

## Etude sur la table de mortalité

Paul Vallerand

Volume 8, numéro 3, 1940

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/1102950ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/1102950ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0004-6027 (imprimé)

2817-3465 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Citer ce document

Vallerand, P. (1940). Etude sur la table de mortalité. *Assurances*, 8(3), 109–118.  
<https://doi.org/10.7202/1102950ar>

# Assurances

Revue trimestrielle consacrée à l'étude théorique et pratique  
de l'assurance au Canada

109

Enregistrée à Montréal comme matière de seconde classe.  
Les articles signés n'engagent que leurs auteurs.

Prix au Canada:  
L'abonnement: \$1.00  
Le numéro: 25 cents

Directeur: GÉRARD PARIZEAU

Administration:  
Ch. 43  
84, rue Notre-Dame ouest  
Montréal

---

8e année

MONTREAL, OCTOBRE 1940

Numéro 3

---

## Etude sur la table de mortalité

par

PAUL VALLERAND, L.S.C., A.A.S.,

Actuaire de l'Alliance Nationale.

Dans deux numéros précédents de cette revue, celui de juillet 1939 et celui de janvier 1940, ont paru de courts aperçus des origines et usages des tables de mortalité. Dans ces deux articles, toute question technique se rapportant à l'essence même de la table de mortalité avait été soigneusement évitée. Aujourd'hui, on me demande justement d'examiner avec vous ce qu'est véritablement une table de mortalité, ce que représentent les différents symboles qui la composent et les applications immédiates qu'on peut en faire.

Cherchons tout d'abord une définition de la table de mortalité aussi simple que possible, afin de pouvoir plus facilement la retenir: la table de mortalité est un instrument qui permet de calculer rapidement à un âge donné les probabilités de vie et les probabilités de mort.

Avant d'en étudier la formation, voyons quelles fonctions ces tables contiennent et étudions un à un les symboles qui servent à désigner ces différentes fonctions.

110

*Le nombre de personnes vivantes.*  $l_x$  représente le nombre de personnes qui, selon la table, atteint en une année quelconque l'âge de  $x$  années exactement. Ce nombre n'est pas calculé directement par énumération d'un groupe de personnes atteignant l'âge  $x$ , mais il dérive d'observations préalables, tel que décrit plus loin, de sorte que les valeurs successives de  $l_x$  apparaissant dans une table quelconque soient en parfaite relation les unes aux autres.

Afin de ne pas compliquer les choses inutilement, il ne sera question ici que d'une table dérivée des statistiques démographiques d'un pays, autrement dit d'une table basée sur les recensements et les registres d'état civil. La table commencera par un nombre arbitraire de naissances,  $l_0$ , survenant en une année du calendrier.

Le suffixe de  $l$ , soit  $x$ , est ordinairement un nombre entier et on emploie une autre lettre, soit  $t$  ou  $n$ , pour désigner l'addition d'un nombre d'années soit entier, soit fractionnaire. Ainsi  $l_{x+t}$  dénote le nombre de personnes qui atteint en une année l'âge  $x + t$  exactement. Ces  $l_{x+t}$  personnes peuvent être considérées comme les survivants d'un groupe né en une année,  $x + t$  années en arrière; elles sont aussi les survivants des  $l_{x+t-1}$  personnes qui ont atteint l'âge  $x + t - 1$  l'année dernière, ou des  $l_{x+t-2}$  personnes qui ont atteint l'âge  $x + t - 2$  il y a deux ans et ainsi de suite.

*Le nombre de morts.* — Cela nous amène à parler du symbole  $d_x$ , lequel représente le nombre qui, parmi les  $l_x$  personnes atteignant l'âge  $x$ , mourra avant d'atteindre l'âge  $x + 1$ . Nous voyons donc que  $d_x = l_x - l_{x+1}$  d'où  $l_{x+1} = l_x - d_x$ .

*Taux de mortalité.* —  $q_x$  représente la probabilité qu'une personne âgée exactement de  $x$  années va mourir dans les douze mois qui suivent immédiatement son anniversaire de naissance. Ceci est connu sous le nom de taux de mortalité.

111

Nous avons vu que de  $l_x$  personnes qui atteignent l'âge  $x$ ,  $d_x$  meurent avant d'atteindre l'âge  $x + 1$ ; il en découle donc que  $q_x = \frac{d_x}{l_x}$  d'où  $d_x = l_x q_x$ .

*Probabilité de survivre un an.* — La probabilité qu'une personne âgée exactement de  $x$  années va survivre la période d'un an est représentée par le symbole  $p_x$ .

