

## Structuration intérieure d'objets géométriques dans la genèse d'idées spatiales

Dieter Lunkenbein, Huguette Allard et Cécile Goupille

Volume 9, numéro 1, 1983

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/900399ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/900399ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (imprimé)

1705-0065 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Citer cet article

Lunkenbein, D., Allard, H. & Goupille, C. (1983). Structuration intérieure d'objets géométriques dans la genèse d'idées spatiales. *Revue des sciences de l'éducation*, 9(1), 55–84. <https://doi.org/10.7202/900399ar>

Résumé de l'article

Le présent article résume les conceptions de Piaget et de van Hiele relatives à la genèse et au développement d'idées spatiales. Il montre, par la suite, la complémentarité des deux approches et met en évidence l'importance et la prédominance de structures spatio-visuelles dans la conception initiale d'objets géométriques. Les observations faites lors de l'expérimentation de l'activité de compter les faces de polyèdres sont alors intégrées dans ce contexte théorique en interprétant les procédures de dénombrement en tant que phénomènes révélateurs d'absence ou d'existence, d'émergence ou de développement de structurations intérieures d'objets géométriques chez un individu.

# Structuration intérieure d'objets géométriques dans la genèse d'idées spatiales

Dieter Lunkenbein, Huguette Allard et Cécile Goupille\*

**Résumé** — Le présent article résume les conceptions de Piaget et de van Hiele relatives à la genèse et au développement d'idées spatiales. Il montre, par la suite, la complémentarité des deux approches et met en évidence l'importance et la prédominance de structures spatio-visuelles dans la conception initiale d'objets géométriques. Les observations faites lors de l'expérimentation de l'activité de compter les faces de polyèdres sont alors intégrées dans ce contexte théorique en interprétant les procédures de dénombrement en tant que phénomènes révélateurs d'absence ou d'existence, d'émergence ou de développement de structurations intérieures d'objets géométriques chez un individu.

**Abstract** — This paper summarizes Piaget's and van Hiele's conceptions of the development of spatial ideas and shows the complementarity of these two approaches. The importance and predominance of spatio-visual structures in the initial conception of geometrical objects is stressed. The observations made during the experimentation of the task, counting the faces of polyhedra, are then integrated into this theoretical context interpreting the counting procedures as phenomena revealing the absence or existence, the emergence or development of an individual's interior structurings of geometrical objects.

**Resumen** — El presente artículo resume las concepciones de Piaget y de van Hiele relativas a la génesis y al desarrollo de las ideas espaciales y muestra la complementaridad de estos dos enfoques poniendo de manifiesto la importancia y la predominancia de las estructuras espacio-visuales en la concepción inicial de objetos geométricos. Las observaciones realizadas durante la actividad experimental de contar los lados o caras de poliedros son integradas dentro de este contexto teórico y los procedimientos de numeración son interpretados como fenómenos reveladores de la presencia o ausencia de la emergencia o del desarrollo de la estructuración interna de objetos geométricos en el individuo.

**Zusammenfassung** — Im vorliegenden Artikel werden die Konzeptionen Piagets und van Hieles bezüglich der Entstehung und der Entwicklung räumlicher Vorstellungen resümiert, um auf die Komplementarität dieser beiden Theorien hinzuweisen. Im weiteren wird die Bedeutung und das Überwiegen räumlich-visueller Strukturen als Ausgangsstadium des "Begreifens" geometrischer Objekte hervorgehoben. Beobachtungen bezüglich der Verfahren von Kindern beim Zählen der Flächen von Polyedern werden schliesslich in diesen begrifflichen Zusammenhang integriert, indem solche Verfahren als Anzeichen für die Abwesenheit oder das Bestehen, für das Entstehen oder die Entwicklung innerer Strukturierungen geometrischer Objekte gedeutet werden.

## Introduction

L'expérience décrite dans ce compte rendu<sup>1</sup> fait suite à une investigation de conceptions d'objets géométriques par des individus (enfants et adultes) lors de

\* Lunkenbein, Dieter : professeur, Université de Sherbrooke  
Allard, Huguette : professeur, Université de Sherbrooke  
Goupille, Cécile : professeur, Université de Sherbrooke

quelques activités d'exploration d'une collection de blocs polyèdres. Cette investigation (Lunkenbein, Allard, Goupille, 1981a) a révélé que l'individu, qui en est à un premier contact avec de tels objets géométriques, les reconnaît et les identifie selon l'apparence globale extérieure en les associant à des objets familiers de l'environnement ou de l'expérience préalable. Un processus d'apprentissage semble être nécessaire afin que la vision globale des objets puisse être détaillée, précisée et transformée graduellement en une conception des blocs comme objets géométriques idéalisés, identifiables par des parties constituantes et des propriétés caractéristiques. Ce changement de vision et de conception, qui peut être interprété comme progression du premier vers le deuxième niveau de pensée en géométrie, selon van Hiele, semble pouvoir être stimulé et dirigé par des activités appropriées. En particulier, des tâches dont l'accomplissement nécessite le recours à une procédure opératoire, par exemple la construction ou le dessin de blocs, le comptage des faces de blocs polyèdres ou les problèmes qui réfèrent à la structure inhérente des objets, permettent de communiquer indirectement et de façon pertinente les propriétés géométriques. Plus spécifiquement encore, la tâche de compter les faces des blocs polyèdres semble engendrer une vision structurale des objets géométriques mettant en évidence et reliant entre elles des parties constituantes dont on dénombre plus facilement les faces et dont la réunion reconstitue l'objet entier. L'expérimentation de cette tâche, qui n'a pas pu être analysée et interprétée de façon satisfaisante dans l'investigation originale, faute d'outils appropriés d'enregistrement des réactions des individus, a été reprise subséquemment à l'aide de moyens audiovisuels permettant alors d'étudier en détail les procédures de dénombrement dont se sont servis les individus. Le présent article fait état des observations recueillies lors de cette reprise d'expérience et tente d'interpréter les procédures de dénombrement en tant que phénomènes d'absence ou d'existence, d'émergence ou de développement de conceptions structurales d'objets géométriques.

Avant de relater, en troisième partie, les observations particulières de cette expérience, nous exposerons d'abord le cadre référentiel de cette expérience, c'est-à-dire les conceptions de Piaget et de van Hiele relatives à la genèse et au développement d'idées spatiales (partie 1). Par la suite, nous montrerons, en deuxième partie, la complémentarité de ces deux approches et leur pertinence dans l'observation de situations concrètes d'apprentissage pour insister, finalement, sur l'importance et la prédominance de structures spatio-visuelles dans la conception initiale d'idées spatiales.

### *I- Genèse et développement d'idées spatiales*

#### *1. Jean Piaget: genèse et caractère de la connaissance spatiale*

Selon la conception piagétienne (Montangero, 1976) les notions spatiales, qui ne représentent qu'un aspect particulier du développement des structures

cognitives générales, sont construites par l'interaction de l'individu avec son environnement réel. Dans cet environnement, l'individu *perçoit* les objets concrets et *agit* sur ceux-ci afin de s'en *modeler* des conceptions qui lui permettront de maîtriser de mieux en mieux une situation donnée ou de résoudre de plus en plus efficacement un problème posé.

Ainsi Piaget distingue-t-il deux aspects de la connaissance spatiale: les aspects *figuratif* et *opérateur*. Le rôle de l'aspect figuratif est de fournir une imitation approximative ou une copie de la réalité. Dans ce contexte interviennent les notions d'*imitation*, de *perception* et, en partie, d'*imagerie visuelle* (visualisation mentale basée sur la perception d'objets qui ne sont pas présents à l'organe des sens qu'est l'œil (Lean et Clements, 1981)). Cette dernière peut être dotée d'une *composante active* de plus en plus importante pour se développer en *imagination spatiale* qui est l'habileté à formuler des images mentales et à manipuler ces images dans la tête. Imagerie visuelle et imagination spatiale se placent donc au passage de l'aspect figuratif à l'aspect opératoire. Le rôle de l'aspect opératoire est de transformer la réalité et ce caractère actif, c'est-à-dire transformateur, est spécifique de l'intelligence. Les modes opératoires élémentaires sont les *actions concrètes* qui s'intériorisent en *opérations mentales* qui, à leur tour, s'organisent en des systèmes d'ensemble appelés «groupements» (Thérien, 1978; Lunkenbein, 1981; Wittmann, 1981).

Parmi les *opérations*, Piaget en distingue deux sortes. Les unes, les *opérations logico-mathématiques*, traitent d'éléments discrets, les discriminent, les réunissent en collections, les classifient et les mettent en relations diverses; les autres, les *opérations spatiales*, traitent d'objets continus comme les figures spatiales ou l'espace entier; elles les décomposent en parties constituantes et les recomposent en un tout organisé.

Par rapport à ces deux sortes d'opérations, Piaget distingue deux types de groupement: les *groupements logiques* et les *groupements infra-logiques*. Ces derniers sont le résultat de l'*organisation de relations spatio-temporelles* et semblent précéder les groupements logiques (Wittmann, 1975). Les *groupements infra-logiques* présentent donc, pour la genèse d'idées spatiales, un intérêt particulier puisqu'ils tiennent plus particulièrement compte des relations ou des opérations spatiales et qu'ils semblent constituer la charnière entre la pure perception de l'espace physique et l'aspect logico-mathématique de la connaissance spatiale.

