

La réserve mathématique

Arthur Léveillé

Volume 5, numéro 1, 1937

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/1102847ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/1102847ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0004-6027 (imprimé)

2817-3465 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Citer ce document

Léveillé, A. (1937). La réserve mathématique. *Assurances*, 5(1), 13–20.
<https://doi.org/10.7202/1102847ar>

Résumé de l'article

Nous sommes très obligés à M. le doyen Léveillé de cet excellent article dans lequel il expose simplement une question complexe. On y trouvera l'explication théorique de calculs sur lesquels repose la sécurité même de l'opération d'assurance, dont la première phase est la souscription du contrat et la dernière, le versement de l'indemnité. – A.

La réserve mathématique

par

ARTHUR LÉVEILLÉ

Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Montréal
professeur titulaire de mathématiques financières à l'Ecole des Hautes Etudes
Commerciales de Montréal

Nous sommes très obligés à M. le doyen Léveillé de cet excellent article dans lequel il expose simplement une question complexe. On y trouvera l'explication théorique de calculs sur lesquels repose la sécurité même de l'opération d'assurance, dont la première phase est la souscription du contrat et la dernière, le versement de l'indemnité. — A.

La réserve mathématique en assurance offre un problème complexe. Il a paru utile de présenter d'abord une vue simplement théorique de la question, en tenant compte uniquement des primes pures et des indemnités. Un second article, écrit par un praticien de l'assurance, posera le problème dans son cadre réel et en indiquera les solutions généralement acceptées.

Origine de la réserve

Pour comprendre ce que c'est que la réserve dans une police d'assurance sur la vie, il faut considérer d'abord la prime naturelle. La prime naturelle est l'équivalent mathématique du risque annuel couru par la compagnie. Par exemple, un

14

homme de quarante ans achète une police d'assurance de \$1,000. — D'après la table de mortalité connue sous le nom de « American Experience Table », la probabilité de décès pendant l'année, pour une tête de quarante ans, est de 0.009794; la compagnie est donc exposée à payer \$9.79 à la fin de l'année. La valeur actuelle de ce risque, escompté à $3\frac{1}{2}\%$, est de \$9.46; c'est la prime naturelle que notre homme devrait payer à la compagnie pour compenser le risque couru.

Comme le risque annuel, proportionnel à la probabilité de mort, va en augmentant avec l'âge, la prime naturelle va aussi en augmentant. Ainsi, pour un homme de 60 ans elle serait de \$25.79, et pour un homme de 80 ans, elle serait de \$139.58. On comprend l'inconvénient très grave de cette prime naturelle: augmentant avec l'âge, elle imposerait à la vieillesse un fardeau écrasant.

Pour obvier à cette difficulté, on a adopté le système de la prime constante (dite uniforme ou nivelée), sorte de moyenne entre la plus petite et la plus grande des primes naturelles.

Au début du contrat, et pendant un certain nombre d'années, la prime uniforme dépasse la prime naturelle. La compagnie d'assurance reçoit plus qu'elle ne débourse. Ce surplus de recettes est mis en réserve, au crédit de l'assuré; ce fonds va s'augmentant, année par année, des surplus successifs et de leurs intérêts composés : c'est lui qui constitue la réserve mathématique.

On pourrait ici faire une difficulté et dire : tant que l'assuré vit, il ne reçoit rien — si l'on exclut la dotation, pour le moment. Comment peut-on parler de déboursés faits par la compagnie ? Il est vrai, l'assuré ne reçoit pas d'argent pendant ce temps-là, mais il reçoit tout de même quelque chose; il reçoit l'assurance, la protection contre un danger probable, et ce risque annuel, évalué en argent c'est la compagnie qui le sup-

porte, elle a donc parfaitement le droit de déduire la prime naturelle de la prime uniforme et de porter au crédit de l'assuré seulement la différence entre les deux primes.

La chose devient peut-être plus claire quand on considère non pas un individu, mais un groupe d'assurés du même âge. Alors, en effet, la compagnie paie réellement les indemnités aux héritiers des têtes disparues; elle reçoit, par contre, les primes des survivants: il y a donc bien en ce cas, recettes et déboursés.

15

Au reste la formation de la réserve varie suivant la nature du contrat et le mode de paiement des primes; nous le verrons tout-à-l'heure en étudiant le calcul de la réserve.

