L'Actualité économique

Détermination d’un plan de consommation optimal par la programmation dynamique

Alain Haurie

Volume 43, numéro 3, octobre–décembre 1967

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1003264ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1003264ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Haurie, A. (1967). Détermination d’un plan de consommation optimal par la programmation dynamique. *L'Actualité économique*, *43*(3), 536–549. https://doi.org/10.7202/1003264ar

Analyse

Détermination d'un plan de consommation optimal par la programmation dynamique

Les problèmes économiques qui se posent sont rarement statiques. Les choix d'un agent économique se font dans le temps en vue de contrôler l'évolution d'un système. De l'évolution de ce système dépend la satisfaction de l'agent qui cherche donc une politique optimale, c'est-à-dire une suite de décisions qui rende maximal son critère d'utilité. Un des problèmes dynamiques les plus simples traité par la théorie économique est celui de la détermination d'un plan de consommation optimal. La caractérisation de la politique optimale est aisée, cependant elle ne conduit pas à une technique simple concernant la prise de décision dans un cas concret. Dans un problème d'économie appliquée le but visé est toujours une règle d'action simple permettant de prendre des décisions optimales ; l'exemple type de problème dynamique est celui de la gestion d'un stock ou, de façon plus générale, de la planification de la production et des stocks dans une entreprise. Ces problèmes appliqués font partie de ce qu'il est convenu d'appeler la recherche opérationnelle ; des méthodes opérationnelles de prise de décision dans des problèmes dynamiques séquentiels ont été proposées par le mathématicien américain R.E. Bellman [1] qui les a baptisées programmation dynamique. Elles n'ont à priori pas de grand rapport avec

1. *Dynamic Programming*, Princeton, 1957 ; *Applied Dynamic Programming*, Princeton, 1962 ; *Adaptive Control Processes*, Princeton, 1961.

les méthodes de caractérisation des politiques optimales obtenues en théorie économique ; mais le caractère optimal d'une politique ne doit pas être affecté par la méthode de recherche que l'on utilise, et il est donc permis d'espérer que les conclusions obtenues en théorie économique puissent être obtenues aussi par les méthodes de la programmation dynamique quand elles peuvent s'employer.

Nous allons ainsi considérer le problème de la détermination d'un plan de consommation optimal, donner rapidement les conclusions de la théorie économique puis en traitant ce même problème dans le cas où les méthodes de programmation dynamique s'appliquent, nous comparerons les résultats obtenus.

Les conditions du problème

Un consommateur se trouve au début de sa vie économique qui comporte T périodes ; il est doué de moyens de prévision parfaite, ce qui lui permet de connaître le flux de revenus qu'il recevra durant ces T périodes à venir.

Il existe un marché de titres qui permet à ce consommateur de placer ou d'emprunter pour une période, à un taux d'intérêt connu à l'avance.

Le consommateur cherche à établir un flux de consommation qui lui donne une satisfaction maximale sur l'ensemble de sa vie tout en ne laissant à sa fin pas plus de dette que d'héritage. C'est un problème d'allocation optimale de ressources limitées. Pour formuler le problème en termes mathématiques nous choisissons comme variables :

$y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots, y_T$	le flux de revenus
$c_1, c_2, \ldots, c_t, \ldots, c_T$	le flux de dépenses de consommation ou « plan de consommation »
$b_1, b_2, \ldots, b_t, \ldots, b_T$	la valeur des titres détenus à chaque période.

Une valeur négative de b_t signifie une dette en fin de période t, et on suppose qu'à chaque période, il n'y a qu'une seule date où le marché des titres soit ouvert.

$i_1, i_2, \ldots, i_t, \ldots, i_T$	les taux d'intérêt à chaque période.

La fonction d'utilité du consommateur dépend du flux de consommation.

$$U = U\ (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_t,\ \ldots,\ c_T)$$

Le taux d'intérêt composé entre les périodes t *et* τ sera $\xi_{t\tau}$, défini par :

$$1 + \xi_{t\tau} = (1 + i_t)\ (1 + i_{t+1})\ (1 + i_{\tau-1})$$

où $\tau > t$.

Dire que le consommateur ne laisse ni dettes ni héritage revient à donner la contrainte

$$b_T = 0.$$

Comme b_T dépend évidemment du flux de dépenses de consommation

$$b_T = \sum_{t=1}^{T} (y_t - c_t)\ (1 + \xi_{tT})$$

cela revient à se fixer une contrainte pour ce flux.

