Bulletin de l'Association des démographes du Québec

Étude du mouvement de la population dans une perspective multirégionale

Claude Dionne

Volume 3, numéro 1, hors-série, 1974

Année mondiale de la population

URI : https://id.erudit.org/iderudit/305777ar
DOI : https://doi.org/10.7202/305777ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Association des démographes du Québec

ISSN

0380-1713 (imprimé)
1925-3478 (numérique)

Citer cet article

Dionne, C. (1974). Étude du mouvement de la population dans une perspective multirégionale. *Bulletin de l'Association des démographes du Québec*, *3*(1), 142–154. https://doi.org/10.7202/305777ar

ÉTUDE DU MOUVEMENT DE LA POPULATION DANS UNE PERSPECTIVE MULTIRÉGIONALE

Je voudrais vous donner ici un aperçu du modèle démographique multirégional. En fait, je vais vous présenter les principales caractéristiques et les principales équations s'appliquant à la population multirégionale stable, ainsi que les mesures matricielles qu'on peut en tirer.

Commençons par présenter le modèle matriciel des populations stables. Vous trouvez en annexe trois arrangements matriciels. Le premier s'applique à une population unique, et a été développé par Leslie dès 1945. C'est essentiellement un modèle de mouvement naturel, et la population est supposée fermée. Le second arrangement consiste en une super-matrice développée par Rogers à partir de 1966. C'est déjà un modèle complet de redistribution, comprenant fécondité, mortalité et mobilité régionales. Les matrices sont disposées entre elles à la façon d'une matrice de mobilité. Enfin le troisième arrangement est de Feeny (1970). Il a en réalité transformé le modèle de Rogers à l'image du modèle de mouvement naturel de Leslie. Personnellement, je trouve qu'il est plus facile de travailler avec l'arrangement de Feeny, et c'est celui que j'adopte ci-après.

A- La table multirégionale de survie et de mobilité.

Illustrons d'abord une matrice combinée de survie et d'émigration, que nous appelons M_x où x indique l'âge initial de l'intervalle donné; on suppose ici trois régions, A, B et C:

$$\begin{bmatrix} 1-e_A - q_A & e_{BA} & e_{CA} \\ e_{AB} & 1-e_B - q_B & e_{CB} \\ e_{AC} & e_{BC} & 1 - e_C - q_C \end{bmatrix}$$

La probabilité e_{AB} indique la probabilité que, demeurant en A au début de l'intervalle, on se retrouve survivant en B à la fin de l'intervalle.

Si on multiplie les matrices M de la façon suivante: $M_x \ldots M_2 M_1 M_0$, on obtient une matrice des probabilités qu'étant né en A, B ou C, on se retrouve survivant à l'âge X + 1 en A, B ou C. On peut ainsi retracer des survivants d'une table multirégionale de survie.

Si maintenant on additionne les expressions matricielles suivantes: $M_0 + M_1 M_o + M_2 M_1 M_o + \ldots = K,$ (I) on obtient une matrice tous âges de redistribution dans une population stationnaire. Supposons un taux de natalité égal dans toutes les régions, c'est-à-dire que nous distribuons les naissances comme les populations régionales; nous pouvons trouver la distribution régionale à laquelle tend la population en appliquant la relation suivante:

$$\left[K - I\right] X_j = 0 \qquad \text{(j indiquant la région),} \qquad \text{(II)}$$

pour $\Sigma X_j = 1$, X_j représente le vecteur de répartition régionale de la population.

On se rend vite compte de l'insuffisance de la table multirégionale. Elle n'est autosuffisante que dans le cas très spécial de la stationnarité et de l'égalité des taux régionaux de natalité. Il faudrait un modèle plus complet qui tienne compte des fécondités régionales et de la croissance démographique.

B- <u>La population stable multirégionale</u>.

Nous allons faire appel à l'arrangement matriciel de Feeny (la matrice P) qui se trouve en Annexe. Posons les hypothèses de base:

- Toutes les régions sont reliées entre elles par des flux migratoires, soit directement, soit par régions interposées, au moins dans un intervalle d'âges donné.

