comme étant l'ensemble de référence et l'expression « 15 de plus » comme étant la relation de comparaison exprimée. Puisque « 15 » fait partie intégrante de l'écriture décimale du nombre « 315 » ou, autrement dit, puisqu'il est possible d'entendre ce « 15 » lors de la lecture du nombre, on dira qu'il y a congruité entre l'écriture de l'ensemble de référence et la relation de comparaison exprimée. Dans ce cas, cela ne pose aucun problème puisque, pour trouver l'ensemble comparé, il suffit d'additionner ou d'enlever 15 à 315. Or, dans le problème du bâton et de la balle, les données numériques correspondent à la réunion des deux ensembles (1,10 $) et à la relation de comparaison (1,00 $ de plus). Comme dans le cas précédent, il y a congruité entre les nombres et la relation de comparaison exprimée, puisque « 1,00 $ » fait partie intégrante de l'écriture décimale du nombre « 1,10 $ ». Toutefois, pour trouver la valeur de l'ensemble de référence (valeur de la balle) il ne suffit pas de soustraire 1,00 $ de 1,10 $. Nous avons vu que selon Kahneman (2003) la congruité entre ces deux nombres pousse néanmoins les étudiants universitaires à effectuer cette soustraction.

L'apparence d'une relation de proportionnalité

Selon Lamon (2007), la proportionnalité est un concept mathématique permettant de décrire une situation à l'intérieur de laquelle il existe une relation constante (k) entre deux quantités covariantes, x et y. La relation de proportionnalité se traduit généralement par une fonction linéaire de forme $y = kx$, où k est le coefficient de proportionnalité. Bien qu'il y ait, dans un problème de comparaison additive, une relation constante entre les valeurs numériques associées à l'ensemble de référence (x) et l'ensemble comparé (y), cette relation n'est pas proportionnelle puisque y est égal à $x + b$ et non à kx. Dans le cadre de cette étude, nous dirons toutefois qu'il y a « apparence » de relation de proportionnalité lorsque les valeurs numériques associées à l'ensemble de référence (x) et l'ensemble comparé (y) forment un rapport entier. Par exemple, dans le problème de la piste de course, les valeurs numériques 5 (ensemble de référence) et 15 (ensemble comparé) induisent l'apparence d'une relation de proportionnalité, car le rapport entre 15 et 5 est égal à 3, et 3 est un entier. Pour plusieurs répondants, il semble alors naturel de multiplier 30 par 3 pour trouver la valeur manquante, et ce, même si la relation de comparaison est additive et non multiplicative. Cette tendance a été maintes fois observée dans la littérature sur le sujet (Cramer et al., 1993; De Bock, Verschaffel et Janssens, 2002; Van Dooren, De Bock, Evers et Verschaffel, 2006; Gillard *et al.*, 2009).

Objectif de recherche

Vergnaud (1990; 1994) a mis en relief le fait qu'il était possible de jouer sur les valeurs numériques présentes dans un problème de manière à augmenter la complexité cognitive de la tâche de résolution. Il a entre autres démontré qu'il était possible de simplifier ou de complexifier cette tâche en variant le domaine numérique concerné, la grandeur des nombres impliqués ou l'écart entre ces derniers. Il n'a toutefois pas exploré, dans les problèmes additifs de comparaison, l'influence de variables telles que 1) la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée et 2) l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les valeurs numériques. Cette ambition est donc au cœur de la présente étude. Nous postulons en effet que ces variables constituent des attributs heuristiques qui interfèrent dans l'interprétation des situations de comparaison additive et qui, par conséquent, influencent le taux de réussite des problèmes où ils sont présents.

Méthode

Participants à l'étude

Cette étude a été menée à l'hiver 2013, auprès d'étudiants fréquentant l'Université du Québec à Rimouski, campus de Rimouski. En tout, 272 étudiants ont été recrutés. La participation à cette étude s'est effectuée sur une base volontaire et a été encouragée par le tirage de deux iPad.