A quoi sert cette réserve ? Nous avons vu que la prime uniforme était intermédiaire entre les primes naturelles extrêmes: trop forte au début du contrat, elle devient insuffisante au bout d'un certain nombre d'années, c'est alors que la réserve intervient pour combler le vide entre le risque à supporter et les primes à recevoir.

On peut donc envisager la réserve mathématique sous deux aspects :

- a) comme la différence entre les primes reçues et les indemnités versées;
- b) comme un fonds qui, augmenté des primes à recevoir, permettra à l'assureur de verser les indemnités futures.

Dans le premier cas, on regarde le passé; dans le second cas, on regarde l'avenir.

La première méthode s'impose en comptabilité: d'une clarté parfaite, elle s'appuie sur des faits constatés; elle donne la réserve réelle.

La deuxième méthode semble plus commode aux actuaires; elle dispense de longs tableaux de chiffres et permet

l'usage de formules rapides. Les deux méthodes conduisent évidemment au même résultat, pourvu que la table de mortalité soit d'accord avec l'expérience.

16 La réserve est un dépôt que l'assuré fait à la compagnie pour lui permettre de faire face à ses obligations futures. La compagnie est donc responsable de cette réserve; elle doit la garder intacte et la faire profiter prudemment. C'est une obligation de justice envers les assurés; c'est aussi une nécessité vitale pour le fonctionnement régulier de l'assurance. Cette importance capitale de la réserve a été reconnue par l'état; des lois sévères en exigent le maintien et règlent les conditions de placement.

Comment se calcule la réserve?

La réserve peut se calculer d'après l'une ou l'autre des deux méthodes déjà indiquées. Les résultats varient évidemment suivant la nature du contrat et les conventions faites sur les primes.

Pour se faire une idée de la variation des réserves on peut considérer:

- a) l'assurance vie-entière, ordinaire, à primes annuelles prolongées jusqu'à la mort de l'assuré;
- b) l'assurance vie entière, à primes limitées en nombres;
- c) l'assurance mixte, temporaire avec dotation;
- d) l'assurance temporaire, sans dotation.

a) Considérons une police de \$1,000, sur une tête de 40 ans. La prime uniforme est de 23.50; la prime naturelle à 40 ans, est de 9.46; la compagnie reçoit un surplus de \$14.04.

Voyons la situation vingt ans plus tard. La prime uniforme est toujours de 23.50; la prime naturelle est de \$25.79.

La situation est renversée; la compagnie reçoit moins qu'elle ne donne.

Le changement est survenu entre 58 et 59 ans. A 58 ans, la prime naturelle est de 22.16; à 59 ans, elle est de \$23.87. Elle augmente ensuite rapidement, de sorte que la compagnie doit entamer la réserve pour faire face aux indemnités. Que devient alors cette réserve ?

Théoriquement, elle doit augmenter, car la réserve doit combler le vide entre le risque et la valeur actuelle des primes à recevoir. Or pour l'individu qui vieillit, le risque augmente puisque l'échéance se rapproche, et les primes futures diminuent: la réserve doit donc augmenter. Mais comment peut-elle augmenter si la compagnie en prend une partie chaque année pour payer les indemnités ?

Voyons les chiffres.

La réserve à 60 ans, est de 367.63. La différence entre la prime naturelle et la prime uniforme, qui est de $25.79 - 23.50 = \$2.29$, se trouve amplement compensée par l'intérêt annuel de 367.63 à $3\frac{1}{2}\%$.

On pourrait donc penser que la croissance de la réserve est assurée par le simple jeu des intérêts des surplus accumulés. Mais si l'on va plus loin et si l'on examine la réserve à 80 ans, on constate que l'écart entre la prime naturelle et la prime uniforme, $139.58 - 23.50 = 113.08$, dépasse largement l'intérêt annuel de la réserve. Le jeu des intérêts ne suffit donc pas à expliquer la croissance de la réserve mathématique.

Il faut distinguer entre la réserve totale du groupe et la réserve individuelle. A partir d'un certain âge, la réserve totale va en diminuant, mais la réserve individuelle ne cesse pas de croître. En effet, la réserve individuelle est le quotient de la réserve totale par le nombre de survivants; or le nombre de survivants diminue plus vite que la réserve totale, de sorte que la fraction va toujours en augmentant. Le tableau ci-dessous,

qui se rapporte aux dernières années de la vie, marque clairement cette double tendance.

Tableau des réserves sur une police de \$1,000, souscrite à 40 ans.