- Les régions sont ouvertes entre elles, mais forment un ensemble clos face à l'immigration extérieure (l'émigration extérieure pouvant être assimilée à de la mortalité).

- On ne considère que les âges liés à la reproduction, c'est-à-dire qu'on exclut la population ayant dépassé sa période reproductive (mettons 50 ans et plus).

- Chaque région est dotée d'au moins deux taux de fécondité différents de 0 qui se suivent dans deux groupes d'âges consécutifs.

Si toutes ces conditions sont remplies, et elles sont loins d'être irréalistes, la matrice P aura les propriétés matricielles suivantes (que je ne développerai pas ici): elle est non-négative, irréductible et primitive. Ces propriétés permettent d'avancer que la matrice P a une seule racine caractéristique réelle positive, plus grande en valeur absolue que toute autre racine caractéristique de P. A cette racine caractéristique dominante est associé un vecteur colonne, qui est le seul réel et positif. (Voir Keyfitz (1968) pp. 58-59). La racine dominante correspond à l'accroissement de la population dans l'intervalle utilisé (plus précisément à 1 plus le taux d'accroissement); le vecteur associé à cette racine correspond au vecteur multirégional de population stable. Bref, si on ajoute quelques hypothèses, fort raisonnables du reste, on s'aperçoit que la théorie matricielle des populations stables s'applique tout autant dans un système à plusieurs régions que dans un système à une seule région.

Si on applique le système d'équations suivant:

$$(P - \lambda 1) X_{ij} = 0, \qquad \text{(III)}$$

on obtient la population stable par âge et par région. Il faut évidemment résoudre l'équation caractéristique pour trouver λ. Il existe des programmes tout faits qui permettent de trouver λ et X_{ij} en quelques secondes, même si la matrice P est de grande dimension (par exemple 200 X 200).

Même si le calcul matriciel permet de retracer sans trop d'effort les valeurs cherchées, on aimerait bien connaître les mécanismes de la redistribution selon les âges. C'est pourquoi j'ai cru bon de distinguer la redistribution régionale à l'intérieur d'une cohorte, la redistribution inter-cohortes (c'est-à-dire dans la reproduction), et la redistribution qui est due à l'accroissement démographique.

La redistribution à l'intérieur d'une cohorte, je l'ai déjà brièvement présentée: c'est la table multirégionale de survie. La table s'est révélée insuffisante parce qu'il nous manquait une distribution régionale des naissances. Nous allons pouvoir la trouver en analysant la distribution qui se fait dans la reproduction.

Si on reprend le système d'équations III et qu'on effectue des substitutions de façon à transformer X_n en X_{n-1}, en X_{n-2}, etc.; jusqu'en X_1, on obtient l'équation suivante (j'omet l'indice j):

$$\left[M_o \sum_{x=1}^{n} \lambda^{-x} F_x M_x \dots . M_1 - \lambda 1 \right] X_1 = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Cette formule exprime la redistribution qui s'effectue dans ce qu'on appelle la reproduction "actuelle". La reproduction "actuelle", c'est la reproduction du moment dans une population stable, reproduction qui tient compte de l'influence du taux de croissance sur la structure par âge (voir le diagramme de Lexis). On voit que pour résoudre cette équation, il faut connaître λ .

Vous trouverez en Annexe le développement d'une équation qui m'apparaît fondamentale dans le modèle multirégional. L'équation est celle-ci:

$$\left[M_o \sum_{x} F_x M_x \dots M_1 - 1 \right] X_1 = 0 \qquad \text{(V)}$$

Cette formule nous permet de retracer la distribution de X_1

sans même connaître la racine caractéristique λ. Elle exprime la redistribution dans la reproduction nette (voir le diagramme de Lexis).