De  $l_x$  personnes âgées exactement de  $x$  années,  $l_{x+1}$  personnes atteignent l'âge  $x + 1$ ; donc  $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ .

Comme une personne d'âge  $x$  doit ou survivre un an ou mourir durant l'année, on voit que  $p_x + q_x = 1$  d'où  $p_x = 1 - q_x$ .

De la définition de la table de mortalité donnée plus haut il découle que la valeur d'une telle table dépend simplement de sa capacité à nous fournir les rapports nécessaires représentant telles probabilités de vie ou de mort dont nous pouvons avoir besoin. Les nombres apparaissant dans les colonnes de  $l_x$  et de  $d_x$  n'ont aucune importance par eux-mêmes; ce qui importe, c'est qu'ils soient les uns aux autres dans les proportions voulues permettant ainsi le calcul des probabilités et des fonctions monétaires qui en dépendent. Nous verrons plus loin en quoi consistent ces fonctions monétaires.

Si donc nous possédons la valeur de  $q_x$  à chaque âge de 0 à la fin de la table, nous pouvons commencer la table avec un nombre quelconque de naissances, ordinairement un gros chiffre, soit 100,000 ou même 1,000,000, et en multipliant ce nombre par  $q_0$ , obtenir  $l_0 q_0 = d_0$ , le nombre de morts survenant de la naissance à l'âge 1.

112 Soustrayant  $d_0$  de  $l_0$  on obtient  $l_1$ , le nombre de personnes survivant jusqu'à l'âge 1 parmi mettons 100,000 naissances; si on multiplie  $l_1$  par  $q_1$ , on obtient  $d_1$ . Soustrayant  $d_1$  de  $l_1$ , on obtient  $l_2$  et ainsi de suite jusqu'à l'âge  $\omega$ , où  $l_\omega = 0$ ;  $\omega$  désignant l'âge limite de la table; c'est-à-dire l'année de vie durant laquelle le dernier survivant meurt.

De ce qui précède, on voit facilement que pour construire une table de mortalité, ce qu'il nous faut c'est toute la série de  $q_x$ , de l'âge 0 à l'âge limite de la table.

En pratique, lorsque nous analysons la mortalité de la population d'un pays, nous avons généralement à notre disposition a) les chiffres d'un ou de plusieurs recensements, donnant le nombre de personnes vivantes à chaque âge. Dans certains cas, ces nombres ne nous sont donnés que par groupe d'âges, soit le nombre de personnes vivant de 0 à 4 ans, de 5 à 9 ans et ainsi de suite. Ceci demande alors l'emploi d'une méthode de calcul toute particulière.

b) Le nombre des décès survenant à chaque âge durant le cours de chaque année du calendrier, tels que fournis par les registres d'état civil.

Les données d'un ou de plusieurs recensements peuvent être utilisées dans la préparation d'une table de mortalité; toutefois la méthode la plus simple et la seule que nous allons considérer ici, n'utilise qu'un seul recensement, et les décès d'un nombre égal d'années (ordinairement petit) avant et après la date du recensement laquelle est située au milieu de la période.

Les registres d'état civil nous fournissent le nombre de morts dans l'année d'âge  $x$  à  $x + 1$  survenant au cours d'une année, mais ni eux ni les recensements nous donnent directement le nombre de personnes atteignant l'âge exact de  $x$  années parmi lesquelles ces décès surviennent tel que le veut la table de mortalité.

Il nous faudra donc utiliser un symbole que nous n'avons pas encore vu dans cet article soit  $L_x$ . Ce symbole diffère de  $l_x$  en ce que ce dernier, comme nous l'avons déjà vu, représente le nombre de personnes qui, selon la table, atteint l'âge de  $x$  années exactement, alors que  $L_x$  représente le nombre de personnes vivant entre les âges  $x$  et  $x + 1$  tel qu'exprimé dans un recensement. En effet si en aucun temps on vous demande votre âge et que vous dites que vous avez, mettons 30 ans, ceci ne veut pas dire que vous êtes âgé exactement de 30 ans mais bien le plus souvent que vous avez un âge fractionnaire quelconque situé entre 30 et 31 ans. Tout le groupe des personnes qui sont dans votre cas est représenté par le symbole  $L_{30}$ .

Ce symbole est utilisé dans le rapport suivant  $\frac{d'_x}{L_x}$  où les symboles sont accentués afin de laisser voir qu'ils ne sont pas ceux qui apparaîtront finalement dans la table de mortalité, mais qu'ils représentent des chiffres provenant directement des statistiques démographiques.

Ce rapport est connu sous le nom de taux central de mortalité et est désigné par  $m_x$ .