18

Age	Réserve au début	Primes reçues au début	Total	Intérêt à 3½%	Indemnités à la fin	Survivants à la fin	Réserve individuelle
91	418,096	10,857	428,953	15,013	246,000	226	916.51
92	197,966	5,076	203,042	7,106	137,000	79	925.92
93	73,148	1,857	75,005	2,625	58,000	21	934.76
94	19,630	494	20,124	704	18,000	3	942.67
95	2,828	71	2,899	101	3,000		—

b) Dans le cas d'une assurance à paiements limités, mettons 20 paiements, quand la vingtième prime aura été versée, la compagnie n'aura plus rien à recevoir de ses clients: la réserve devra donc, dans la suite, être égale à la prime unique qu'il faudrait verser pour s'assurer à l'âge considéré.

A soixante ans, cette prime est de 626.92. Si l'on considère le groupe de vivants $l_{60} = 57917$, on pourra dresser le tableau suivant :

A 60 ans — Réserve initiale	626.92×57917	=	36,309,325
Intérêt à 3½%		=	1,270,826
Total		=	37,580,251
Indemnités payables en fin d'année		=	1,546,000
Réserve totale en fin d'année		=	36,034,251
Nombre de survivants	l_{61}	=	56,371
Réserve individuelle		=	639.23

Si l'on continuait le tableau jusqu'à 94 ans, on trouverait une réserve totale de 2,898.00, donnant à chacun des trois survivants une réserve de 966.19, ce qui, augmenté de

l'intérêt à $3\frac{1}{2}\%$ fournirait à la fin de l'année suivante le montant de \$1000 de l'indemnité échue.

c) Le cas d'une assurance-dotation est comparable à celui d'une assurance vie-entière, le risque étant seulement plus rapproché. Ainsi, pour une police d'assurance-dotation de vingt ans, reposant sur une tête de quarante ans, l'échéance finale n'est pas à 96 ans mais à 60 ans. La réserve ira donc toujours en croissant.

19

d) Reste le cas, purement théorique, d'une assurance temporaire sans dotation. Reprenons l'exemple de notre homme de 40 ans, et supposons qu'il s'assure pour 20 ans. S'il atteint 60 ans, la compagnie ne lui doit plus rien; la réserve à ce moment est donc nulle. La prime uniforme étant plus élevée que la prime naturelle pendant les premières années, il se formera une réserve; cette réserve croîtra pendant un certain temps, puis diminuera jusqu'à zéro.

* * *

Remarques. — I. Nous n'avons pas examiné, le cas où une police d'assurance serait payée d'un seul coup, par une prime unique. La réserve se trouverait alors constituée en bloc, dès le début; elle irait ensuite toujours en augmentant, sauf dans l'assurance temporaire, comme nous venons de l'indiquer.

II. On peut étudier l'influence du taux d'intérêt sur le calcul des réserves. La question n'est pas simple, et il ne faut pas se hâter de conclure.

Sans doute, dans le cas où il n'y a plus de primes à percevoir, la réserve est plus faible lorsque le taux est plus élevé: on comprend en effet que pour faire face aux indemnités futures on ait besoin d'un capital moindre si l'on fait produire à ce capital un intérêt plus fort.

A S S U R A N C E S

Mais quand il y a encore des primes annuelles à percevoir, la réserve à un âge quelconque est la différence entre la prime unique à cet âge et la valeur actuelle des primes uniformes qui restent à payer Or, une variation dans le taux d'intérêt affecte toutes les primes, et la résultante de ces effets sur la réserve n'est pas évidente.

On aura, par exemple, le tableau suivant :

	3 ½ %	4%
20 A 40 ans — La prime annuelle uniforme ...	23.50	22.35
A 60 ans — La valeur actuelle des primes futures ...	259.29	238.03
A 60 ans — La prime unique ...	626.92	590.46
A 60 ans — La réserve mathématique ...	367.63	352.43
A 80 ans — ...	745.69	733.65

III. Il ne faut pas confondre la réserve avec la valeur de rachat; mais ceci est une autre question, et qui mérite d'être traitée à part.

THE DOMINION LIFE ASSURANCE COMPANY

● qui rémunère ses agents d'après un mode tout à fait nouveau — elle les associe aux succès de l'entreprise.

● Aucune autre compagnie canadienne d'assurances ne rémunère aussi équitablement ses agents.

Parlez-leur-en.



Succursale de Montréal: ÉDIFICE DOMINION SQUARE

PAUL BABY
Gérant

ÉMILE DAOUST — A. J. PINARD
Cérants Adjoints