Plan de constitution des données

Afin d'explorer l'effet de deux nouvelles variables sur la complexité cognitive d'une tâche de résolution de problèmes arithmétiques, nous avons tout d'abord recensé, dans la littérature portant sur la *Dual-process theory*, deux problèmes additifs de comparaison. Nous les avons sélectionnés parce que, d'une part, dans les expérimentations menées, les taux de réussite de ces problèmes étaient faibles et parce que, d'autre part, les auteurs attribuaient ces résultats à l'émission d'un jugement intuitif s'appuyant sur le système 1. En voici une présentation détaillée.

Le premier problème recensé a été élaboré par Frederick (2005) et a été présenté plus tôt dans ce texte. Dans ce problème, rappelons que la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée semblait inciter les participants à répondre intuitivement 0,10 $. Nous souhaitons reprendre l'expérimentation menée par Frederick, mais cette fois-ci en proposant des problèmes dont les variables d'identification, les variables mathématiques et les variables conventionnelles d'habillage (Roegiers, 2011) sont en tous points identiques. Nous avons ainsi élaboré une version modifiée de ce problème, version à l'intérieur de laquelle seules les variables numériques diffèrent. Nous avons donc substitué 1,10 $ et 1,80 $ à 1,00 $ et 1,10 $. Bien que ces valeurs numériques soient différentes, elles seraient néanmoins similaires selon Vergnaud (1990, 1994), en ce sens qu'elles sont toutes les quatre décimales, qu'elles comportent trois chiffres, dont deux après la virgule, qu'elles sont inférieures à deux et que la différence de chaque couple de valeurs est inférieure à un. Nous avons toutefois fait en sorte qu'il n'y ait plus de similitudes entre la relation de comparaison exprimée (1,10 $) et l'écriture du montant total (1,80 $).

Le second problème recensé a été proposé par Gillard *et al.* (2009) et incite également les répondants à émettre une réponse intuitive, laquelle s'appuie apparemment sur l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les données. Dans les travaux effectués par Gillard et ses collègues (2009), les répondants avaient tendance à traiter ce problème comme s'il s'agissait d'un problème de proportionnalité et à le résoudre en mettant en rapport les valeurs numériques concernées, c'est-à-dire en appliquant une règle de trois. Dans le cadre de cette étude, nous avons voulu comparer les taux de réussite de ce problème avec ceux d'une version dont seules les valeurs numériques ont été modifiées, et ce, de manière à enlever l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les données. Dans cette version, les valeurs 5, 15 et 30 ont donc été remplacées par les valeurs 8, 13 et 20, lesquelles ne peuvent former un rapport entier qui induirait l'apparence d'une relation de proportionnalité.

La collecte des données s'est déroulée du mois de février au mois d'avril 2013. Les sujets devaient alors traiter les deux problèmes, l'un dans sa version originale (avec effet de cadrage potentiel) et l'autre dans sa version modifiée (sans effet de cadrage). Nous avons choisi de ne pas présenter aux sujets les deux versions d'un même problème. Sans cette précaution, les sujets auraient été susceptibles d'apparier les deux versions de chaque problème et auraient ainsi risqué d'harmoniser, *a posteriori*, les schémas de résolutions adoptés. Ainsi, 136 sujets (276 ÷ 2) ont répondu à chaque version des problèmes 1 et 2. Ils étaient installés dans un local universitaire supervisé, avaient droit à une calculatrice et pouvaient prendre tout le temps nécessaire pour répondre aux questions. Nous souhaitions en effet contrôler l'atmosphère ambiante, limiter au minimum les risques que surviennent des erreurs de calcul et éviter que le facteur temps affecte la résolution des problèmes proposés et précipite la formulation d'un jugement intuitif (Gillard et al., 2009).