Comme on connaît X_1, la distribution régionale du premier groupe d'âges, il est facile d'appliquer ensuite la table multirégionale de survie et d'établir la distribution régionale à l'intérieur de chaque groupe d'âges. Connaissant la distribution régionale de chaque groupe d'âges, on peut facilement calculer les taux de fécondité et de survie applicables à la population d'ensemble, c'est-à-dire à la population toutes régions. Et comme on dispose alors d'une loi unique de fécondité et de survie, on retombe sur le cas de la population unique pour trouver le taux d'accroissement naturel. Reprenons le raisonnement par étapes: 1° On établit la distribution régionale du premier groupe d'âges grâce à l'équation V; 2° on applique la table multirégionale de survie et on retrace dans chaque groupe d'âges la distribution régionale de la population; 3° en appliquant cette distribution régionale aux taux de survie et de fécondité de chaque groupe d'âges, on retrace la loi de fécondité et de survie de la population toutes régions; 4° on cherche la racine λ ou le taux d'accroissement naturel comme dans une population unique.

Quelle influence aura le taux d'accroissement naturel sur la distribution régionale? A un âge donné, λ n'aura aucune influence sur la distribution régionale, mais il influera sur la structure par âge de la population. Ainsi plus λ ou le taux d'accroissement sera élevé, plus dans la population totale prévaudra la distribution régionale des jeunes.

Résumons les trois mécanismes de la redistribution : 1) on a d'abord une table multirégionale de mobilité et de survie, qui correspond à la redistribution faite dans une cohorte de naissances; 2) la population se redistribue aussi dans son processus de reproduction; ce qui détermine la distribution des naissances; 3) enfin le taux d'accroissement apporte une pondération aux groupes d'âges, privilégiant la distribution régionale des âges plus ou moins avancés.

C- Propriétés des populations multirégionales stables.

Indiquons maintenant quelques propriétés et quelques formules des populations multirégionales stables.

- Le taux d'accroissement est le même dans toutes les régions; les taux de natalité et de sortie nette peuvent différer entre régions mais leur différence est la même dans chaque région.

- Les taux nets de reproduction sont égaux dans toutes les régions; (notons que les taux nets de reproduction tiennent compte des migrations). Cette propriété est illustrée dans la formule IV dans laquelle on ramène en même temps à l'unité tous les taux nets de reproduction; ceci n'est possible que si tous les taux nets sont égaux.

- Si B représente une matrice diagonale des taux de natalité, et V le vecteur (1, 1 ...1) , on peut établir:

$$BV = \left[M_o \sum_x \lambda^{-x} M_x \ldots . M_1 \right]^{-1} V$$

Cette relation est à comparer avec la relation bien connue, applicable à une population unique:

$$b = 1/\int_o^w e^{-ra} \; p(a) \, da$$

- La matrice diagonale D, qui exprime les taux régionaux de sortie nette (mortalité et migration nette), pour les âges réunis, se trouve comme suit:

$$D = B - (\lambda - 1) \; I$$

A partir du modèle multirégional de base, on peut former toutes sortes de matrices stochastiques. Une matrice stochastique est définie comme une matrice de probabilités dont la somme, soit par ligne, soit par colonne, vaut l'unité. J'en énumère ici quelques-unes, sans expliciter leur développement. Elles paraîtront dans ma thèse.

Nous retenons trois régions, A, B et C. La plupart de ces matrices sont condensées quant à l'âge, Donc on peut former:

- Une matrice des probabilités que des éléments de population stable en A, B ou C émigrent dans un intervalle donné en A, B ou C. Cette matrice, stochastique par colonne, est l'équivalent d'une matrice d'émigration dans un modèle markovien simple.

- Une matrice de probabilités que les populations de A, B ou C attirent des éléments de A, B. ou C, dans une structure de population stable. Il faut ici supposer que chaque région ne peut attirer plus que son propre effectif, ni plus que l'effectif de la région de départ, et ce tout au cours de processus de redistribution. Une autre interprétation qu'on peut donner à une telle matrice, c'est qu'elle exprime des taux intrinsèques d'attraction régionale.

- Une matrice de probabilités qu'une naissance en A, B ou C provienne d'une mère née en A, B ou C. Si on élève cette matrice au carré, on obtient les probabilités qu'une naissance en A, B ou C provienne d'une grand-mère <u>maternelle</u> née en A,B ou C.