À titre d'exemple, considérons un objet concret de forme icosaèdre. Une vision statique de cet objet nous fournira une perception qui s'apparente à son dessin perspectif.

Certaines actions concrètes, comme par exemple celle de *tourner l'objet* autour d'un axe passant par deux sommets opposés, pourraient faire ressortir la vision du

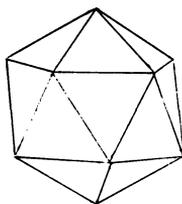


Figure 1: Vision statique de l'objet.

bloc comme étant composé de deux capuchons (de la forme d'une pyramide pentagonale) et d'une ceinture (de triangles).

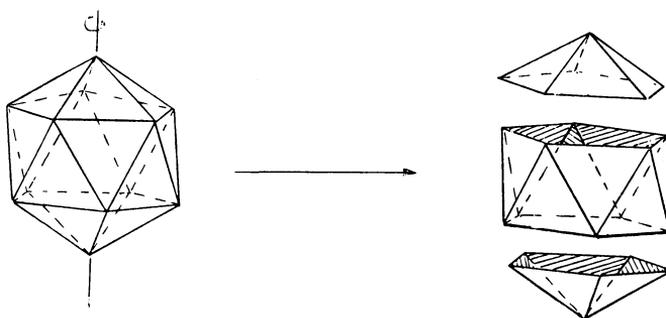


Figure 2: Structuration interne de l'objet  
(relations intrafigurales)

Ainsi l'objet géométrique est-il *décomposé* mentalement en parties constituantes qui, par la suite, peuvent être *recomposées* pour former l'objet initial entier. Pour l'individu qui a fait une telle expérience, ce bloc n'est donc plus un objet entier, saisissable uniquement par son apparence globale extérieure; il devient transformé, par ce que nous avons appelé une *structuration intérieure*, en une *image mentale* et *structurée* de nature *visuelle* et *spatiale*, qui peut identifier les parties constituantes et les opérations spatiales qui relient ces parties de l'objet entier.

L'image mentale résultant de la structuration intérieure est un exemple d'un *groupement infra-logique*. Les parties (capuchons et ceinture) sont reliées par des opérations et des relations spatiales (troncature, position opposée, etc.) au tout de l'objet qui a ainsi été enrichi d'une structure visuelle. À partir de la perception statique de l'objet, l'individu a conçu une *vision spatiale dynamique* de ces objets, vision sur laquelle son *intuition spatiale* se fondera.

L'image mentale conçue met en évidence en premier lieu des *relations intra-figurales* en comparant les parties constituantes d'une figure singulière, sans référence à d'autres figures. Ces relations peuvent alors être à l'origine de la conception de propriétés particulières de cet objet géométrique (existence de parties identiques reliées par une partie intermédiaire, etc.). Mais ces images mentales peuvent aussi faire émerger des *relations interfigurales*, comme par exemple le fait de concevoir l'icosaèdre comme composé de deux pyramides pentagonales et d'un antiprisme pentagonal.

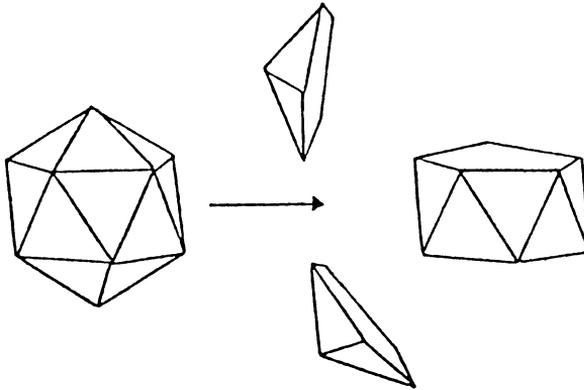


Figure 3: Genèse de relations interfigurales

Ainsi est-on amené à comparer des *polyèdres individuels* (icosaèdre, pyramide pentagonale, antiprisme pentagonal) dont on reconnaît non seulement la propriété de composition, mais aussi des ressemblances et des différences (par exemple la constitution exclusivement faite de triangles pour l'icosaèdre et faite de triangles et de pentagone(s) pour la pyramide et l'antiprisme). De telles comparaisons sont à l'origine d'activités de discrimination et de classification qui, à leur tour, sont la base d'opérations et d'organisations logico-mathématiques.

L'exemple qui précède peut servir à illustrer deux autres notions dichotomiques de Piaget, lesquelles sont étroitement reliées. Celles-ci sont, d'une part, les *pôles physique* et *logico-mathématique* de la connaissance de l'espace et, d'autre part, les mécanismes de *l'abstraction simple* et de *l'abstraction réfléchissante*. D'un côté, la connaissance physique ou les structures causales de l'espace sont tirées, en grande partie, des observations empiriques, par abstraction simple dans le cadre des efforts que fait l'individu pour expliquer la réalité. Cette connaissance physique reflète les structures du monde réel extérieur telles que les propriétés spatiales d'objets et les relations entre variables physiques. D'un autre côté, la connaissance logico-

mathématique de l'espace est constituée de structures qui n'existent pas (explicitement) dans des objets physiques et qui sont tirées des réflexions de l'individu relatives à ses propres actions ou opérations, de même qu'à leur organisation ; c'est ce que Piaget appelle abstraction réfléchissante.

Dans l'exemple précédent, les propriétés telles que la « rondeur » de la forme globale de l'icosaèdre, la forme triangulaire de toutes les faces, le nombre de faces, la décomposition en « capuchon-ceinture-capuchon » sont davantage des connaissances physiques dérivées principalement d'observations empiriques par *abstraction simple*. Par contre, la conception de la décomposition « capuchon-ceinture-capuchon », en tant que structure de *partition de l'ensemble des faces*, qui dérive essentiellement de la réflexion relative à l'opération de décomposition et de la comparaison avec d'autres structururations visuelles, n'est plus explicite dans l'objet concret. Cette conception est le résultat d'explications relatives au caractère et aux effets des opérations effectuées par l'individu : dans l'opération de composer l'icosaèdre par deux capuchons et une ceinture de triangles, le nombre total des faces reste *invariant* si l'on additionne les nombres de faces des parties, ce qui n'est pas le cas pour toute décomposition possible. Cette connaissance est donc tirée de la réflexion reliée aux opérations effectuées par l'individu (*abstraction réfléchissante*) et se situe davantage du côté logico-mathématique dans le continuum des pôles physique et logico-mathématique de la connaissance spatiale.

## 2. Pierre-M. van Hiele : niveaux de pensée, structure et langage

Tandis que l'approche piagétienne est de nature épistémologique, c'est-à-dire qu'elle vise à étudier les origines et la nature de la connaissance de l'espace, les travaux de van Hiele comportent un aspect beaucoup plus didactique. Basé sur une riche expérience d'enseignement, ce dernier constata des différences essentielles entre le traitement de l'élève et celui du professeur relativement à une matière donnée. Il formula ces différences en des *niveaux de pensée* et affirma que « l'essentiel de la notion de *niveau de pensée* réside dans la constatation que, dans chaque discipline scientifique, il est possible de penser et de raisonner à différents niveaux et que ce raisonnement fait appel à des *langages différents* » (van Hiele, 1959, p. 205). Cette différence de raisonnement est due au fait que « les matières, telles que l'élève les rencontre, sont d'une tout autre *structure* que celles qui sont connues par le professeur » (van Hiele, 1959, p. 199). « Le professeur raisonne au moyen d'un réseau de relations que lui seul possède » (van Hiele, 1959, p. 200) et qui n'est pas à la base du raisonnement de l'élève. Voici une description très succincte des trois premiers *niveaux de pensée en géométrie* tels qu'indiqués par l'auteur même (van Hiele, 1959) ou plus récemment mise en évidence par Wirszup (1976).

Au *premier niveau*, appelé le *niveau visuel*, l'individu perçoit les objets géométriques *globalement* comme entités différentes liées à l'apparence externe sans identification de composantes et de propriétés. — Le *langage* de ce niveau est caractérisé

par l'emploi spontané d'expressions très imagées et par l'association d'objets géométriques à des objets familiers de l'environnement. Des termes géométriques sont mémorisés et associés à l'apparence extérieure des formes (un rectangle est un rectangle, parce qu'on le voit ; un cube est un cube parce qu'on l'appelle ainsi). — Les structures sous-jacentes à ce « raisonnement » et qui s'expriment dans ce langage sont hautement *visuelles*. L'association d'objets géométriques à des objets de l'environnement engendre des structures que nous appelons *structures d'apparence*.