Plan d'analyse

Nous avons d'abord effectué un traitement quantitatif des données constituées, lesquelles ont été corrigées par l'assistante de recherche et analysées grâce au logiciel SPSS 20. Les réponses émises aux quatre problèmes ont donc été évaluées de façon dichotomique. Un score de 1 a été attribué aux réponses exactes, tandis qu'un score nul a été attribué aux réponses erronées, comme aux réponses manquantes. Pour chaque problème, il a ainsi été possible de calculer un taux de réussite. Nous avons ensuite comparé les taux de réussite des problèmes originaux et des problèmes modifiés. Afin de vérifier si les différences dans les taux de réussite étaient significatives, nous avons également réalisé, pour chaque couple de problèmes, un test de khi-deux d'association. Nous avons ensuite analysé la nature des erreurs commises par les étudiants. Pour y arriver, nous avons consigné les réponses émises aux quatre questions dans le logiciel d'analyse SPSS 20, lequel nous a permis d'analyser la fréquence de chaque réponse et de quantifier, parmi les réponses à score nul, l'importance relative des réponses intuitives.

Résultats

Dans cet article, nous présentons les résultats associés à deux problèmes de comparaison additive, lesquels ont respectivement été empruntés aux travaux de Frederick (2005) et de Gillard *et al.* (2009).

Résultats relatifs au premier problème

L'analyse des scores obtenus par les répondants dans les deux versions du premier problème révèle qu'il y a une différence importante dans les taux de réussite des deux versions. Le tableau 2 présente les deux versions du problème 1 et compare leurs taux de réussite.

Tableau 2. **Comparaison des taux de réussite des deux versions du problème 1**

	Version avec effet de cadrage (version originale)	**Version sans effet de cadrage (version modifiée)**
Énoncé	Un bâton et une balle coûtent en tout **1,10 $**. Le bâton vaut **1,00 $** de plus que la balle. Quel est le prix de la balle? (Frederick, 2005)	Un bâton et une balle coûtent en tout **1,80 $**. Le bâton vaut **1,10 $** de plus que la balle. Quel est le prix de la balle?
Taux de réussite	25 %	43 %

Entre les deux versions de ce problème, il y a un écart de 18 % dans les taux de réussite. La version modifiée a ainsi un taux de réussite 72 % plus important que le taux de réussite de la version originale. Notons au passage que les réponses manquantes représentent, pour les deux versions de ce problème, moins de 5 % des réponses erronées et moins de 2 % du nombre total de réponses. Le test de khi-deux que nous avons effectué révèle que l'écart noté dans les taux de réussite est hautement significatif ($x^2(1) = 9{,}461$, $p = 0{,}002$; phi = 0,187). Le phi montre toutefois que seulement près de 3 % des variations de la variable réussite du problème 1 s'explique par les variations de la variable congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée (phi élevé au carré = 0,034969). En ce qui a trait à l'analyse des réponses, il convient de noter, comme l'illustrent les figures 1 et 2, que le rapport entre le nombre de réponses correctes et le nombre de réponses intuitives est beaucoup plus élevé dans la version modifiée. Par réponse intuitive, nous entendons ici une réponse qui correspond à la différence des deux valeurs numériques du problème. Dans la version modifiée, il y a en effet 58 réponses correctes pour 68 réponses intuitives, alors que dans la version originale il y a seulement 34 réponses correctes pour 95 réponses intuitives.

Figure 1. **Fréquence relative de chaque réponse à la version originale de la question 1**