- Une matrice de probabilités qu'une mère née en A, B ou C ait ses enfants en A, B ou C. Mise au carré, cette matrice exprime les probabilités que les petits enfants issus d'une grand-mère maternelle née en A, B ou C naissent en A, B ou C.

- Une matrice de probabilités de passage d'une région à l'autre au cours de la vie, étant donnée une distribution régionale stable des naissances; ici on isole de façon condensée l'action de redistribution de la table multirégionale, mais en pondérant cette table par une distribution régionale des naissances.

- Une matrice anti-symétrique de taux d'échange net entre régions (matrice non stochastique).

Conclusion.

On pourrait allonger la liste. En fait une foule de mesures peuvent être développées selon les intérêts du chercheur. Pour ma part, j'aimerais vous indiquer deux domaines de recherche pour lesquels le modèle multirégional peut beaucoup apporter:

1° J'ai mentionné tout à l'heure que le modèle démographique unisexuel se limite généalogiquement à un modèle unilinéaire; je crois que le modèle multirégional, qui a fait ressortir cette insuffisance, peut faciliter le développement d'un modèle bisexuel qui corresponde à une filiation bilatérale.

2° On a développé des modèles de transition démographique (transition veut dire ici passage d'un régime démographique à un autre), souvent sans se préoccuper de la mobilité; c'est à mon avis un phénomène essentiel dans la transition démographique, et le modèle multirégional permettra d'en rendre compte.

Je ne voudrais pas donner l'impression que le modèle multirégional est tout-puissant; il permet simplement de maîtriser un plus grand nombre de phénomènes.

En particulier, nous avons vu que la mobilité s'adapte très bien au modèle démographique "naturel" si on remplace l'idée de population fermée par celle de système clos de population ouverte. Mais la mobilité fait plus que s'adapter au modèle naturel, elle en aide la compréhension.

CLAUDE DIONNE
INRS - URBANISATION

BIBLIOGRAPHIE[1]

FEENY, G., "Stable age by region distribution", Demography, Vol.6, 1970, pp. 341-348.

FEENY, G., "Two models for multiregional population dynamics", Environment and Planning, Vol. 5, 1973, pp. 31-43.

GANTMACHER, F.R., Théorie des matrices, Tome II, Dunod, Paris 1966.

KEYFITZ, N., Introduction to the Mathematics of Population, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1968.

LESLIE, P.H., "On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics" Biometrika, Vol. XXXIII, nov. 1945, pp. 185-212.

POLLARD, A.H., "The measurement of reproductivity", Journal of the Institute of Actuaries, Vol. LXXLV, 1948, pp. 288-318.

ROGERS, A., "The multiregional matrix growth operator and the stable interregional age structure", Demography, Vol. 3, 1966, pp. 537-544.

ROGERS, A., "The mathematics of multiregional growth", Environment and planning, Vol. 5, 1973, pp. 3-29.

SIKES, Z.M., "Population, Projections and Markov Chains", Congrès de l'U.I.E.S.P., Londres, 1969, 7 p.

WATTELAR, C., "Représentations matricielles du mouvement naturel et du mouvement migratoire d'une population" Recherches économiques de Louvain, Nov. 1971, pp. 378-432.

---

1 Pour une bibliographie plus exhaustive, voir le numéro spécial sur la démographie: Environment and Planning, Vol. 5, No 1, 1973.

ANNEXE I

A- Matrice de Leslie (4 groupes d'âges)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_oF_3 & S_oF_4 \\ S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 \end{bmatrix}$$

S_o = taux de survie entre la naissance et le premier groupe d'âge

S_i = taux de survie entre i et i + i

F_i = taux de fécondité à l'âge i

La relation suivante est vérifiée à l'état stable:

$$L - \lambda I \quad X = 0$$

où X est le vecteur de population selon le groupe d'âges.