On peut donc poser le problème ainsi :

« Chercher l'allocation $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_t,\ \ldots,\ c_T$ rendant maximale la fonction U et soumise à la contrainte $b_T = 0$ ».

Conclusions de la théorie économique [2]

Il est facile de caractériser l'allocation optimale par des considérations purement économiques relatives aux taux de préférence intertemporelle du consommateur.

Supposons que pour compenser la diminution d'utilité due à une perte de \$1 de dépense de consommation à la période t, il faille augmenter de $\$1 + \eta_{t\tau}$ la dépense de consommation à la période $\tau > t$. $\eta_{t\tau}$ est le taux de préférence intertemporelle qui dépend évidemment du plan de consommation. Si ce plan de consommation était tel que

$$\eta_{t\tau} < \xi_{t\tau}$$

le consommateur pourrait se priver de \$1 de dépense de consommation en t, le placer à taux d'intérêt composé $\xi_{t\tau}$ jusqu'en τ, récupérer alors $\$1 + \xi_{t\tau}$ et comme

$$1 + \xi_{t\tau} > 1 + \eta_{t\tau}$$

2. Henderson and Quandt, *Microeconomic Theory*, McGraw-Hill.

augmenter sa satisfaction globale. De même si

$$\eta_{t\tau} > \xi_{t\tau}$$

le consommateur pourrait emprunter \$1 en période t et comme :

$$1 + \xi_{t\tau} < 1 + \eta_{t\tau}$$

il aurait encore augmenté sa satisfaction.

Le plan de consommation optimal devra donc être tel que les taux de préférence intertemporelle soient égaux aux taux d'intérêt composé.

En supposant que les méthodes du calcul différentiel puissent s'appliquer à la résolution de ce problème on peut obtenir de façon formelle le même résultat. On utilise évidemment la méthode du multiplicateur de Lagrange.

Si, $U = U\ (c_1, c_2, ..., c_t, ..., c_T)$ est dérivable on en trouvera le maximum sous la contrainte $b_T = 0$ en cherchant le maximum de la fonction $U\ (c_1, c_2, ..., c_t) + \lambda\ b_T$

On a donc les équations définissant les maxima, minima et points stationnaires qui sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial c_t} + \lambda \dfrac{\partial b_T}{\partial c_t} = 0 \\ b_T = 0 \end{cases} \qquad t = 1, ..., T$$

En utilisant la relation

$$\frac{\partial b_T}{\partial c_t} = -(1 + \xi_{tT})$$

et en éliminant λ entre les équations indiquées t et τ, $\tau > t$, on obtient la relation

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial c_t}}{\dfrac{\partial U}{\partial c_\tau}} = \frac{1 + \xi_{tT}}{1 + \xi_{\tau T}} = 1 + \xi_{t\tau}$$

le premier membre de cette relation est le rapport des utilités marginales du dollar de dépense de consommation en période t et en période τ. Si on prive le consommateur de \$1 en période t son utilité diminue environ de $\dfrac{\partial U}{\partial c_t}$. Si on augmente sa dépense de consommation en τ de

$$1 + \eta_{t\tau} = \frac{\dfrac{\partial U}{\partial c_t}}{\dfrac{\partial U}{\partial c_\tau}}$$

on rétablit son niveau d'utilité, $\eta_{t\tau}$ est le taux de préférence intertemporelle dont nous parlions il y a un moment.

Le plan de consommation optimal est bien caractérisé, mais peut-on dériver de cette caractérisation une règle de décision simple ? En général la solution des équations des conditions du premier ordre pour avoir un maximum est difficile ; de plus, cette solution comporte les maxima, minima et autres points stationnaires d'où la nécessité d'obtenir des conditions du 2ème ordre caractérisant le maximum : c'est le fameux « Hessien bordé » aux allures quelque peu monstrueuses. Les difficultés rencontrées peuvent être dues au fait que la méthode employée est trop générale et ne tient pas compte de propriétés particulières que peut avoir ce problème d'optimisation. Remarquons en passant que cette généralité de la méthode n'est pas si grande car il est facile d'imaginer des fonctions d'utilité non dérivables et des dépenses de consommation ne variant que de façon discrète. Dans ce cas les conclusions obtenues ne sont plus du tout valables puisque l'idée même d'utilité marginale a disparu. Revenons donc à la formulation du problème pour en faire ressortir le caractère particulier.