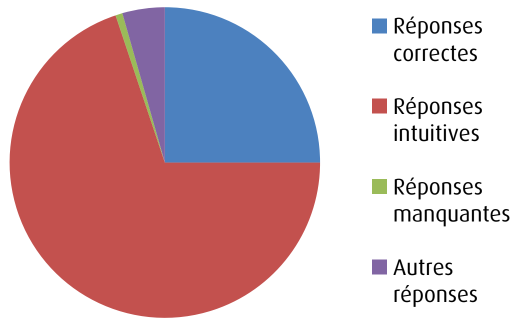
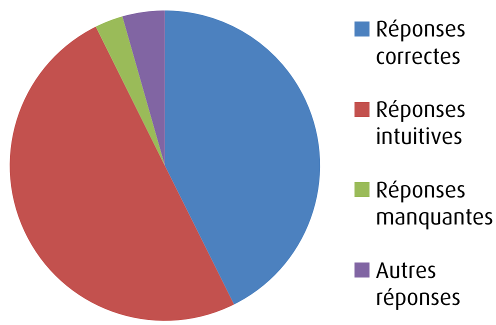
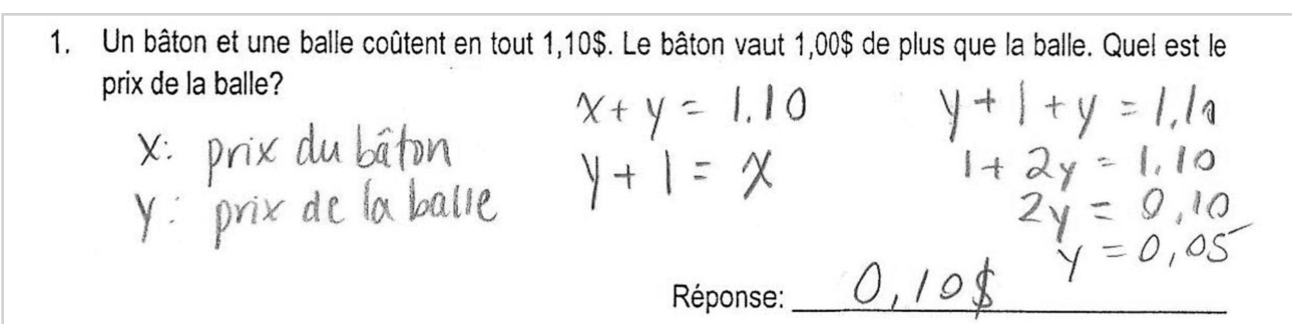


Figure 2. **Fréquence relative de chaque réponse à la version modifiée de la question 1**



Ainsi que l'illustre la figure 3, la similitude entre l'écriture de la somme d'argent (qui se découpe naturellement en 1 $ et 0,10 $) et le prix du bâton (1 $ de plus) semble inciter les étudiants à répondre 0,10 $, même lorsqu'une démarche algébrique les conduit à la bonne réponse (0,05 $).

Figure 3. **Démarche associée à la première version du problème 1**


1. Un bâton et une balle coûtent en tout 1,10$. Le bâton vaut 1,00$ de plus que la balle. Quel est le prix de la balle?

x: prix du bâton
y: prix de la balle

$x + y = 1.10$
$y + 1 = x$

$y + 1 + y = 1,10$
$1 + 2y = 1,10$
$2y = 0,10$
$y = 0,05$

Réponse: 0,10$

Résultats relatifs au second problème

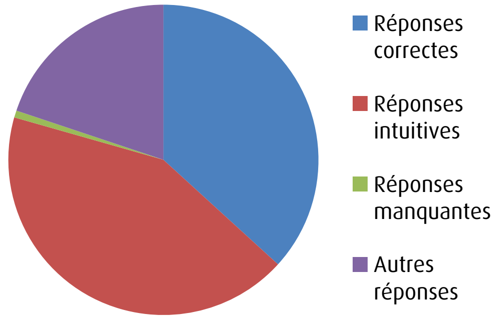
L'analyse des scores obtenus par les répondants dans les deux versions du second problème révèle également une différence importante dans les taux de réussite des deux versions. Le tableau 3 présente les deux versions du problème 2 et compare leurs taux de réussite.