Si nous admettons l'hypothèse que les décès de l'âge  $x$  à  $x + 1$  sont uniformément distribués sur toute cette année d'âge, nous pouvons faire les transformations suivantes:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}d_x} = \frac{2q_x}{2 - q_x} \quad \text{d'où} \quad q_x = \frac{2m_x}{2 + m_x}$$

Si donc nous obtenons des recensements et des registres d'état civil les valeurs de  $m_x$  à chaque âge, les valeurs de  $q_x$ ,

dont nous avons besoin pour construire la table de mortalité proprement dite, peuvent en être obtenues également pour chaque âge comme nous venons de le voir.

Nous avons déjà vu comment, ayant en mains toutes les valeurs de  $q_x$  voulues, nous pouvons construire la table de mortalité.

114

Il est bon de faire remarquer ici, avant d'aller plus loin, qu'assez souvent les taux de mortalité dérivés des statistiques sont très irréguliers d'un âge à l'autre, ceci étant causé le plus souvent par des erreurs d'âge; il nous faudra alors graduer ces taux afin d'obtenir une progression plus uniforme des taux de mortalité tout en en retenant les caractéristiques les plus importantes. Ce procédé de graduation peut être regardé comme un effort fait dans le but de découvrir la véritable loi de la mortalité cachée sous les résultats grossiers provenant directement des statistiques.

Et maintenant pour terminer voyons en quoi consistent les fonctions monétaires dont il a été question au début, ce qu'elles sont et leur utilité. Retenons en tout premier lieu que ces fonctions, comme nous allons le voir, ne représentent rien de particulier, mais qu'elles ne sont que des instruments indispensables, enfants de la nécessité, qui nous servent dans nos calculs en nous permettant de calculer vite et avec précision.

Deux exemples bien simples serviront à illustrer la proenance et l'utilité de ces fonctions.

Quelle est la valeur d'une rente viagère d'un dollar par année pour une personne âgée de  $x$  années, dont le premier versement est dû immédiatement, le second, dans un an et ainsi de suite jusqu'au décès.

Calculons tout d'abord la valeur totale de toutes les annuités payables à toutes les personnes vivantes d'âge  $x$  soit  $l_x$  personnes, et nous diviserons ensuite le tout par  $l_x$  afin d'obtenir la valeur désirée pour chaque individu.

Un dollar payable aujourd'hui à  $l_x$  personnes égale  $l_x$  dollars.

Un dollar payable dans un an à chacun des survivants égale  $Vl_{x+1}$  dollars,<sup>1</sup> ou  $V$  représente la valeur présente de un dollar payable dans un an soit  $\frac{1}{1+i}$  où  $i$  est le taux de l'intérêt exigible.

Un dollar payable dans 2 ans toujours à chacun des survivants à cette date égale  $V^2l_{x+2}$  dollars où  $V^2$  représente la valeur présente d'un dollar payable dans deux ans et ainsi de suite.

115

Nous avons donc comme valeur totale de toutes les rentes,  $l_x + Vl_{x+1} + V^2l_{x+2} + V^3l_{x+3} + \dots$  etc. jusqu'à la fin de la table, ou en d'autres mots, jusqu'au décès du dernier survivant.

Si, maintenant, nous divisons cette somme par  $l_x$ , nous obtenons la valeur d'une rente viagère pour une personne d'âge  $x$ , soit:  $a_x = \frac{l_x + Vl_{x+1} + V^2l_{x+2} + V^3l_{x+3} + \dots}{l_x}$

Comme vous le devinez facilement, le calcul d'une telle expression fractionnaire présenterait un travail très laborieux et à cause de la multiplicité des opérations prêterait à de nombreuses erreurs.

De la nécessité de travailler vite et bien sont nées les fonctions monétaires dont il est question, lesquelles dérivent directement d'expressions longues et compliquées comme celle qui précède.

Si on multiplie numérateur et dénominateur d'une fraction par une même quantité on ne change pas la valeur de la fraction. Multiplions donc ici numérateur et dénominateur par  $V$  à la puissance  $x$  soit  $V^x$  et nous en obtenons:

---

<sup>1</sup> A cause des difficultés de la composition, on a dû remplacer le symbole  $v$  par  $V$ . Le lecteur voudra bien en tenir compte. — A.



$$a_x = \frac{V^x I_x + V^{x+1} I_{x+1} + V^{x+2} I_{x+2} + V^{x+3} I_{x+3} + \dots}{V^x I_x}$$

Nous avons maintenant notre première fonction monétaire soit  $D_x$  qui est égale à  $V^x I_x$ . Remplaçons chaque terme de la fraction par le nouveau symbole correspondant et nous avons