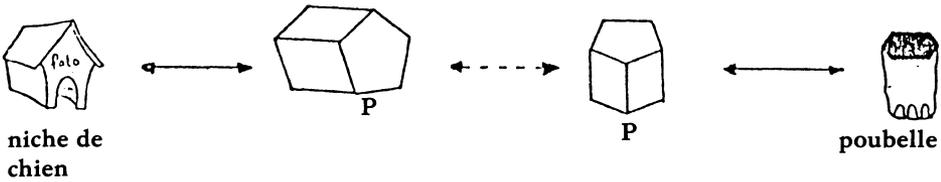


Figure 4: Structure d'apparence d'un prisme pentagonal

Les structures visuelles se manifestent également dans la reconnaissance de régularités ou dans l'identification de parties d'un tout.

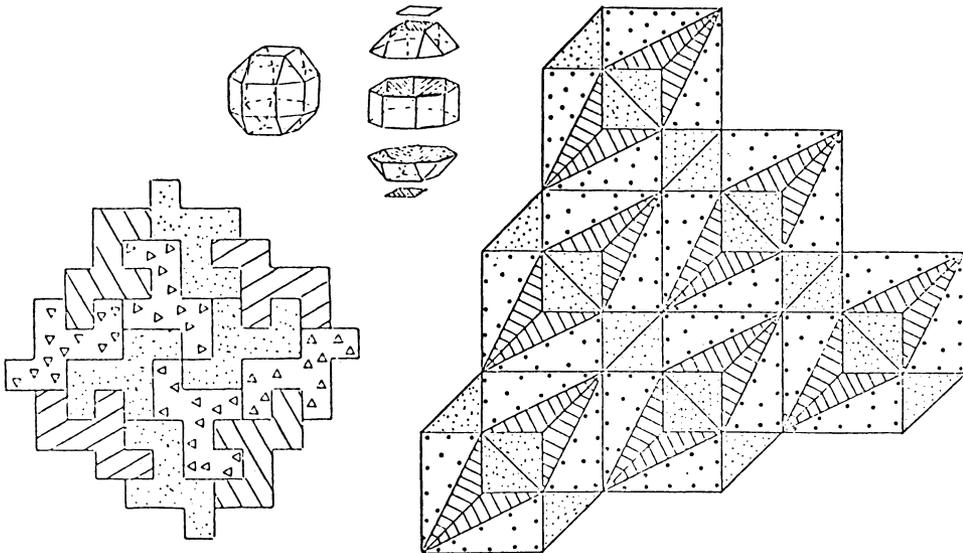


Figure 5: Structures visuelles

Au *deuxième niveau*, appelé *niveau descriptif*, les objets géométriques sont conçus comme porteurs de propriétés; les composantes et les propriétés de l'objet sont reconnues et décrites; des relations entre composantes et entre différents objets géométriques sont établies. — Le *langage descriptif* de ce niveau fait donc appel aux composantes et aux propriétés que l'individu a constatées. Exemple: « Cette figure est un losange parce qu'elle a quatre côtés égaux ». Cependant les relations logiques entre les diverses descriptions ne sont pas encore établies: « Le carré n'est pas un losange, parce qu'il a quatre angles droits ». À ce deuxième niveau, l'individu parle de, et décrit, la nature des structures du premier niveau. Les observations, les visualisations, les inventions de noms, les discussions du premier niveau ont créé un langage et une familiarité suffisante avec les choses pour motiver et rendre accessibles des précisions au niveau de la description. — Les *structures* de ce niveau *descriptif* sont des structures de discrimination, de classification et de sériation. Les ressemblances et les différences entre objets géométriques peuvent être décrites en termes de propriétés précises, ce qui permet alors les classifications selon la même propriété reconnaissable dans divers objets et selon les différenciations entre objets, lesquelles sont basées sur les différences de propriétés. Les structures descriptives de ce niveau permettent à l'individu d'agir de façon systématique à partir de descriptions précises de phénomènes spatiaux et d'accumuler ainsi un meilleur bagage de connaissance par l'expérimentation et la modélisation.

Le *troisième niveau* finalement, appelé *niveau logique*, est caractérisé par l'*émergence de relations logiques* entre les propriétés d'une figure ou de classes de figures. L'interdépendance logique de propriétés est reconnue; des démonstrations simples et des déductions locales deviennent possibles et le rôle de la définition est clarifié. Ce niveau marque alors le début de la *construction* dite *théorique* par l'établissement de *déductions* et de *théories locales*. — Le *langage* de ce niveau est davantage marqué par des arguments logiques. Les descriptions redondantes peuvent être transformées en définitions minimales dont on peut déduire d'autres propriétés implicites. Les expériences peuvent être distinguées des déductions dont on peut davantage saisir la valeur. — Ce langage est alors l'expression de l'émergence de *structures logiques*. De telles structures indiquent des catégories et des sous-catégories d'objets géométriques abstraits reliées entre elles par des relations d'inclusion.

Van Hiele indique encore deux autres niveaux de pensée que nous négligeons ici, car l'auteur même considère les trois premiers comme les plus importants et parce que, dans le contexte de cet article, les niveaux quatre et cinq ne seront d'aucune importance. Selon van Hiele, l'existence de structures est un phénomène important: la structure (le patron, la régularité) rend l'homme et l'animal capables d'agir de façon cohérente, même dans des situations qu'ils n'ont pas encore rencontrées. La formation de patrons protège l'homme et l'animal de périodes infinies

d'essais et d'erreurs. La notion de structure chez van Hiele est conçue de façon très large et est caractérisée par quatre propriétés (van Hiele, 1981a, 1981b).

- Une structure peut être *élargie* (pas nécessairement de façon unique et non nécessairement de façon indéfinie); *l'extension de la structure* est sujette aux mêmes règles que la partie originale donnée.
- Une structure peut être vue comme *partie d'une structure plus globale*; elle peut y apparaître comme sous-structure particulière.
- Une structure peut être *raffinée* par l'indication de plus de détails.
- Des structures peuvent être *comparées* par morphismes et, en particulier, par isomorphismes.

De telles structures peuvent être essentiellement différentes de caractère, ce qui situe la pensée à un niveau donné et ce qui s'exprime par un langage approprié. Ainsi, les *structures visuelles*, qui s'expriment le plus facilement par des images, indiquent-elles des activités d'observation et la reconnaissance de régularités visuelles. Il n'est pas nécessaire d'utiliser un langage verbal pour réagir à ces structures; des actions et des gestes sont souvent les premières manifestations de leur existence. Le langage verbal est alors ajouté par la désignation de mots pour identifier des parties de la structure, ce qui accroît la puissance de manifestation de la structure. — Les *structures descriptives* du deuxième niveau, qui s'expriment en des classifications (partitions) ou en des comparaisons de propriétés, indiquent une pensée descriptive explicitant des relations causales (ou autres) incluses dans les structures visuelles observées. L'émergence de telles structures va de pair avec la création d'un langage descriptif et explicatif. — Les *structures logiques* du troisième niveau, qui s'expriment en des *chaînes de raisonnements successifs* ou en termes d'implications logiques, indiquent l'émergence d'une pensée logique explicitant les relations logiques incluses dans les structures descriptives. Ainsi cette pensée concerne encore une fois la nature des structures du niveau précédent. Le langage logique de ce niveau est d'un caractère plus abstrait car il a trait aux relations dans une structure qui n'est pas visuelle.

## II- Groupements et structures

Dans les deux approches, la *conception de structures* joue un rôle central. Les structures de van Hiele (réseaux de relations, patrons, régularités, gestalts, etc.) sont conçues de façon très large et basées sur la théorie de la gestalt. La notion piagétienne de groupement a stimulé une multitude de travaux de précision et de formalisation et elle a été formulée de façon précise et très large par E. Wittmann (E. Wittmann, 1975) en termes de catégories. Cette formalisation a été instrumentale dans la collection d'exemples de groupements dans des contextes et à des niveaux très diversifiés. L'exploration de ces exemples redonne à cette notion un aspect très

dynamique et flexible qu'il n'est pas facile d'exprimer dans une définition formelle. Ainsi, la notion de groupement présente-t-elle maintenant un instrument précis et flexible permettant de décrire des images mentales structurales que l'on retrouve, ou bien dans d'autres approches théoriques, ou bien dans l'observation de situations concrètes d'apprentissage.

Dans ce contexte, il est intéressant de remarquer que les structures correspondantes aux trois premiers niveaux de van Hiele peuvent être caractérisées en termes de groupements.

### 1. Structures visuelles et groupements *infra-logiques*

Les structures visuelles du premier niveau de van Hiele manifestent une parenté marquée avec les groupements *infra-logiques*. Dans les deux cas, on identifie des parties d'un tout et on relie ces parties par des relations spatio-temporelles pour en recomposer le tout.

