Assurances et gestion des risques
Insurance and Risk Management

MODÉLISATION STOCHASTIQUE DE RISQUE TECHNIQUE D'ASSURANCE NON VIE : APPLICATION A UNE LIGNE D'ACTIVITÉ ET MESURE ANNUELLE DE RISQUE

Cherif El Msiyah

Volume 83, numéro 1-2, 2016

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1091550ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1091550ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Faculté des sciences de l'administration, Université Laval

ISSN

1705-7299 (imprimé)
2371-4913 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

El Msiyah, C. (2016). MODÉLISATION STOCHASTIQUE DE RISQUE TECHNIQUE D'ASSURANCE NON VIE : APPLICATION A UNE LIGNE D'ACTIVITÉ ET MESURE ANNUELLE DE RISQUE. *Assurances et gestion des risques / Insurance and Risk Management*, *83*(1-2), 71–90. https://doi.org/10.7202/1091550ar

Résumé de l'article

Cet article tente d'étudier l'approche annuelle de techniques de mesure de risque en assurance non vie et les modèles stochastiques qui peuvent être utilisés pour l'évaluation du capital économique de ces risques. Nous traitons séparément les risques de provision et de souscription et nous proposons une application sur une ligne d'activité pour l'évaluation de ces risques.

Assurances et gestion des risques, Vol. 83 (1-2)
Insurance and risk management, Vol. 83 (1-2)

MODÉLISATION STOCHASTIQUE DE RISQUE TECHNIQUE D'ASSURANCE NON VIE : APPLICATION A UNE LIGNE D'ACTIVITÉ ET MESURE ANNUELLE DE RISQUE

Cherif EL MSIYAH *

ABSTRACT

This article attempts to study the annual approach of risk measurement techniques for non-life insurance and stochastic models that can be used to evaluate the economic capital of these risks. We treat separately the reserve risk and underwriting risk and we propose an application on a business line to assess these risks.

Keywords: reserve risk, underwriting risk, solvency II, line of business, bootstrap.

RÉSUMÉ

Cet article tente d'étudier l'approche annuelle de techniques de mesure de risque en assurance non vie et les modèles stochastiques qui peuvent être utilisés pour l'évaluation du capital économique de ces risques. Nous traitons séparément les risques de provision et de souscription et nous proposons une application sur une ligne d'activité pour l'évaluation de ces risques.

Mots clés : risque de provision, risque de souscription, solvabilité II, ligne d'activité, bootstrap.

* Faculty of Science Legal, Economic and Social Ain Sebaâ – Casablanca Hassan II University and Laboratoire d'Economie d'Orléans-LEO, Orléans University

Introduction

Les sociétés d'assurance non vie sont exposées à un ensemble de facteurs de risque qui affectent l'évolution des sinistres et leurs paiements. Bien qu'il soit difficile d'identifier ces facteurs de risque ; l'inflation, l'environnement économique et social, les cycles de souscription, le cadre légal et juridique, les conditions météorologiques et la technologie constituent les principaux facteurs. Certains de ces facteurs peuvent être assez bien modélisés (cf. l'inflation, cycle de souscription, les conditions météorologiques…), d'autres comme le changement dans le cadre légal et juridique peuvent être plus difficiles.

Le nombre et l'impact de ces facteurs de risque peuvent varier potentiellement en fonction de la ligne d'activité (*line of business* - LOB) considérée. Et on peut distinguer quatre types d'impact de ces facteurs sur la volatilité du résultat de l'assureur non vie ou d'une ligne d'activité : l'impact sur le montant des primes, l'impact sur le montant des sinistres, l'impact sur le nombre de sinistres et l'impact sur la durée de liquidation des sinistres.

Pour mesurer la variabilité du passif d'une société d'assurance non vie, le portefeuille global est divisé en plusieurs lignes d'activité homogènes représentant les différentes branches ou sous-branches d'activité. L'accent est mis sur l'homogénéité des expositions dans chaque ligne d'activité et les données disponibles pour l'estimation du *best estimate* et du risque de provision. Dans ce sens, les différentes lignes d'activité (branches ou sous-branches) diffèrent en termes de durée de liquidation des sinistres et de la volatilité liée aux montants et aux nombres de sinistres.

Pour chaque ligne d'activité, on distingue entre le risque de provision lié à la liquidation des sinistres, et le risque de souscription qui concerne surtout la survenance de nouveaux sinistres. Dans la suite, on procède à une modélisation séparée de ces deux types de risque avant de faire une application sur une ligne des dommages véhicules à moteur pour mesurer ces deux types de risque.