Système dynamique et décisions séquentielles

Le système économique que nous considérons a comme variables exogènes le flux de revenu et les taux d'intérêt, comme variables endogènes le flux de consommation et les détentions de titre.

Parmi ces variables endogènes nous discernerons des variables d'état : les détentions de titre,

b_0 : détention initiale de titres qui est nulle ;

b_t ; $t = 1, ..., T$: détention de titres à chaque période à la date où le marché est ouvert ;

et des variables de contrôle : les dépenses de consommation,

c_t ; $t = 1, ..., T$: dépenses de consommation à chaque période. On a une évolution du système représentée par la suite des états qu'il prend dans le temps et qui est contrôlée par l'agent économique au moyen du flux de dépenses de consommation. En effet, la détention de titres à la période $t + 1$, au moment où le marché est ouvert est égal à b_{t+1} qui est la somme de la détention b_t qui était placée (ou empruntée) à un taux i_t et de l'épargne $y_{t+1} - c_{t+1}$ réalisée à la période courante. On a donc un contrôle de b_t à chaque période qui se fait en respectant la relation :

$$b_{t+1} = b_t (1 + i_t) + y_{t+1} - c_{t+1}$$

L'évolution du système est soumise à une contrainte ; il faut que, à la Tième période, la détention de titres soit nulle

$$b_T = 0.$$

Nous voilà en présence d'un système dynamique, à contrôle séquentiel, devant atteindre un état final bien défini. Les décisions d'allocation de dépenses de consommation sont prises successivement et l'état du système à la période $t + 1$ ne dépend que de l'état à la période t et de la décision que l'on vient de prendre. Les suites de décisions c_t constituent des politiques, et parmi toutes les politiques amenant le système à l'état final $b_T = 0$ on cherche celle qui maximise la fonction d'utilité

$$U = U \ (c_1, c_2, ..., c_T)$$

En présentant ainsi le problème, l'aspect évolutif qui lui est propre est mis en évidence. On dispose d'un contrôle séquentiel mais, en général, les décisions ne peuvent pas être prises de façon séquentielle. La fonction d'utilité détermine les décisions à prendre et si la forme de cette fonction est générale aucune décision ne peut être prise indépendamment de l'ensemble des autres décisions ; il faut alors déterminer simultanément les dépenses de consommation rendant U maximale. C'est ce que l'on faisait par la méthode du multiplicateur de Lagrange.

Fonctions d'utilité additive et programmation dynamique

Quand l'utilité totale, résultant des T consommations, $c_1, c_2, ..., c_T$ est la somme des utilités résultant des consommations à chaque période, on peut alors bâtir un processus de décisions séquentielles donnant une politique de contrôle optimale. L'hypothèse d'additivité de la fonction d'utilité est évidemment très restrictive ; elle implique que des dépenses de consommation soient faites sur des biens dont la durée de vie n'excède jamais une période, que les dépenses faites sur des périodes successives n'interfèrent pas et qu'il n'existe pas de biens complémentaires dans deux périodes différentes. Toutes ces restrictions sont peu réalistes dans les cas les plus courants, mais on peut imaginer des situations particulières où ces hypothèses sont vérifiées. Par exemple, une riche veuve espère vivre encore dix ans et décide de consacrer ses revenus à dix croisières différentes. L'utilité qu'elle retire de chaque croisière est étroitement liée à la connaissance des pays qu'elle visite. Si chaque croisière visite des pays différents l'utilité totale de notre voyageuse peut fort bien être additive ; par contre à l'intérieur de chaque période l'utilité peut être de forme bien plus générale, pour chaque pays visité on peut considérer une utilité marginale de la dépense qui soit décroissante. Dans ces conditions particulières le problème de la détermination d'un plan de consommation optimal peut se ramener à un problème de décisions séquentielles. L'idée fondamentale est la suivante :

« La politique optimale que nous cherchons ne peut être composée que de sous-politiques optimales. »

En effet, toute politique amenant à l'état $b_T = 0$ peut être décomposée en deux sous-politiques successives, une première amenant de l'état $b_0 = 0$ à l'état $b_t = x$, une seconde amenant de l'état $b_t = x$ à l'état $b_T = 0$