Tableau 3. **Comparaison des taux de réussite des deux versions du problème 2**

	Version avec effet de cadrage (version originale)	**Version sans effet de cadrage (version modifiée)**
Énoncé	Hélène et Kim coursent sur une piste. Elles courent à la même vitesse, mais Hélène a commencé la course plus tard. Quand Hélène aura parcouru **5 tours**, Kim en aura parcouru **15**. Quand Hélène en aura parcouru **30**, combien Kim en aura-t-elle parcouru? (Gillard *et al.*, 2009)	Hélène et Kim coursent sur une piste. Elles courent à la même vitesse, mais Hélène a commencé la course plus tard. Quand Hélène aura parcouru **8 tours**, Kim en aura parcouru **13**. Quand Hélène en aura parcouru **20**, combien Kim en aura-t-elle parcouru?
Taux de réussite	38 %	51 %

Entre les deux versions de ce problème, il y a écart de 13 % des taux de réussite. La version modifiée a ainsi un taux de réussite 34 % plus élevé que le taux de réussite de la version originale. Notons au passage que les réponses manquantes représentent, pour les versions 1 et 2, moins de 1 % des réponses erronées et moins de 1 % du nombre total de réponses. Le test de khi-deux que nous avons effectué révèle que l'écart noté dans les taux de réussite est significatif (x2(1) = 5,965, p = 0,015; phi = -0,148). Le phi montre toutefois que seulement près de 2 % des variations de la variable réussite du problème 2 s'expliquent par les variations de la variable apparence d'une relation de proportionnalité (phi élevé au carré = 0,021904). En ce qui a trait à l'analyse des réponses, il convient de noter, comme le montrent les figures 4 et 5, que le rapport entre le nombre de réponses correctes et le nombre de réponses intuitives est beaucoup plus élevé dans la version modifiée. Par réponse intuitive, nous entendons ici une réponse qui correspond à l'application d'une règle de trois.

Figure 4. **Fréquence relative de chaque réponse à la version originale de la question 2**



– Le participe passé *parcouru* est invariable dans le texte qui suit lorsque le verbe est précédé de « en ». Voir le tableau 3.

Figure 5. **Fréquence relative de chaque réponse à la version modifiée de la question 2**

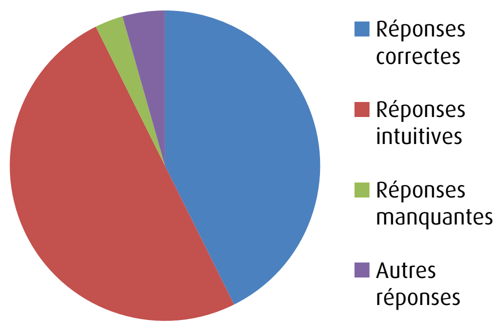
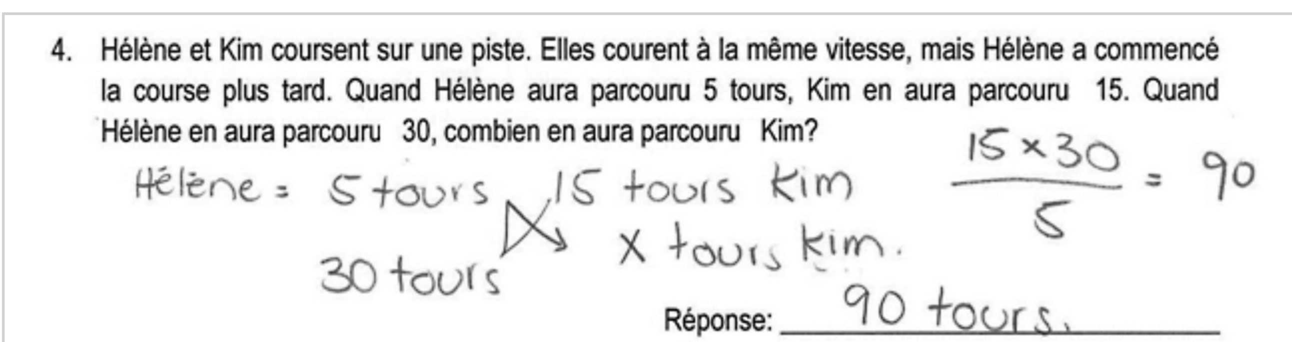


Figure 6. **Démarche associée à la première version du problème**



4. Hélène et Kim coursent sur une piste. Elles courent à la même vitesse, mais Hélène a commencé la course plus tard. Quand Hélène aura parcouru 5 tours, Kim en aura parcouru 15. Quand Hélène en aura parcouru 30, combien en aura parcouru Kim?