1. Risque de provisions

Ce risque concerne la variabilité de provisions des sinistres déjà survenus. La durée de liquidation de ces derniers peut être assez longue en fonction de la branche considérée. Pour une mesure annuelle comme dans la réglementation, la durée de mesure de ce risque doit être d'un an. Toutefois, la durée de projection de flux doit correspondre à celle de la liquidation complète des sinistres.

1.1. L'approche annuelle de mesure de risque de provisions

Le montant des provisions est modélisé en se basant sur les données historiques des paiements des sinistres. Pour une ligne d'activité donnée, les paiements des sinistres sont regroupés et analysés à l'aide du triangle de liquidation. Dans ce triangle, les sinistres sont rattachés à des années d'origine qui traduisent généralement les dates de survenance de sinistres[1]. Ces sinistres sont supposés être liquidés en n années de développement[2]. Pour $n = 6$ par exemple, le triangle est représenté comme suit :

TABLEAU 1.1. *Structure du triangle de liquidation des sinistres*

DÉVELOPPEMENT							
Survenance		1	2	3	4	5	n=6
t-5	1						
t-4	2						
t-3	3						
t-2	4						
t-1	5						
t	6						
t+1							

La zone blanche : est constituée par des données historiques $c_{i,j}$ représentant les paiements liés à chaque année de survenance i et période de développement j avec $i + j \leq n + 1$. Ces données sont utilisées pour estimer le montant de provisions à la fin de l'année t (début de $t + 1$) et projeter la distribution de provisions sur la période d'une année (sur $t + 1$).

À la date d'évaluation (fin de l'année t et début de $t + 1$), le montant initial de provisions R_t correspond au *best estimate* calculé par une méthode déterministe comme *chain-ladder* ou la moyenne calculée par simulation.

La diagonale noire : représente les paiements effectués durant l'année $t + 1$ pour les sinistres survenus avant cette date[3]. La somme de ces paiements S_{t+1} , qui est aléatoire, correspond aux paiements c_{i,d_i+1} , avec $d_i = n - i + 1$, effectués pour chaque année de survenance i durant l'année $t + 1$. L'estimation de ces paiements permet de calculer la somme $S_{t+1} = \sum_{i=2}^{n} {}_{K}c_{i,d_i+1}$ pour cette diagonale. Selon la terminologie d'AISAM-ACME (2007), cette période d'une année, représentant la diagonale noire, traduit la période de chocs durant laquelle les mouvements adverses de provisions apparaissent.

La zone grise: à la date initiale, cette zone représente les paiements futurs, dans un an, pour les dates de survenance $i = 3,4,5,6$. La somme de ces paiements R_{t+1} représente le montant de provisions à la fin de l'année $t+1$, après paiement de S_{t+1} qui est aléatoire. La variabilité de R_{t+1} traduit également l'impact des chocs survenus durant l'année $t+1$ sur le déroulement et le montant des paiements au-delà de cette date. La prise en compte des nouvelles informations liées à l'année $t+1$ permet de donner une nouvelle estimation des paiements futurs. Par exemple, un changement de cadre juridique durant l'année $t+1$ peut avoir non seulement un impact sur la valeur de paiements de cette année mais également sur toute la période restante de liquidation de sinistres.

La simulation des paiements c_{i,d_i+1} , permet d'avoir un nouveau triangle de liquidation de sinistre incluant ces paiements, en enlevant la première ligne. Ce qui permet d'avoir, pour chaque itération, un nouveau triangle de liquidation qui couvre la diagonale et une estimation de la perte ultime R_{t+1}

Le résultat technique est donné par $T_{PR} = R_t - S_{t+1} - R_{t+1}$. Et constitue une distribution à partir de laquelle on peut calculer la VaR et le niveau du capital requis pour le risque de provisions sur une année.

L'estimation du *best estimate* et de la distribution de provisions doit prendre en compte l'impact de l'évolution des dépenses et de l'inflation dans les paiements futurs.

Pour les provisions de dépenses, on suppose généralement qu'elles sont incluses dans les paiements futurs. La part de dépenses dans les paiements futurs peut également faire l'objet d'une évaluation distincte par un modèle stochastique ou déterministe.

Pour la prise en compte du risque de l'inflation, la méthode la plus utilisée consiste à ajuster, en premier temps, le triangle des paiements annuels de sinistres en prenant en compte l'inflation historique (cf. montant *as-if* des paiements annuels) et puis dans le deuxième temps recalculer les paiements futurs en utilisant l'inflation moyenne (ou supposée) pour le calcul de *best estimate* et un modèle stochastique pour l'estimation du risque de l'inflation dans les provisions.

1.2. Les modèles stochastiques de mesure de risque de provisions

Parmi les différentes méthodes de provisionnement en assurance non vie, la méthode *chain-ladder* est la plus utilisée et constitue une référence incontournable[4]. A partir d'un triangle cumulé de sinistres, cette méthode permet de projeter, de manière déterministe, la perte ultime pour chaque année de survenance et de déterminer le montant moyen de provisions que la société doit constituer pour une branche d'activité donnée.