Par exemple, dans la structure visuelle que représente une feuille de papier quadrillée, on peut évidemment identifier les carrés en tant que parties, qui sont alors agencés de façon particulière pour composer le tout du quadrillé. Mais on peut également y identifier d'autres parties contenues dans cette structure globale :

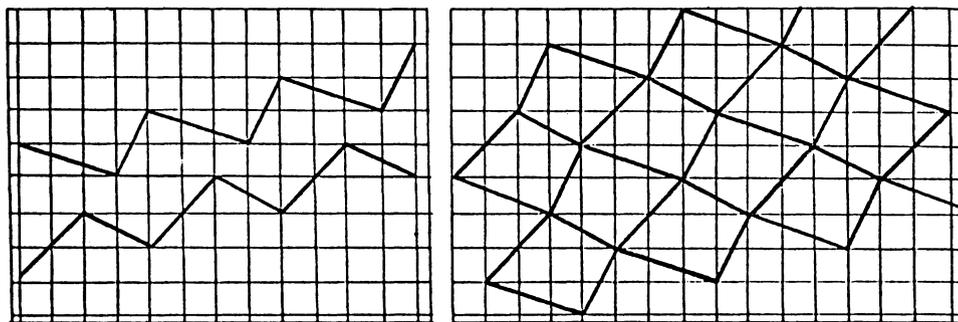


Figure 6: Structures visuelles du quadrillé

Les «scies» identifiées en première image peuvent être composées pour former la structure visuelle du deuxième dessin également contenue dans la structure originale.

Cette structure peut également être conçue comme étant composée de «chiens».

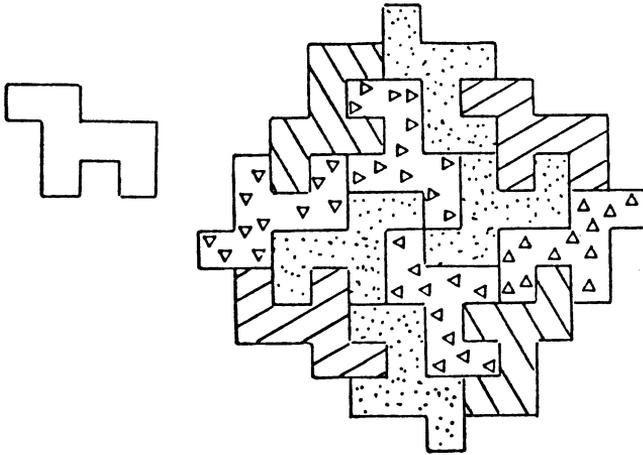


Figure 7: Patron de « chiens »

Dans le contexte tri-dimensionnel, les structures visuelles ou infra-logiques se manifestent de la façon suivante :

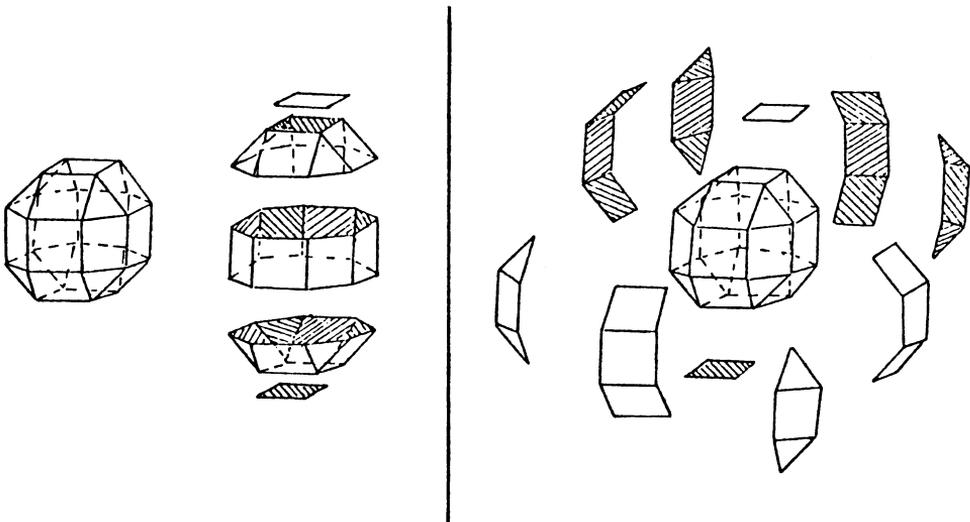


Figure 8: Structurations intérieures du rhombi-cuboctaèdre

## 2. Structures descriptives et groupements des classes d'une partition

Nous faisons un rapprochement entre les structures descriptives du deuxième niveau de van Hiele et les *groupements des classes d'une partition* (Lunkenbein, 1977, p. 281). Ces groupements sont le résultat de classifications selon des propriétés précises et hiérarchisent des classes d'après le nombre des propriétés. Ce groupement n'a pas été décrit explicitement par Piaget, mais il semble être un précurseur du groupement qu'il appelle celui de «l'emboîtement hiérarchique des classes».

À titre d'exemple, considérons la classification de quadrilatères (convexes) selon le nombre de paires de côtés parallèles (0, 1, 2), l'équiangularité (0, 1) et l'équilatéralité (0, 1).

		équilatéralité			
		0	1	0	1
paires de côtés parallèles	0	Quadrilatère 000 quelconque	/ / / /	/ / / /	/ / / /
	1	100 Trapèze	/ / / /	/ / / /	/ / / /
	2	200 Parallélogramme	201 Losange	210 Rectangle	211 Carré
		0		1	
		équiangularité			

Figure 9: Classification de quadrilatères

Par la superposition de ces trois critères de classification, on obtient six classes de quadrilatères que l'on peut symboliser par des triplets de nombres. Habituellement, ces six classes de quadrilatères sont appelées: quadrilatère quelconque, trapèze, parallélogramme, losange, rectangle et carré. Si, par la suite, on hiérarchise ces classes selon le nombre de propriétés qu'elles possèdent (ce qui pourrait signifier un degré de perfection), on obtient alors l'image structurée qui suit:

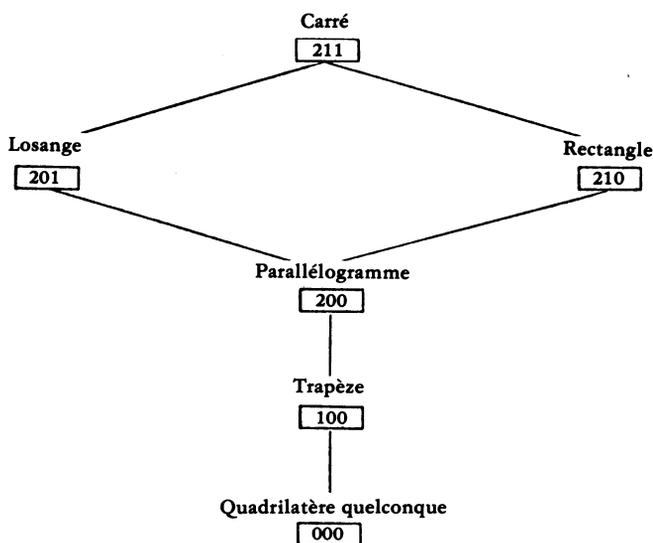


Figure 10: Groupement de classes de quadrilatères

Dans cette hiérarchisation de classes, on reconnaît facilement que le rectangle possède une propriété de plus que le parallélogramme, ou que le carré a plus de propriétés que le losange ; mais, d'après une telle structure, le carré n'est pas un losange parce qu'il a la propriété d'équiangularité de plus et appartient, pour cela, à une autre classe ne pouvant être confondue avec celle des losanges. Ce raisonnement correspond parfaitement à celui qui est indiqué par van Hiele pour le deuxième niveau de pensée et que l'on peut observer très souvent dans la pratique de l'enseignement, surtout au moment où l'on tente de faire accéder les élèves à une conception inclusive des différents types de quadrilatères.

### 3. Structures logiques et groupements logiques d'inclusions<sup>2</sup>

La conception inclusive des différents types de quadrilatères semble être basée sur l'établissement de structures logiques d'inclusion d'ensembles qui établissent des liens logiques entre les propriétés des éléments regroupés. C'est ainsi que nous relierons les structures logiques du troisième niveau de van Hiele aux groupements logiques d'inclusions de Piaget, dont la formation, dans l'enseignement de la mathématique, ne semble pas émerger sans une longue préparation et sans devoir être précédée par l'établissement de groupements de classes.

Comme exemple d'un groupement logique d'inclusion, replaçons-nous encore une fois dans le contexte des quadrilatères. Dans cet univers  $Q$ , nous retenons l'ensemble de tous les représentants qui possèdent au moins une paire de côtés parallèles et nous les appelons les trapèzes  $T$ . Si, par la suite, nous concevons

les parallélogrammes P en tant que quadrilatères possédant (au moins) deux paires de côtés parallèles, alors il est évident que ceux-ci se retrouveront dans la collection des trapèzes, car la propriété d'avoir deux paires de côtés parallèles implique qu'il faut en avoir au moins une paire. Les losanges L conçus en tant que quadrilatères équilatéraux se retrouvent ensuite dans la collection des parallélogrammes et on ne peut en trouver qui ne sont pas des parallélogrammes. Ceci semble indiquer que la propriété d'équilatéralité implique celle d'être un parallélogramme, ce qui motive, à son tour, la réflexion relative à la possibilité d'en établir une preuve rigoureuse. Il en est de même pour la propriété d'équiangularité qui définit les rectangles R. Les carrés C, finalement, émergent en tant qu'intersection des collections de losanges et de rectangles, ce qui les rend évidemment rectangles et losanges. Le schéma de cette structuration ressemble beaucoup à celui des groupements des classes, mais le sens à donner aux états et aux opérations (inclusion) est tout autre. Il en est de même pour le type (le niveau) de pensée qui correspond de toute évidence à celui du troisième niveau de van Hiele. Maintenant, le carré est aussi naturellement conçu comme losange qu'il en était différencié au niveau précédent, c'est-à-dire dans la structure du groupement de classes.