Hélène = 5 tours 15 tours Kim
30 tours X tours kim.

$\frac{15 \times 30}{5} = 90$

Réponse: 90 tours.

Dans la version modifiée, il y a en effet 70 réponses correctes pour 51 réponses intuitives, alors que dans la version originale il y a seulement 50 réponses correctes pour 58 réponses intuitives. Comme le montre la figure 6, l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les trois données du problème semble ici inciter les étudiants à appliquer une règle de trois pour trouver la réponse.

Discussion et conclusion

Dans cette étude, nous avons testé deux variables qui étaient, à notre avis, susceptibles d'induire un jugement intuitif lors de la résolution de problèmes additifs de comparaison. Il s'agit 1) de la congruité entre la relation de comparaison exprimée et l'écriture des valeurs numériques et 2) de l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les valeurs numériques. Nos résultats mettent en relief un taux de réussite significativement plus bas des problèmes originaux. Nous expliquons ce phénomène par un effet de cadrage numérique, effet qui semble affecter le choix des stratégies de résolution et, par voie de conséquence, le taux de réussite des problèmes soumis.

L'effet de cadrage numérique renvoie de manière générique aux changements qui surviennent dans l'interprétation des informations numériques d'un problème lorsque ces informations sont décrites dans des cadres différents, mais équivalents (Wong et Kwong, 2005a, 2005b; Kwong et Wong, 2006). Un des exemples les plus éloquents de cet effet nous a été livré par Tversky et Kahneman au début des années 1980 : il s'agit du *Asian disease problem.* Dans ce problème, deux programmes alternatifs étaient proposés afin de combattre une maladie qui risquait de tuer 600 personnes. Si le premier programme était adopté, 200 personnes allaient être sauvées. Si le second était adopté, il y avait une probabilité de 1/3 de sauver 600 personnes, et une probabilité de 2/3 que personne ne soit sauvé. Même si les deux programmes étaient équivalents en termes d'efficacité, la majorité des répondants ont préféré le premier programme au second (Tversky et Kahneman, 1981). Dans cette étude, nous proposons une définition alternative de l'effet de cadrage numérique. Certes, cet effet peut être associé aux changements qui surviennent dans l'interprétation des informations numériques d'un problème lorsqu'il est traduit dans un cadre différent. Or, selon nous, il peut également être associé aux changements qui surviennent dans l'interprétation d'un problème lorsque le cadre est identique mais que les données numériques sont différentes. Ce sont alors les données numériques, et non le contexte, qui encadrent le raisonnement et qui sont susceptibles de précipiter une réponse intuitive incorrecte. Cela a d'ailleurs été observé par Van Dooren, De Bock, Evers et Verschaffel (2008), qui ont démontré qu'il était possible de provoquer, chez les élèves du primaire, une surutilisation de la proportionnalité dans les problèmes où il y a une valeur manquante (*Missing-Value Problems*), et ce, uniquement en modifiant les valeurs numériques des problèmes. Selon eux, plus les élèves acquerraient de l'expérience dans le traitement de problèmes de proportionnalité, moins le choix des valeurs numériques aurait un impact sur la réussite des problèmes où il y a une valeur manquante. Nous avons toutefois noté la présence de cet impact chez des sujets adultes, lesquels ont plus d'expérience que les élèves du primaire dans le traitement de problèmes de proportionnalité. Ferions-nous le même constat que Van Dooren et ses collègues (2008) en présentant nos deux problèmes à des élèves du primaire? De plus amples recherches seraient nécessaires pour répondre à cette question.