116

$$a_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots}{D_x}$$

Cette nouvelle expression quoique plus simple que la précédente présente encore une série d'additions laquelle serait trop longue pour le travail de tous les jours. Une seconde fonction monétaire a donc été conçue,  $N_x$  laquelle justement égale à chaque âge la somme de tous les  $D$  de l'âge donné jusqu'à la fin de la table. Ainsi:

$$\begin{aligned} N_x &= D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots \\ N_{x+1} &= D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots \\ N_{x+2} &= D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ces fonctions ont été calculées pour différentes tables et différents taux d'intérêts; nous n'avons qu'à choisir celles qui conviennent le mieux à nos calculs. Et alors le calcul d'une rente viagère pour une personne d'âge  $x$  se limite à une seule

division soit  $a_x = \frac{N_x}{D_x}$ .

Il existe une autre fonction se rapportant au calcul de rente, mais qui est peu usitée; c'est  $S_x$  laquelle égale à chaque âge la somme de tous les  $N$  de l'âge donné jusqu'à la fin de la table. Ainsi:

$$\begin{aligned} S_x &= N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \dots \\ S_{x+1} &= N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \dots \\ S_{x+2} &= N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Finalement afin d'arriver aux fonctions ayant trait à l'assurance, étudions la valeur d'une assurance d'un dollar payable à la fin de l'année dans laquelle survient le décès pour une personne d'âge  $x$ , soit  $A_x$ .

Procédons comme dans l'exemple précédent, c'est-à-dire établissons le coût d'une telle assurance pour toutes les  $l_x$  personnes âgées de  $x$  années, et ensuite nous diviserons le coût total par  $l_x$  afin d'obtenir le coût par tête.

117

Parmi les  $l_x$  personnes vivantes âgées de  $x$  années,  $d_x$  mourront avant d'atteindre leur prochain anniversaire. Si nous payons un dollar en regard de chaque décès nous paierons donc la somme de  $d_x$  dollars et ce dans un an d'aujourd'hui. La valeur présente de ces réclamations est donc  $Vd_x$  où  $V$  a la valeur que nous lui connaissons déjà.

De même  $d_{x+1}$  personnes mourront durant la deuxième année et la valeur présente des versements effectués en regard de ces décès est  $V^2d_{x+1}$ . Egalement la valeur présente des versements effectués à la fin de la troisième année est  $V^3d_{x+2}$ , et ainsi de suite.

Additionnant toutes ces valeurs présentes nous obtenons le coût total actuel d'une assurance de un dollar payable au décès de chacune des  $l_x$  personnes, soit

$$Vd_x + V^2d_{x+1} + V^3d_{x+2} + \dots$$

Divisons le tout par  $l_x$  et nous aurons:

$$A_x = \frac{Vd_x + V^2d_{x+1} + V^3d_{x+2} + \dots}{l_x}$$

Ici encore ce calcul était beaucoup trop onéreux et nous avons eu recours à la même transformation, soit de multiplier numérateur et dénominateur par  $V^x$  pour obtenir

$$A_x = \frac{V^{x+1}d_x + V^{x+2}d_{x+1} + V^{x+3}d_{x+2} + \dots}{V^x l_x}$$

$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots}{D_x}$$

où  $C_x = V^{x+1}d_x$ ,  $C_{x+1} = V^{x+2}d_{x+1}$ , etc. et finalement

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \text{ où } M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots$$

118

Ici comme précédemment des opérations fort laborieuses et compliquées se résument en définitive en une simple division.

Nous utilisons aussi quelquefois une dernière fonction se rapportant au calcul d'assurance, dans certains cas où la somme assurée varie d'une année à l'autre, et c'est  $R_x$  laquelle est égale à chaque âge à la somme de tous les  $M$  de l'âge donné jusqu'à la fin de la table. Ainsi:

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \dots$$

$$R_{x+1} = M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + \dots$$

$$R_{x+2} = M_{x+2} + M_{x+3} + M_{x+4} + \dots$$

etc.

Dans certaines tables de mortalité, les plus complètes, vous trouverez quelquefois certains symboles que nous n'avons pas vus ici, tels  $\mu_x$ ,  $T_x$ ,  $e_x$ . Nous vous en faisons grâce car ils demanderaient de longues explications et sont en définitive très peu usités.

\*

J'ose espérer que la lecture de cet article aura fait disparaître dans l'esprit de ceux qu'il aura intéressés la notion beaucoup trop répandue et facilement acceptée que toutes ces choses sont trop techniques pour le profane. Si cet article a réussi à éveiller la curiosité, il aura atteint son but.