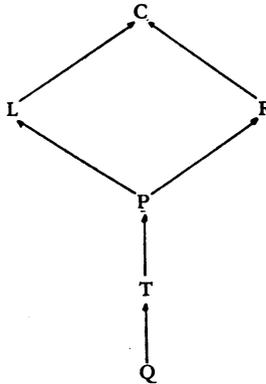


Figure 11 : Groupement logique d'inclusion de types de quadrilatères

Le rapprochement entre les conceptions de Piaget et celles de van Hiele pourra s'avérer enrichissant dans l'un et l'autre cas. En effet, par la notion de groupement, la notion de structure, chez van Hiele, risque de pouvoir être formulée de façon plus précise et plus indicative pour les divers niveaux. À l'opposé, la notion de groupement est enrichie par les caractéristiques de pensée et par le rôle du langage aux divers niveaux de van Hiele, ce qui pourra faciliter l'identification de groupements dans l'observation de situations concrètes d'apprentissage et ce qui fournira possiblement des critères plus fins pour la classification de groupements.

#### 4. Structures dans l'observation de situations concrètes d'apprentissage

Voici un exemple qui montre comment l'identification de groupements, ou de la formation de groupements dans des situations concrètes d'apprentissage, est facilitée si l'on tient compte des façons de penser et de parler des individus.

Dans une expérience conçue pour l'observation de la formation de groupements, des individus de divers groupes d'âge de l'école primaire ont été confrontés avec le problème de construction de tours à cinq étages à partir d'un approvisionnement suffisant de cubes emboîtables de deux couleurs différentes (vert et blanc); toutes les tours construites devaient être différentes et il fallait en construire autant que possible (Lunkenbein, 1980).

Cette situation est une concrétisation du problème qui consiste à trouver le nombre d'arrangements de deux éléments pris cinq à la fois ( $2^5$ ). Insérée dans un cadre référentiel (structure) de la combinatoire, elle peut être traitée à un niveau général et mathématique, ce qui représenterait alors un traitement au niveau logique. La situation pourrait également être abordée, à un niveau descriptif, en discriminant, en décrivant, en classifiant et en expliquant les diverses tours que l'on peut construire: tours à différents nombres de cubes verts; identité des tours à 2 verts; tours à 3 (5-2) blancs; autant de tours à 1 vert et à 1 blanc; etc. Mais la totalité des enfants et la grande majorité des adultes soumis à cette épreuve ont traité la situation à un niveau visuel pour en concevoir, au moins fragmentairement, des groupements infra-logiques. Voici quelques indications à ce sujet:

- les actions ou opérations pour construire ou relier des tours étaient essentiellement de nature visuelle spatiale, telles que:

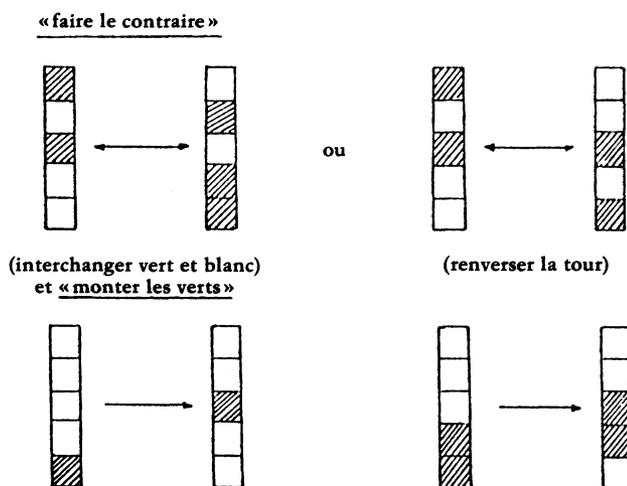


Figure 12: Opérations de nature spatio-visuelle

- après avoir construit plusieurs tours à un vert ou à un blanc, certains individus les plaçaient en ordre de la façon suivante :

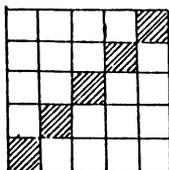


Figure 13: Structure visuelle

La complétude de cette collection de tours était alors justifiée par l'expression « parce que ça monte », « ça forme un escalier ». Une telle structure se trouve parfois transférée à des tours à deux verts :

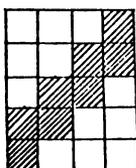


Figure 14: Structure visuelle

Elle ne permet pas de comparer toutes les tours à deux verts. Un seul enfant a ordonné toutes les tours à deux verts de la façon suivante, sans pouvoir en exprimer le critère.

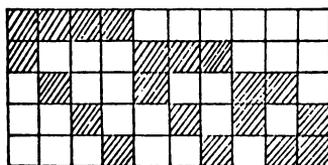


Figure 15: Structure visuelle

Ces structures visuelles sont conçues parfois temporairement et peuvent disparaître sans raison évidente. Elles se manifestent, dans la plupart des cas, par des actions (cohérentes) ou des gestes plutôt que par des explications verbales : une fillette de 7 ans, procédant de façon systématique en appliquant les deux opérations « faire le contraire », répond de façon laconique, lorsqu'on lui demande comment elle fait pour trouver d'autres tours : « Sais pas! ».

La nature spatio-visuelle des fragments de structures et le rôle que joue le langage en tant qu'indicateur de phénomènes observés révèlent que les activités du sujet sont au premier niveau, selon van Hiele. À ce niveau, l'individu ne peut pas encore penser en termes de classification ou de description précise (c'est-à-dire de façon appropriée au deuxième niveau). Cela, nous l'avons constaté par l'expérimentation d'une intervention didactique conçue pour stimuler des activités d'une classification qui a connu peu de succès chez les élèves (S. Lecomte, 1981).

##### 5. La prédominance et l'importance de structures spatio-visuelles.

Dans de nombreuses expériences relatives à l'enseignement de formes géométriques par lesquelles nous visions la discrimination et la classification d'objets géométriques concrets, nous avons observé, chez les individus, une préférence marquée pour les activités basées sur des structurations visuelles, de même qu'une habileté accrue et inattendue dans des situations faisant appel à l'imagination ou à la créativité visuelle. Cette prédominance d'aspects spatio-visuels se manifeste, entre autres :

- dans le désir des individus de composer, de décomposer et de recomposer des figures ou des formes globales à partir de parties constituantes;

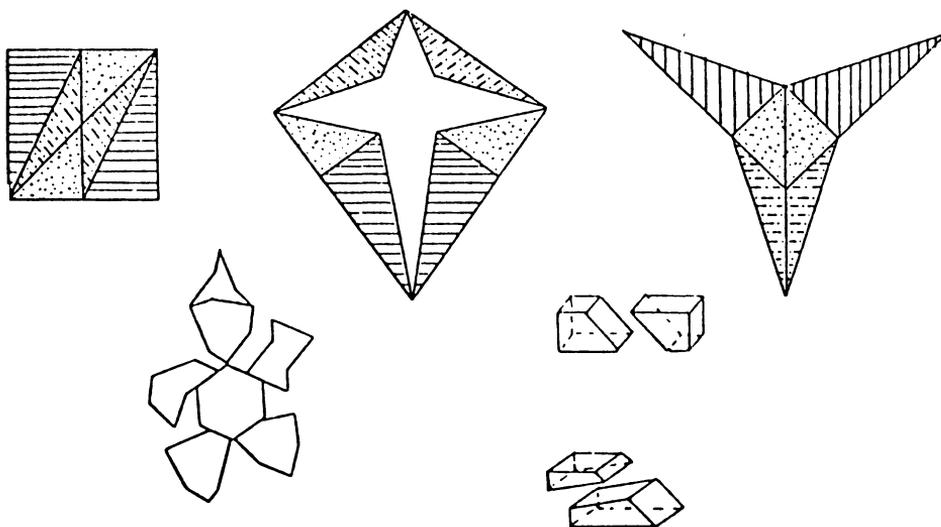


Figure 16: Composition, décomposition et recomposition de formes et de figures

- dans l'usage d'un langage hautement intuitif qui désigne des phénomènes visuels par l'association à des observations ou à des objets de l'environnement.