La congruité entre l'écriture des nombres et la relation de comparaison exprimée ainsi que l'apparence d'une relation de proportionnalité entre les données sont-elles des variables didactiques au sens de Brousseau (1982)? Nous soutenons que oui, puisque nous avons été en mesure de les manipuler de manière à affecter non seulement les taux de réussite des problèmes, mais les stratégies de résolution adoptées par les participants. Il faut toutefois interpréter nos résultats avec prudence. D'une part, nous n'avons soumis qu'un seul couple de problèmes pour chaque variable à tester. Aurions-nous, par exemple, été en mesure d'observer des résultats similaires avec un autre couple de problèmes de comparaison additive où nous aurions manipulé la congruité entre l'écriture des nombres et la relation exprimée? D'autre part, les valeurs obtenues pour le phi forcent à adopter une certaine humilité. Bien que nos variables puissent être manipulées de manière à affecter la réussite des problèmes additifs de comparaison, il convient de se demander si elles sont les seules à expliquer les écarts observés dans les taux de réussite des problèmes soumis aux étudiants. Si les recherches menées par Alter, Oppenheimer, Epley et Eyre (2007) sur le concept de « *fluency/disfluency* » pourraient éclairer de manière différente les résultats de la présente étude, un meilleur contrôle des conditions expérimentales aurait peut-être, par ailleurs, mené à des résultats différents. En effet, les participants n'étaient pas restreints dans le temps et ils pouvaient, à leur guise, utiliser ou non une calculatrice. Ces conditions peuvent avoir créé des interférences dans nos données et pourraient expliquer la taille de l'effet des deux variables sur les taux de réussite des problèmes.

À notre avis, la didactique des mathématiques gagnerait à intégrer, dans sa réflexion, le fruit des recherches menées en psychologie du jugement intuitif. Car, si l'on ne saurait attaquer un problème mathématique sans une part d'intuition, il faut apprendre à se méfier de nos idées premières et adopter une attitude de doute par rapport à celles-ci. En manipulant des variables qui induisent un effet de cadrage, il serait éventuellement possible d'entraîner les élèves à adopter cette attitude de doute et à utiliser leur système 2 pour traiter les problèmes soumis. À l'instar de Leron et Hazzan (2006), nous soutenons ainsi que « l'implication pédagogique la plus importante [de la *Dual-process theory*] est la nécessité d'entraîner les individus à être conscients de la façon dont le système 1 et le système 2 fonctionnent et à inclure cette prise de conscience dans leur boîte d'outils en résolution de problèmes » (trad. libre de Leron et Hazzan, 2006, p. 123). Par ailleurs, si la manipulation de la variable « apparence d'une relation de proportionnalité » a provoqué, chez les sujets, la formulation de réponses intuitives erronées, il est raisonnable de penser que ces sujets avaient été surexposés à des problèmes de proportionnalité à l'intérieur desquels les valeurs numériques formaient un rapport entier. Cet attribut serait alors devenu pour eux un attribut heuristique sur lequel s'appuyer pour déterminer s'il s'agit ou non d'une situation de proportionnalité. Les enseignants gagneraient ainsi à proposer aux élèves des situations de proportionnalité où il n'y a pas toujours un rapport entier entre les valeurs numériques, question d'éviter un effet de contrat et de favoriser, chez leurs élèves, l'émission d'un jugement plus lent et analytique. En ce qui a trait à la variable manipulée dans le problème du bâton et de la balle, nous recommandons aux enseignants de ne pas hésiter à proposer aux élèves des problèmes où il y a une congruité entre l'écriture des nombres et la relation de comparaison exprimée. À notre avis, les élèves développeraient alors un schéma général de résolution qui leur permettrait de s'appuyer sur le système 2 lorsqu'une illusion cognitive de la réponse est générée par un problème.