B- Matrice de Rogers (3 régions désignées par A, B et C)

$$G = \begin{bmatrix} S_A & M_{BA} & M_{CA} \\ M_{AB} & S_B & M_{CB} \\ M_{AC} & M_{BC} & S_C \end{bmatrix}$$

(4 groupes d'âges numérotés 1 à 4)

$$S_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_{A3} & F_{A4} \\ S_{A1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{A2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{A3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_{BA3} & F_{BA4} \\ e_{BA1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{BA2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{BA3} & 0 \end{bmatrix}$$

S_{A1} = probabilité de survivre en A, en passant du groupe d'âges 1 au groupe d'âges 2.

F_{A3} = taux de fécondité du groupe d'âges 3 en A, déterminant le nombre de nouveaux-nés qui resteront en A à la fin de l'intervalle de temps.

F_{BA3}= taux de fécondité du groupe d'âges en B, déterminant le nombre de nouveaux-nés qui se retrouveront en A à la fin de l'intervalle de temps.

e_{BA1}= probabilité d'émigrer de B en A, en passant du groupe d'âges 1 au groupe d'âges 2.

$GW^{(t)} = W^{t+1}$ ou $GW = \lambda W$ (à l'état stable)

où $W = [W_A, W_B, W_C]$

C- <u>Matrice de Feeny</u> (4 groupes d'âges)

$$P= \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_oF_3 & M_oF_4 \\ M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \end{bmatrix}$$

(3 régions A, B et C)

$$F_3 = \begin{bmatrix} F_{A3} & 0 & 0 \\ 0 & F_{B3} & 0 \\ 0 & 0 & F_{c3} \end{bmatrix}$$ (matrice de taux de fécondité)

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1-e_{A1} - q_{A1} & e_{-BA} & e_{CA1} \\ e_{AB_1} & 1-e_{B1}-q_{B1} & e_{CB_1} \\ e_{AC_1} & e_{BC1} & 1-e_{C1}-q_{C1} \end{bmatrix}$$ (matrice de mobilité et de survie)

$[P - \lambda I] X_{ij} = 0$ (à l'état stable)

où $X_{ij} = [X_{ij}, X_{2j}, X_{3j}, X_{4j}]$ '

ANNEXE II

Développement de l'équation V.

La matrice P, de Feeny, peut être considérée comme la multiplication d'une matrice diagonale M et d'une matrice de fécondité F, comme suit[1] :

$$\begin{bmatrix} M_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_2 & F_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_oF_2 & M_oF_3 \\ M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \end{bmatrix}$$

A la super matrice P est relié le super-vecteur X_1, X_2, X_3, X_4 [2].
On peut également former la matrice P* :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & F_2 & F_3 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_o & 0 & 0 & 0 \\ C & M_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_2M_2 & F_2M_3 \\ M_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & 0 \end{bmatrix}$$

A la super-matrice p* correspond le super-vecteur (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) , ou Y, représente les naissances distribuées comme les mères à la fin de la période, $Y_2 = Y_1$, $Y_3 = Y_2$ et $Y_4 = X_3$ P et P sont des matrices semblables et ont le même ensemble de racines caractéristiques. En effet, M^{-1} P M = P* et F^{-1} p* = p.

Pour la même racine caractéristique, on peut écrire X = MY et Y = FX, de sorte que $[F - M^{-1}]$ X = o, où:

[1] M_o est un cas particulier en ce qu'elle est diagonale.