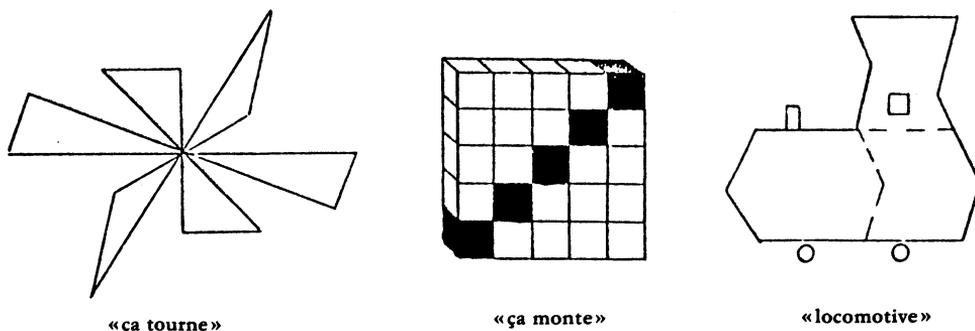


Figure 17: Structures visuelles — langage visuel

La résistance, pour des individus qui en sont à un premier contact avec des objets géométriques, à accéder à des activités de discrimination ou de classification, semble indiquer, d'après les affirmations de van Hiele, que ceux-ci, enfants ou adultes, ne sont pas prêts à opérer mentalement dans de tels schèmes; cela est probablement dû à leur manque de familiarité avec les objets considérés. C'est ainsi que ces structures visuelles se révèlent comme précurseurs indispensables à la formation de structures descriptives. La description plus fine et l'étude de l'émergence et du développement de ces structures (visuelles) sont donc cruciales pour notre compréhension de la genèse et de la formation d'idées spatiales.

Nous avons donc conçu une expérience particulière visant à identifier des phénomènes de présence ou d'absence de structures visuelles dans une situation précise. Par cette expérience, nous avons également tenté de décrire plus finement de telles structurations et ainsi de mieux connaître les phénomènes de leur émergence et de leur développement.

## II- L'expérience du comptage des faces de polyèdres

### 1. Motivation et description de la tâche

L'activité qui consiste à compter les faces d'un polyèdre nécessite, de la part de l'individu, une organisation de ses actions et l'invention d'une procédure afin qu'il puisse être sûr de son résultat. Une telle systématisation du processus doit, en l'absence d'autres moyens auxiliaires, se baser sur une décomposition de la totalité des faces en parties constituantes dont le nombre des faces s'évalue facilement. La recombinaison du polyèdre entier, à partir des parties constituantes, permet alors de

déterminer, avec certitude et de façon reproductible, le nombre total des faces. Ainsi, le comptage systématique des faces est-il fondé sur une *conception structurale* de polyèdre indiquant des *parties constituantes* qui sont reliées entre elles par des *relations spatio-visuelles* pour former le tout organisé du polyèdre entier. Une telle *structure spatio-visuelle* (van Hiele) ou un tel *groupement infra-logique* (Piaget) est dû à une *structuration intérieure* de l'objet géométrique stimulé par la manipulation de l'objet et des actions (concrètes ou mentales) que l'individu effectue sur celui-ci en vue du dénombrement de ses faces.

Par l'expérimentation de la tâche du comptage des faces du polyèdres, il devrait donc être possible d'observer, chez l'individu, des manifestations de structurations intérieures et de vérifier l'existence de structures spatio-visuelles. Plus particulièrement, cette expérience tentait de répondre aux questions suivantes :

- Quels sont les phénomènes observables d'existence ou d'absence de structurations intérieures dans le contexte du comptage des faces ?
- Peut-on identifier, pour divers polyèdres considérés, des structures spatio-visuelles précises dont se servent les individus pour compter les faces ?
- Peut-on indiquer des phénomènes décrivant l'émergence graduelle de telles structurations ?

Successivement et dans l'ordre, les sept polyèdres ci-contre ont été présentés aux candidats pour qu'ils en comptent les faces.

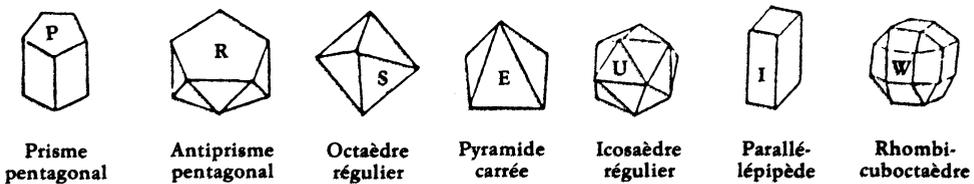


Figure 18: Polyèdres soumis à l'expérience

Douze enfants de la sixième année (11 et 12 ans) et 12 adultes futurs-maîtres (de 19 à 21 ans) ont participé à l'expérience. Parmi les enfants, on retrouve, en nombre égal, des filles et des garçons dans les catégories d'accéléérés, de réguliers et de faibles (selon le dossier scolaire). Le groupe des adultes, par contre, se compose uniquement d'étudiantes aux cours de formation de maîtres; celles-ci se sont volontairement soumises à l'expérience.

Après s'être assuré que chaque candidat comprenait bien ce que l'on désignait par une « face » dans un polyèdre, on procédait à l'exercice suivant :

*Compte à haute voix les faces de ce polyèdre en indiquant (avec ton doigt) comment tu procèdes pour le faire.*

L'expérience a été enregistrée sur bandes magnétoscopiques, à partir desquelles des protocoles d'expérience ont été rédigés (Goupille, Roy, 1980). Dans ce qui suit, nous exposons les principaux résultats de cette expérience tout en tentant de répondre aux questions posées au préalable. Ces réponses sont davantage illustrées dans un montage audiovisuel constitué d'extraits des bandes enregistrées lors de cette expérience (Lunkenbein, Allard, Goupille, 1981b).

## 2. Manifestations de l'absence et de l'existence de structurations intérieures.

L'*absence* de structurations intérieures ou la confusion de structurations fragmentaires sont manifestées dans un comptage aléatoire et inordonné. Il arrive aussi souvent à l'individu d'oublier de compter des faces que de compter la même face plusieurs fois durant son calcul. Et si, pour vérification, il reprend plus d'une fois le comptage d'un même bloc, il ne procède pas nécessairement de la même façon chaque fois. Aussi le rythme de comptage est-il lent, hésitant et peu rassuré. La séquence des appellations de nombres ne laisse reconnaître aucune régularité et le résultat du comptage est souvent faux et énoncé avec peu de conviction. Aux questions: «Es-tu sûr de ton résultat?» ou: «Pourquoi?», l'individu répond de façon négative ou par une reprise du comptage sans justification.

Ces phénomènes d'un comptage aléatoire et inordonné ne sont pas nécessairement dus à l'absence pure et simple de structurations intérieures, mais ils peuvent être justifiés aussi par:

- la *non conservation* d'une structuration durant le processus du comptage, d'une structuration si peu stable qu'elle est perdue au cours de la manipulation de l'objet;
- l'*inadéquation* d'une structuration au processus du comptage. Les structurations n'entraînant pas une partition de l'ensemble des faces ne facilitent pas nécessairement l'évaluation de leur nombre par le comptage;
- la *confusion* de structurations fragmentaires; on peut observer que la présence simultanée de différentes structurations fragmentaires empêche l'individu d'en compléter une.

Ces observations sont déjà des indices reliés à l'émergence de structurations et nous y reviendrons plus tard. Elles nous incitent, cependant, à ne pas interpréter les phénomènes du comptage aléatoire catégoriquement, en tant qu'absence de structurations intérieures.

L'*existence* de structurations intérieures de polyèdres se manifeste par l'application systématique d'une procédure de comptage. L'individu compte de façon cohérente chaque face une et une seule fois. La façon de compter les faces peut être reproduite au besoin et le rythme du comptage est régulier et sans hésitation. La séquence des appellations de nombres fait reconnaître des regroupements de faces

qui correspondent aux gestes qui les affirment. Le résultat du comptage est énoncé avec conviction (tout en étant correct, dans la plupart des cas) et peut être justifié par une reprise de la même procédure ou par des explications indiquant la structuration mentale en termes de gestes et d'expressions verbales.

De plus, ces manifestations d'un comptage systématique permettent d'identifier des structurations intérieures précises dont les individus se sont servis pour s'acquitter de la tâche donnée.

### *3. Description de structurations intérieures observées*

Dans cette section, nous décrivons, pour chacun des blocs polyèdres expérimentés, les structurations intérieures que nous avons pu observer explicitement dans le cadre de cette expérience. Nous en indiquerons aussi quelques-unes dont nous croyons avoir vu des fragments et que nous avons complétées d'après nos interprétations. Nous nous servirons principalement de dessins pour décrire ces structurations et nous utiliserons, dans la mesure du possible, les expressions des individus afin de mieux faire saisir leur vision.

Les polyèdres présentés aux candidats au cours de cette expérimentation n'ont pas révélé une égale variété de conceptions au niveau de leurs structurations. Par exemple, alors que, pour le prisme pentagonal (P), nous n'avons pu observer que deux différentes structurations, le rhombi-cuboctaèdre (W) en a stimulé cinq, selon nos observations.