Références bibliographiques

BÖCKENHOLT, U. (2012). The cognitive-miser response model. Testing for intuitive and deliberate reasoning. *Psychometria*, *77*(2), 388-399.

BROUSSEAU, G. (1982). Les objets de la didactique des mathématiques. Dans *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques*, France.

CRAMER, K., POST, T. et CURRIER, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion. Research implications. Dans D. T. Owens et S. Wagner (dir.), *Middle Ideas for the Classroom. Middle Grades Mathematics* (p. 159-178) États-Unis : National Council of Teachers of Mathematics.

DEBLOIS, L. (2011). *Enseigner les mathématiques. Des intentions à préciser pour planifier, guider et interpréter.* Québec : Presses de l'Université Laval.

DE BOCK, D., VERSCHAFFEL, L. et JANSSENS, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning*, *4*(1), 65-89.

FREDERICK, S. (2005). Cognitive reflection and decision making. *Journal of Economic Perspectives*, *19*(4), 25-42.

GILLARD, E., VAN DOOREN, W., SCHAEKEN, W. et VERSCHAFFEL, L. (2009). Proportional reasoning as a heuristic-based process. Time constraint and dual task considerations. *Experimental Psychology*, *56*(2), 92-99.

KAHNEMAN, D. (2003). Mapping bounded rationality: A perspective on judgment and choice. *American Psychologist*, *58*(9), 697-720.

KWONG, J. Y. Y. et WONG, K. F. E. (2006). The role of ratio differences in the framing of numerical information. *International Journal of Research in Marketing*, *23*(4), 385-394.

LAMON, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Toward a theorical framework for research. Dans F. K. De Lester (dir.), *Second Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning*, (vol. 1, p. 629-667). États-Unis : National Council of Teachers of Mathematics.

LERON, U. et HAZZAN, O. (2006). The rationality debate. Application of cognitive psychology to mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(2), 105-126.

LERON, U. et HAZZAN, O. (2009). Intuitive vs analytical thinking. Four perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 263-278.

ROEGIERS, X. (2011). *Les mathématiques à l'école primaire*. Tome 2. Bruxelles : De Boeck.

STANOVICH, K. E. et WEST, R. F. (2000). Individual differences in reasoning. Implications for the rationality debate? *Behavioral and Brain Sciences*, *23*(5), 645-665.

STANOVICH, K. E. (2009). *What Intelligence Tests Miss. The Psychology of Rational Thought*. New Haven, ct : Yale University Press.

TVERSKY, A. et KAHNEMAN, D. (1981). The framing of decisions and the psychology of choice. Science, *New Series*, *211*(4481), 453-458.

TZUR, R. (2011). Can dual processing theories of thinking inform conceptual learning in mathematics? *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 597-636.

VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., HESSELS, A., JANSSENS, D. et VERSCHAFFEL, L. (2004). Students' overreliance on proportionality. Evidence from primary school pupils solving arithmetic word problems. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 385-392.

VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., EVERS, M. et VERSCHAFFEL, L. (2006). Pupils' over-use of proportionality on missing-value problems. How numbers may change solutions. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *5*, 305-312.

VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., EVERS, M. et VERSCHAFFEL, L. (2009). Students' over-use of proportionality on missing-value problems. How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(2), 1-25.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(23), 133-170.

VERGNAUD, G. (1994). Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. Dans M. Artigue (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud* (p. 177-191). Grenoble : La pensée sauvage.

WONG, K. F. E. et KWONG, J. Y. Y. (2005a). Comparing two tiny giants or two huge dwarfs? Preference reversals owing to number size framing. *Organizational Behavior and Human Decision Processes, 98*(1), 54-65.

WONG, K. F. E. et KWONG, J. Y. Y. (2005b). Between-individual comparisons in performance evaluation. A perspective from prospect theory. *Journal of Applied Psychology, 90*(2), 284-294.