Du fait de l'additivité de la fonction d'utilité la politique totale a pour utilité la somme des utilités des deux sous-politiques. Si la politique totale est optimale chaque sous-politique est optimale car si l'une des deux, par exemple la première, ne l'était pas, on pourrait trouver une autre politique amenant aussi de l'état $b_0 = 0$ à l'état $b_t = x$ qui soit plus satisfaisante. On améliorerait par là même l'utilité de la politique totale, ce qui est impossible puisqu'elle est optimale. Ce résultat fondamental a été baptisé par R.E. Bellman principe d'optimalité. On a caractérisé ainsi une politique optimale et si cette propriété n'a pas autant de signification économique immédiate que celle qui est donnée en théorie économique, elle fournit en revanche une méthode algorithmique simple pour construire la politique optimale :

— Le problème que nous considérons ici comporte T périodes et une détention finale de titres égale à 0. Il y a toute une classe de problèmes analogues comportant N périodes et une détention de titres à la fin de la $N^{\text{ième}}$ période égale à $b_N = x$. On a en fait une famille de processus d'allocation dépendant de deux paramètres.

— N nombre de périodes que dure le processus.

— x détention de titres à la fin du processus.

Alors que nous cherchons la solution d'un problème d'allocation optimale avec $N = T$ et $x = 0$, la programmation dynamique nous fera considérer la famille de problèmes d'allocations optimales pour $N = 1, 2, 3, \ldots, T$ et pour les différentes valeurs de x. La considération de la famille de problèmes plutôt que du problème particulier facilitera la recherche de la solution de ce dernier car on passera par récurrence des solutions des problèmes à N périodes à celles des problèmes à $N+1$ périodes. Partant des problèmes à 1 période qui sont simples on atteindra la solution du problème pour $N = T$ et $b_T = x$, d'une façon systématique, simple à programmer et efficace.

Appelons $V_N\ (x)$ l'utilité de la politique optimale amenant en N périodes de l'état $b_0 = 0$ à l'état $b_N = x$.

La dernière décision de cette politique est la dépense de consommation c_N.

Comme on l'a vu précédemment

$$x = b_N = b_{N-1}\ (1 + i_{N-1}) + y_N - c_N$$

On a donc l'état précédent, b_{N-1}, défini par

$$b_{N-1} = \frac{x - y_N - c_N}{1 + i_{N-1}}$$

Suivant le principe d'optimalité de Bellman la politique amenant de $b_0 = 0$ à b_{N-1} est optimale ; on appelle son utilité

$$V_{N-1}\left(\frac{x - y_N - c_N}{1 + i_{N-1}}\right)$$

à cette utilité, la dernière décision, c_N, a rajouté l'utilité $U_N(c_N)$. Donc, parmi les choix possibles de dépenses c_N le consommateur a choisi celle qui rend maximale l'expression

$$V_{N-1}\left(\frac{x - y_N - c_N}{1 + i_{N-1}}\right) + U_N(c_N)$$

On peut donc écrire la relation de récurrence

$$V_N(x) = \underset{c_N}{\text{Max}}\left[V_{N-1}\left(\frac{x - y_N - c_N}{1 - i_{N-1}}\right) + U_N(c_N)\right]$$

où il faut encore trouver l'intervalle de variation de c_N. Cela peut se faire ainsi : Considérons les deux politiques extrêmes

a) ne rien dépenser à la $N^{\text{ième}}$ période : $c_N = 0$

b) ne rien dépenser avant la $N^{\text{ième}}$ période et tout dépenser à la $N^{\text{ième}}$ période ;

alors la dépense c_N est égale à la somme de l'épargne accumulée et du revenu actuel diminuée de la valeur x de la détention de titres b_N.

$$c_N = \sum_{t=1}^{N} y_t(1 + \xi_{tN}) - x$$

Nous avons alors la formule complète.

$$V_N(x) = \text{Max}\left[V_{N-1}\left(\frac{x - y_N - c_N}{1 + i_{N-1}}\right) + U_N c_N\right]$$

$$0 \leq c_N \leq \sum_{t=1}^{N} y_t(1 + \xi_{tN}) - x$$

C'est une relation de récurrence reliant les utilités des politiques optimales pour N périodes et $N - 1$ périodes. Nous pourrons l'utiliser pour diminuer la dimension d'un problème et en simplifier la solution, ou bien pour augmenter la dimension d'un problème et passer des solutions des problèmes à $N - 1$ périodes à celles des problèmes à N périodes.

Cette relation de récurrence est à la base de la construction d'un algorithme simple permettant de trouver les politiques optimales.