Si un même polyèdre peut être perçu de différentes façons selon les candidats qui l'observent, il va sans dire que la fréquence de reconnaissance et d'utilisation peut varier d'un type de structuration à un autre pour un même polyèdre. Sans vouloir élaborer une analyse comparative de la fréquence de traitement des diverses structurations concevables pour un polyèdre donné, nous indiquons tout de même, en regard de chaque développement structural proposé, le nombre des sujets (adultes ou enfants) qui ont fait appel à ce type précis d'organisation, distinguant du même coup les utilisations achevées des utilisations fragmentaires. Nous avons consigné sous l'item « utilisation achevée » le nombre des sujets qui ont utilisé de façon non équivoque une telle structuration pour s'acquitter de la tâche proposée. Par contre, ceux des sujets qui ont fait appel à une structuration donnée, mais sans la maîtriser suffisamment (manque de liens spatiaux entre les parties constituantes, manifestation partielle de la structure, etc.), figurent sous la dénomination « utilisation fragmentaire ».

Comme un même sujet fait fréquemment appel à plus d'un type de structuration en comptant les faces d'un même polyèdre, il s'ensuit que, pour un bloc donné, la somme des fréquences en termes d'utilisations achevées ou d'utilisations fragmentaires dépasse le nombre de candidats soumis à l'expérimentation.

Voici donc, sous forme de tableau, les structurations observées lors de cette expérience.

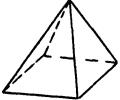
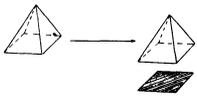
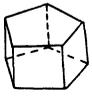
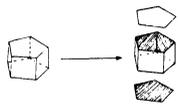
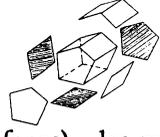
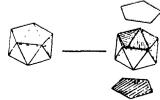
Bloc	Structurations	Fréquence					
		Utilisation					
		Achevée			Fragmentaire		
		Adultes	Enfants	Total	Adultes	Enfants	Total
Pyramide carrée  E	E <sub>1</sub>  - « Capuchon » (de faces latérales triangulaires) - base	12	12	24	0	0	0
Prisme pentagonal  P	P <sub>1</sub>  - « ceinture » de rectangles - deux « couvercles »	9	10	19	0	0	0
	P <sub>2</sub>  Cabane d'oiseaux: - le toit (2 faces) - les murs (2 + 2) - le plancher	3	1	4	0	1	1
Antiprisme pentagonal  R	R <sub>1</sub>  - « ceinture » de triangles - deux « couvercles »	12	12	24	0	0	0
	R <sub>2</sub>  - 2 « couronnes » - 2 « couvercles »	1	0	1	0	0	0

Tableau des structurations observées

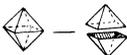
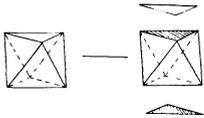
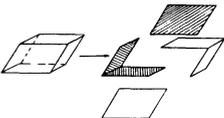
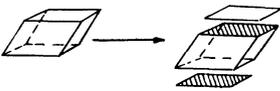
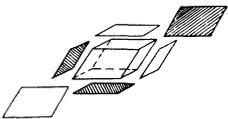
Bloc	Structurations	Fréquence					
		Utilisation					
		Achevée			Fragmentaire		
		Adultes	Enfants	Total	Adultes	Enfants	Total
Octaèdre régulier   S	S <sub>1</sub>  Double pyramide: - 2 « capuchons » de pyramide carrée	11	10	21	0	1	1
	S <sub>2</sub>  - « ceinture » de triangles - deux « couvercles »	1	1	2	0	1	1
Parallélépipède   I	I <sub>1</sub>  - deux paires de faces adjacentes - une paire de faces opposées	1	2	3	0	0	0
	I <sub>2</sub>  - « ceinture » de parallélogrammes - deux « couvercles »	6	5	11	0	0	0
	I <sub>3</sub>  3 paires de faces opposées (parallèles)	4	4	8	1	0	1

Tableau des structurations observées

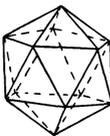
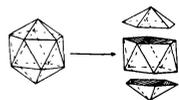
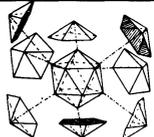
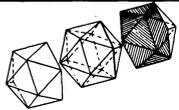
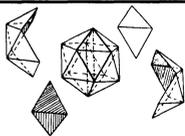
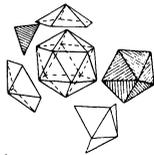
Bloc	Structurations	Fréquence					
		Utilisation					
		Achevée			Fragmentaire		
		Adultes	Enfants	Total	Adultes	Enfants	Total
Icosaèdre régulier   U	U <sub>1</sub>  – « ceinture » de triangles – 2 « capuchons »	10	9	19	0	1	1
	U <sub>2</sub>  – un « capuchon » à chaque sommet	0	0	0	1	0	1
	U <sub>3</sub>  – deux « calottes » (moitiés) composées d'un triangle central entouré de 3 trapèzes	0	0	0	1	1	2
	U <sub>4</sub>  – 2 « petits bateaux » à 8 triangles – 2 paires de triangles adjacents	1	0	1	0	0	0
	U <sub>5</sub>  – 3 capuchons adjacents – 1 triangle isolé – 4 triangles opposés au triangle isolé	2	0	2	5	3	8

Tableau des structurations observées

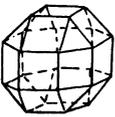
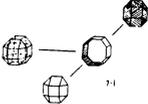
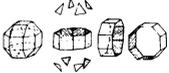
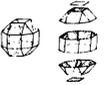
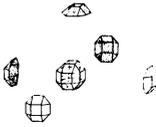
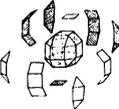
Bloc	Structurations	Fréquence					
		Utilisation					
		Achevée			Fragmentaire		
		Adultes	Enfants	Total	Adultes	Enfants	Total
Rhombi- cuboc- taèdre   <b>W</b>	<b>W<sub>1</sub></b>  – « ceinture » de carrés – 2 « capuchons »	11	8	19	0	1	1
	<b>W<sub>2</sub></b>  – 3 ceintures de carrés – 2 ensembles de 4 triangles	1	0	1	0	2	2
	<b>W<sub>3</sub></b>  – ceinture de carrés – deux calottes trouées – deux couvercles	1	2	3	1	0	1
	<b>W<sub>4</sub></b>  – 6 capuchons	0	0	0	1	0	1
	<b>W<sub>5</sub></b>  L'orange : – 8 triplets de faces (latérales) – 2 couvercles	1	0	1	0	3	3

Tableau des structurations observées

Les manifestations du comptage systématique permettent donc de déterminer avec précision les structururations intérieures conçues et utilisées par les individus. Les parties constituantes du polyèdre entier sont clairement indiquées et les relations (de contiguïté spatiale) entre ces parties en ressortent de façon évidente. Malgré le fait que ces structururations ne sont pas, très probablement, indépendantes de la tâche du comptage des faces, elles donnent pourtant des indications précises sur la « vision » ou les visualisations possibles de ces objets géométriques par ces individus. Elles représentent ainsi des exemples précis, observables et tangibles de visualisation spatiale qui permettent de décrire et d'étudier plus spécifiquement cette habileté importante pour le développement d'idées spatiales.

Quant à la variété des structururations observées pour un polyèdre donné et à la fréquence d'utilisation des diverses structururations particulières, il nous semble prématuré d'en évaluer la pertinence relative avant que des expériences plus spécifiques ne puissent compléter cet échantillon trop restreint.

#### 4. *L'émergence et le transfert de structururations intérieures*

##### a) *Les phénomènes de l'émergence*

En plus de l'observation de l'existence de structururations intérieures et de leurs propriétés, il est d'un intérêt particulier d'observer en détail *l'émergence progressive et l'affirmation* de telles structururations. Si, pour certains polyèdres comme les prismes ou les pyramides simples, cette émergence est difficile à observer à cause de la conception presque immédiate d'une structure, l'organisation graduelle de polyèdres plus complexes, comme l'icosaèdre régulier (U) ou le rhombi-cuboctaèdre (W), devient plus facilement observable.

Confrontés pour la première fois avec la tâche qui consiste à compter les faces de ces polyèdres, la plupart des individus se révèlent nettement désorganisés. Alors que certains, malgré cette perplexité, s'engagent immédiatement dans l'activité de comptage même s'ils pressentent qu'ils échoueront, faute de repère d'aucune sorte, d'autres, par ailleurs, sont beaucoup plus prudents: ils tournent et retournent le bloc dans leurs mains ou sur la table, afin d'y « découvrir » une façon d'organiser ses diverses parties et, par là, d'assurer un comptage systématique.

Dans un cas comme dans l'autre, on assiste à l'émergence progressive d'une organisation de plus en plus précise et pertinente pour le comptage. Même si nous ne sommes pas en mesure de décrire en détail toutes les activités mentales qui se produisent lors de cette période d'émergence, les mouvements des doigts, les séquences d'appellation de nombres nous semblent en dévoiler quelques-unes. D'abord, il semble que la manipulation du bloc, que ce soit lors du comptage immédiat ou lors de l'observation consciente en vue du comptage, soit à l'origine de toute organisation. Les tentatives de comptage systématique peuvent révéler des structururations partielles ou instables qui peuvent disparaître aussitôt à cause d'un

accomplissement incomplet ou à cause de l'émergence d'une structuration compétitrice. Les répétitions de tentatives de comptage révèlent parfois des essais d'accomplissement de structurations fragmentaires qui mènent possiblement à l'affirmation d'une structuration précise. Parfois ces répétitions manifestent un conflit entre plusieurs organisations intérieures possibles que l'individu ne semble pas pouvoir dissocier consciemment.