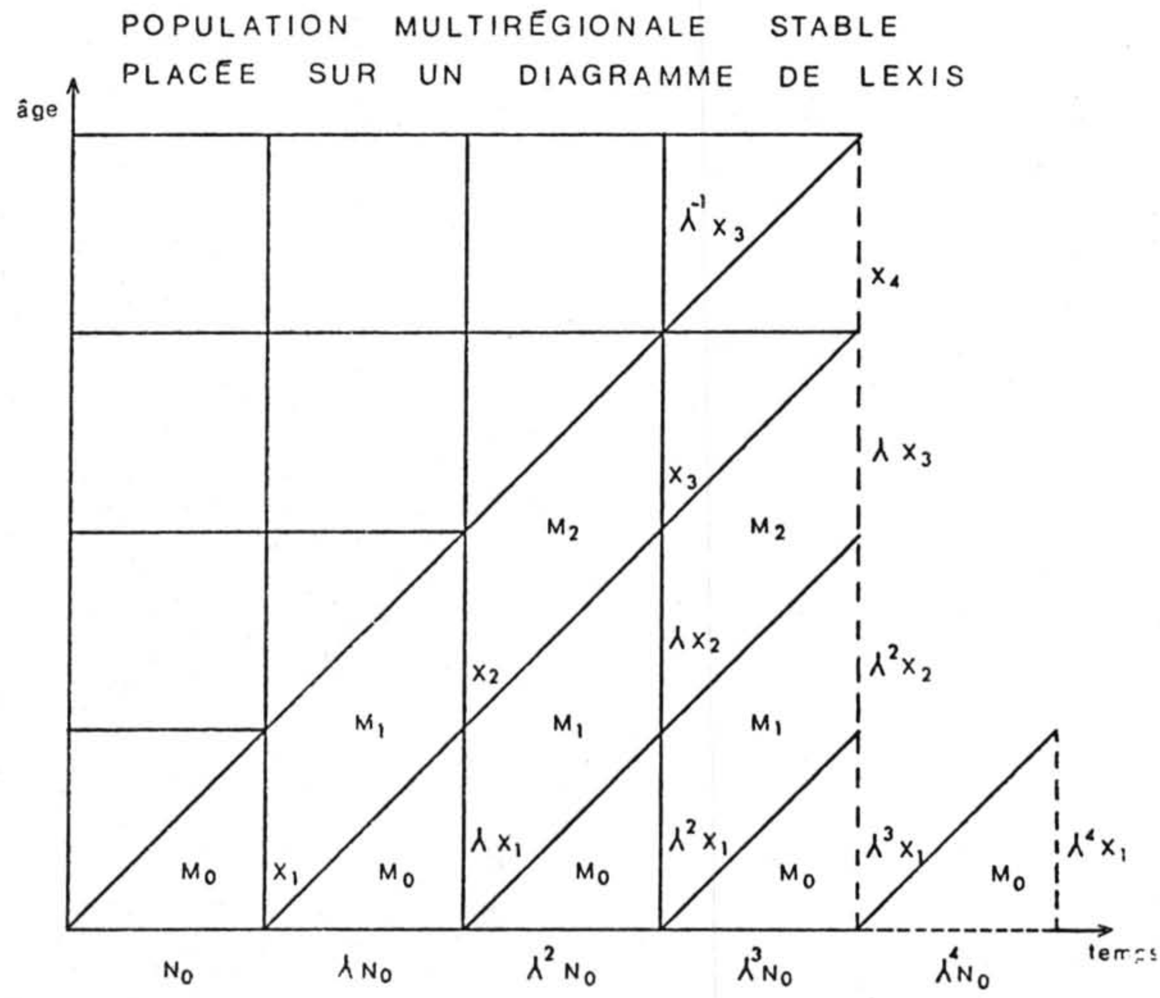
$$\begin{bmatrix} -M_o^{-1} & 0 & F_2 & F_3 \\ I & -M_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & -M_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I & -M_3^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = 0$$

Par substitution, le système se ramène à:

$$\left[F_2\, M_o\, M_2\, M_1 \;+\; F_3\, M_o\, M_3\, M_2\, M_1 \;-\; I\right] X_1 = 0$$

ou plus généralement,

$$\left[M_o \;\; x \;\; F_x\, M_x \ldots\, M_1 - 1\right] X_1 \;= 0$$


POPULATION MULTIRÉGIONALE STABLE
PLACÉE SUR UN DIAGRAMME DE LEXIS
âge
$\lambda^{-1}x_3$
x_4
λx_3
x_3
M_2
M_2
λx_2
x_2
$\lambda^2 x_2$
M_1
M_1
M_1
λx_1
$\lambda^2 x_1$
$\lambda^3 x_1$
$\lambda^4 x_1$
x_1
M_0
M_0
M_0
M_0
M_0
N_0
λN_0
$\lambda^2 N_0$
$\lambda^3 N_0$
$\lambda^4 N_0$