L'algorithme de la programmation dynamique

Cet algorithme est facilement programmable sur un ordinateur. On procède ainsi :

1 — Trouver les valeurs $V_1\ (x)$ pour toutes les valeurs de $x = b_1$ possibles. Ce problème est élémentaire. La dépense de consommation amenant de $b_0 = 0$ à $b_1 = x$ est, évidemment,

$$c_1 = y_1 - x$$

donc $V_1\ (x) = U_1\ (y_1 - x)$

2 — Ayant les valeurs $V_1\ (x)$, chercher les valeurs $V_2\ (x)$ en utilisant la relation de récurrence.

$$V_2(x) = \text{Max}\left[V_1\left(\frac{x - y_2 - c_2}{1 + i_1}\right) + U_2(c_2)\right]$$

$$0 \leq c_2 \leq \sum_{t=1}^{2} y_t(1 + \xi_{t2}) - x$$

qui dans ce cas particulier s'écrit aussi

$$V_2(x) = \text{Max}\left[U_1\left(y - \frac{x - y_2 - c_2}{1 + i_1}\right) + U_2(c_2)\right]$$

$$0 \leq c_2 \leq \sum_{t=1}^{2} y_t(1 + \xi_{t2}) - x$$

La recherche de ce maximum est un problème simple puisqu'il n'y a qu'une seule variable, c_2.

On bâtit ainsi les valeurs $V_2\ (x)$

3 — En utilisant ainsi de proche en proche la formule de récurrence on atteint $V_T\ (0)$ qui est l'utilité de la politique optimale cherchée.

4 — On a obtenu l'utilité maximale $V_T\ (0)$ mais il nous faut maintenant détailler la politique optimale. On utilise alors la relation de récurrence dans le sens descendant ; la relation,

$$V_T(0) = \text{Max}\left[V_{T-1}\left(\frac{y_T - c_T}{1 + i_{T-1}}\right) + U_T(c_T)\right]$$

$$0 \leq c_T \leq \sum_{t=1}^{T} y_t(1 + \xi_{tT})$$

nous permet de trouver la valeur c_T qui a été choisie. En effet on connaît la valeur V_T (0) pour tous les x possibles. En cherchant une décision de dépense c_T telle que

$$V_T(0) = V_{T-1}\left(\frac{y_T - c_T}{1 + i_{T-1}}\right) + U_T(c_T)$$

On obtient la dernière décision de la politique optimale. Puis cette décision étant fixée on utilise à nouveau la relation de récurrence pour définir c_{T-1} et ainsi de suite jusqu'à c_1.

Il est clair que ces décisions ont été déterminées de façon séquentielle ; c'est la propriété qui fait le succès de la programmation dynamique.

Les conclusions de la théorie économique redécouvertes

Il semble n'y avoir qu'un lointain rapport entre la relation de récurrence de la programmation dynamique et les équations obtenues par les méthodes du calcul différentiel. Comme nous l'avons déjà dit les solutions des équations tirées des conditions du premier ordre sont tous les points stationnaires de la fonction d'utilité. La méthode de la programmation dynamique amène systématiquement au maximum absolu de la fonction d'utilité ; il n'y a pas de conditions du second ordre à respecter. Si la fonction d'utilité permet d'employer les deux méthodes, la solution donnée par la programmation dynamique devra nécessairement vérifier les conditions du premier ordre. C'est ce que nous allons montrer ici.

Soit U la fonction d'utilité. On la suppose additive et dérivable

$$U = U_1\ (c_1) + \ldots + U_T\ (c_T)$$

La relation de récurrence de la programmation dynamique est

$$V_N(x) = \text{Max}\left[V_{N-1}\left(\frac{x - y_N - c_N}{1 + i_{N-1}}\right) + U_N(c_N)\right]$$

$$0 \leq c_N \leq \sum_{t=1}^{N} y_t(1 + \xi_{tN}) - x$$

l'expression entre crochets est maximale seulement si la dérivée première s'annule. On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial\, c_N} V_{N-1}\left(\frac{x - y_N - c_N}{1 + i_{N-1}}\right) + \frac{d\, U_N}{d\, c_N} = 0$$

D'autre part si c_N est la solution de cette équation correspondant au maximum on a

$$V_N(x) = V_{N-1}\left(\frac{x - y_N - c_N}{1 + i_{N-1}}\right) + U_N(c_N)$$

On a donc les relations nécessaires :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial c_N} V_{N-1}\left(\dfrac{x - y_N - c_N}{1 + i_{N-1}}\right) \dfrac{d U_N}{d c_N} = 0 \\ V_{N-1}\left(\dfrac{x - y_N - c_N}{1 + i_{N-1}}\right) + U_N(c_N) = V_N(x) \end{array}\right.$$

pour $N = 2, 3, \ldots, T$.