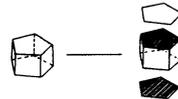
L'étude détaillée de tels phénomènes d'émergence de structurations intérieures par l'observation systématique des actions et des réactions des individus contribuera à illustrer et à préciser le processus dynamique de la genèse d'idées spatiales et, en particulier, celui de la création d'images mentales structurales de nature spatio-visuelle.

*b) Transfert de structurations intérieures*

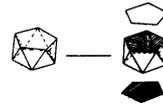
Les structurations conçues antérieurement, et qui se sont avérées pertinentes pour certains polyèdres, s'imposent parfois aux individus dans la considération de nouveaux objets.

Ce phénomène de transfert est observable, par exemple, dans la séquence qui suit, où un individu structure :

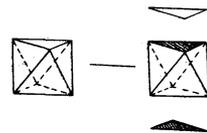
- le *prisme pentagonal* (P) en tant que paire de faces opposées reliées par une ceinture de rectangles (P<sub>1</sub>);



- l'*antiprisme pentagonal* (R) en tant que paire de face opposées reliées par une ceinture de triangles (R<sub>1</sub>) pour ensuite *transférer* la structure de la paire de faces opposées reliées par une ceinture de face à

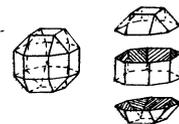


- l'*octaèdre régulier* (S), qu'il conçoit ainsi en tant qu'*antiprisme* (S<sub>2</sub>). (Habituellement ce bloc est plutôt conçu en tant que *double pyramide* (S<sub>1</sub>).

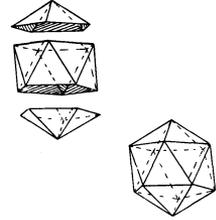


Par la suite, l'individu tente de *transférer* cette structure à l'icosaèdre régulier (U) qui ne peut pas être conçu en tant que ceinture de faces reliant deux faces opposées. Cette conception doit alors être écartée avant que d'autres structurations plus efficaces ne puissent être engendrées.

À l'occasion, le transfert d'une structuration préalable permet à l'individu de résoudre un problème jusque là insoluble. Une telle situation a été observée lorsqu'une étudiante qui ne pouvait réussir à compter les faces de l'icosaèdre (U) de façon systématique a abandonné cette tâche, pour subséquemment structu-



rer le rhombi-cuboctaèdre (W) en tant que paire de capuchons reliés par une ceinture de carrés ( $W_1$ ). Lors d'une reprise du comptage des faces de l'icosaèdre régulier (U) elle constata alors que «c'était la même chose» et structura ce polyèdre en tant que paire de capuchons (de forme pyramidale) reliés par une ceinture de triangles ( $U_1$ ).



Ces phénomènes de transfert de structurations intérieures fournissent des indications précieuses quant à la généralité et à la stabilité d'une structuration conçue et elles nous donnent alors des éléments susceptibles de décrire le développement de ces structurations. L'étude des phénomènes de transfert pourrait aussi s'avérer utile pour la conception de séquences d'apprentissage car ces phénomènes pourraient permettre de diriger le processus d'apprentissage.

### Conclusion

La possibilité d'observation d'activités mentales chez l'individu, sans que celui-ci n'ait à les décrire verbalement, nous apparaît comme le résultat le plus fascinant de cette recherche. Les actions concrètes que l'individu effectue sur un objet, les mouvements des doigts, les séquences des appellations de nombres ou le rythme du comptage ainsi que quelques expressions gestuelles ou verbales, nous semblent dévoiler, au moins partiellement, les images mentales et structurales que l'individu se construit d'un objet donné dans le cadre de la tâche qui lui est proposée.

Ces images mentales stimulées par l'activité du comptage de faces (aussi bien chez les enfants que chez les adultes) revêtent un caractère spatio-visuel et dynamique. Elles semblent être la synthèse des perceptions variées de l'objet concret et des effets qu'ont les actions et les manipulations de l'individu sur ces perceptions. Ces images comportent un aspect figuratif aussi bien qu'un aspect opératoire et représentent, pour cette raison, des exemples de *visualisations spatiales*.

De plus, des images mentales sont structurées par des opérations spatiales qui décomposent l'objet en parties constituantes et le recomposent en un tout organisé. Elles fournissent donc des exemples de *groupements infra-logiques* dans le sens de Piaget ou de *structures visuelles* dans le sens de van Hiele. Comme nous avons pu l'observer, ces structures du premier niveau de van Hiele permettent à l'individu de se comporter de façon cohérente, même si celui-ci réagit plutôt par des actions et par des gestes que de manière explicative et verbale sur ces structures. Ce phénomène témoigne d'une pensée qui se situe au niveau visuel de van Hiele et révèle une manière d'agir qui est basée davantage sur l'*intuition spatiale*.

Les observations sur l'émergence graduelle de ces structures font reconnaître, en même temps qu'elles démontrent, l'importance des manipulations et des

actions pour stimuler, chez l'individu, ces conceptions. Ces observations révèlent également l'existence d'une activité mentale intense durant cette période de recherche et d'émergence de structurations.

Ces résultats encouragent des investigations plus exhaustives de structures spatio-visuelles en vue d'une meilleure connaissance de la genèse et du développement d'idées spatiales.

#### NOTES

1. Cet article est une version abrégée d'un rapport de recherche (Lunkenbein, Allard, Goupille, 1982). La recherche a été réalisée dans le cadre d'un projet de recherche subventionné par le Ministère de l'Éducation du Québec (FCAC, EQ-646).
2. Piaget appelle ces groupements des « emboîtements hiérarchiques de classes » (Piaget, 1967, p. 50).

#### RÉFÉRENCES

- Goupille, C., Roy, J., Structurations intérieures d'objets géométriques dans la genèse d'idées spatiales, Protocoles d'expérimentation, *Complément du rapport 35*, 1980, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada, J1K 2R1.
- van Hiele, P.-M., La pensée de l'enfant et la géométrie, *Bulletin de l'APMEP*, 1959, 198, 199-205.
- van Hiele, P.-M., La discussion et la langue, *Conférence prononcée à l'Université de Sherbrooke*, avril 1981 (a).
- van Hiele, P.-M., Structures, *Manuscrit inédit d'un livre*, 1981 (b).
- Lean, Glen, Clements, M.A. (Ken), Spatial Ability, Visual Imagery and Mathematical Performance, *Educational Studies in Mathematics*, 12 (1981) 267-299.
- Lecomte, Suzette, Une expérimentation de la formation de groupements et de l'effet d'une intervention didactique sur ce processus de formation, *Mémoire de maîtrise*, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada, mai 1981.
- Lunkenbein, D., Rationalizing Teaching Interventions — A Working Model of a Process of Research in Mathematics Teaching, *Educational Studies in Mathematics*, 8 (1977) 271-293.
- Lunkenbein, D., Formation de groupements, *Rapport n° 24*, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada J1K 2R1, 1980.
- Lunkenbein, D., Groupings in the Process of Concept Formation, *For the Learning of Mathematics* 1, 3 mars 1981, 37-42.
- Lunkenbein, D., Allard, H., Goupille, C., Genèse et développement d'idées spatiales chez l'enfant et chez l'adulte, *Rapport n° 34*, Département de mathématiques et d'informatique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, J1K 2R1, 1981 (a).
- Lunkenbein, D., Allard, H., Goupille, C., Comptage de faces et structurations intérieures de polyèdres, *Montage audiovisuel d'une expérience*, Réalisation S. Lecomte, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada, J1K 2R1, 1981 (b).
- Lunkenbein, D., Allard, H., Goupille, C., Structuration intérieure d'objets géométriques dans la genèse d'idées spatiales, *Rapport de recherche n° 35*, février 1982, Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, Sherbrooke, Québec, Canada, J1K 2R1.

- Montangero, Jacques, Recent Research in the Child's Conception of Space and Geometry in Geneva: Research Work on Spatial Concepts at the International Center for Genetic Epistemology, dans Larry Martin, éd., *Space and Geometry*, ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education, Columbus, Ohio, août 1976.
- Piaget, Jean, *La psychologie de l'intelligence*, Armand Colin, Paris, 1967.
- Therien, Loïc, Le concept de groupement dans l'élaboration de situations d'apprentissage à l'élémentaire, *La gazette des sciences mathématiques du Québec*, III, 2, décembre 1978.
- Wittmann, Erich, Natural Numbers and Groupings, *Educational Studies in Mathematics* 6, 1975.
- Wittmann, Erich, Groupings, *Lecture at the 3rd Advanced Course on Cognitive Structures and Processes*, Geneva, juin 1981.
- Wirszup, Isaak, Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry, dans Larry Martin, éd., *Space and Geometry*, ERIC/SMEAC, Columbus, Ohio, 1976, 75-97.