En dérivant la seconde expression écrite ci-dessus on obtient aussi les conditions nécessaires

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial c_N} V_{N-1}\left(\dfrac{x - y_N - c_N}{1 + i_{N-1}}\right) + \dfrac{d U_N(c_N)}{d c_N} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} V_{N-1}\left(\dfrac{x - y_N - c_N}{1 + i_{N-1}}\right) = \dfrac{d V_N(x)}{d x} \end{array}\right.$$

Mais on se souvient que

$$x = b_N$$

$$\frac{x - y_N - c_N}{1 + i_{N-1}} = b_{N-1}.$$

On peut donc, en utilisant ces relations, transformer les conditions ci-dessus en

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{-1}{1 + i_{N-1}} \dfrac{d}{d b_{N-1}} V_{N-1}(b_{N-1}) + \dfrac{d U_N(c_N)}{d c_N} = 0 \\ \dfrac{1}{1 + i_{N-1}} \dfrac{d}{d b_N} V_{N-1}(b_{N-1}) = \dfrac{d V_N(b_N)}{d b_N} \end{array}\right.$$

$$N = 2, \ldots, T$$

qui peuvent encore être transformées en ajoutant membre à membre les équations écrites

$$\begin{cases} \dfrac{d\,U_N\,(c_N)}{d\,c_N} = \dfrac{1}{1+i_{N-1}} \dfrac{d\,V_{N-1}\,(b_{N-1})}{d\,b_{N-1}} \\ \dfrac{d\,V_N\,(b_N)}{d\,b_N} = \dfrac{d\,U_N\,(c_N)}{d\,c_N} \end{cases}$$

Il est maintenant facile de voir que l'on a

$$\frac{d\,U_N\,(c_N)}{d\,c_N} = \frac{1}{1+i_{N-1}} \frac{d\,U_{N-1}\,(c_{N-1})}{d\,c_{N-1}}$$

ce qui nous amène par récurrence simple au résultat de la théorie économique

$$\frac{\dfrac{d\,U_t}{d\,c_t}}{\dfrac{d\,U_\tau}{d\,c_\tau}} = (1+\xi_{t\tau}) \quad \text{si } t < \tau$$

En guise de conclusion

Nous venons de voir que la dérivabilité de la fonction d'utilité permet d'écrire la relation de récurrence fondamentale de la programmation dynamique, en termes d'utilités marginales. Il est important de voir que la méthode de la programmation dynamique est efficace même quand la fonction d'utilité n'est pas dérivable. À chaque étape de l'algorithme exposé on doit chercher les maxima de différentes fonctions d'une variable. Un ordinateur peut facilement être programmé pour trouver ces maxima par comparaisons successives ; c'est là une des opérations préférées (c'est-à-dire les plus rapidement exécutées) de tout ordinateur. La programmation dynamique est une méthode puissante adaptée à un type de problème particulier : la recherche d'un processus de décisions séquentielles optimal. La linéarité de la fonction d'utilité est une condition peu réaliste en théorie économique ; cependant en recherche opérationnelle on utilise très souvent des critères de coûts, l'utilité étant alors une fonction décroissante des coûts et la linéarité d'une fonction de coût est facilement acceptable en première approximation.

Une dernière remarque mérite d'être présentée. Une des hypothèses les plus contestables du problème traité ici était celle de prévision parfaite. Les choix économiques se font dans l'incertitude, un agent économique ne connaîtra pas à la période 0 le flux de revenu qu'il recevra jusqu'à la période T et encore moins de taux d'intérêts.

Dans certains cas ces variables sont aléatoires, c'est-à-dire des ensembles probabilisés. La programmation dynamique peut s'adapter très facilement à des problèmes où l'avenir est incertain, et elle contribue alors à la théorie de la décision. Dans ses trois ouvrages consacrés à ces méthodes [3] R.E. Bellmann a présenté un grand nombre d'applications très diverses ; de la course à la lune à la recherche d'une politique optimale d'un taxi en maraude, en passant par la gestion optimale d'un stock, les problèmes résolus par la programmation dynamique sont d'une variété et d'une richesse considérables.

Alain HAURIE,
professeur à l'École des
Hautes Études commerciales (Montréal).

3. Voir note 1, p. 536.