Toutefois, pour mesurer le risque de provisions, il faut appliquer une loi stochastique à la technique de *chain-ladder*. D'après England et Verrall (2002), plusieurs modèles peuvent être utilisés. Leur papier distingue les modèles qui reproduisent le résultat de la technique de *chain-ladder* (cf. loi de Poisson sur-dispersée, loi binomiale négative, approximation normale de la loi binomiale négative et modèle de Mack) de ceux qui reproduisent des résultats parfois différents (pour certaines données, il peut y avoir des différences de résultats avec les distributions Gamma et Log-Normale)[5].

Dans ce qui suit, on s'intéresse au modèle de Poisson sur-dispersé. D'après les mêmes auteurs, ce modèle est le moins restrictif possible et le plus compatible avec la méthode *chain-ladder*. L'estimation du maximum de vraisemblance de facteurs de développement donne le même résultat que la méthode déterministe de *chain-ladder*. De ce fait, la technique de *chain-ladder* peut être vue comme une méthode pour dériver l'estimation du maximum de vraisemblance sous la loi de Poisson sur-dispersée.

Le modèle de Poisson sur-dispersé suppose que les paiements c_{ij} sont indépendants, de moyenne et de variance :

$$E(c_{ij}) = m_{ij} \text{ et } V(c_{ij}) = \quad m_{ij} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Soit $c_{ij} \sim P(\ m_{ij}\ , \phi)$

$$\frac{c_{ij}}{\phi} \sim P(\frac{m_{ij}}{\phi})$$

m_{ij} peut être spécifié en deux formes. La première est donnée par :

$m_{ij} = x_i y_j$ avec $\sum_{k=1}^{n} y_k = 1$, y_k étant la proportion de la perte ultime à affecter à chaque année k de développement et x_i représentant la perte ultime espérée.

Il est parfois utile de préserver le modèle dans cette première forme. Avec cette forme, le modèle est non linéaire et une technique de modélisation non linéaire comme l'estimation du maximum de vraisemblance est requise pour obtenir l'estimation des paramètres.

Toutefois, pour le besoin de l'estimation, il est parfois préférable de re-paramétrer le modèle en posant :

$$\log(m_{ij}) = \eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j \text{ , avec } \alpha_1 = \beta_1 = 1$$

Cette structure définit un modèle linéaire généralisé (GLM) où la réponse est modélisée comme une variable aléatoire de Poisson avec une fonction de lien logarithmique. L'estimation des paiements moyens peut être obtenue à partir des estimations de paramètres en les insérant dans l'équation $\eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j$ et en appliquant l'exponentielle :

$$\hat{c}_{ij} = \widehat{m}_{ij} = \exp(\eta_{ij})$$

La sur-dispersion est prise en compte par l'estimation de paramètre d'échelle ϕ dans la procédure de l'ajustement.

Outre l'utilisation paramétrique de la loi de Poisson sur-dispersée, cette loi est souvent utilisée par la méthode du *bootstrap* dont la présentation est donnée dans l'annexe.

2. Risque de souscription

Le risque de souscription est lié aux contrats souscrits (incluant ceux renouvelés) durant l'année $t+1$ et le risque des contrats non expirés à la fin de l'année t (début de $t+1$). Les paiements des sinistres durant $t+1$ incluent ceux des sinistres survenus pour ces deux catégories de contrats. De ce fait, en plus de la variabilité de sinistralité durant l'année $t+1$, le risque de souscription doit également inclure la variabilité des primes acquises pour la couverture de ces paiements. Le résultat technique est ainsi donné par :

$$T_S = P - E - (c_{t+1,1} + R_{t+1,1})$$

$c_{t+1,1}$ le montant des paiements effectués la première année de développement pour les sinistres survenus durant $t+1$

$R_{t+1,1}$ le montant de provisions à la fin de l'année $t+1$ pour les sinistres survenus la même année

E les dépenses liées

P la prime acquise pour la couverture de $c_{t+1,1}+R_{t+1,1}$ et de E

Dans la suite, on procède à une modélisation séparée de risque présent dans les paiements des sinistres survenus durant $t+1$, des dépenses et des primes.

2.1. Risque de variation de sinistralité

Le risque de variabilité de ($c_{t+1,1}+R_{t+1,1}$) vient de sinistres standards et des catastrophes survenus durant l'année $t+1$, ainsi que de la liquidation du montant global de ces sinistres sur les années futures.

2.1.1. La perte due aux sinistres standards

Pour les sinistres standards, on modélise séparément la sévérité et le nombre de sinistres. On peut utiliser, par exemple, la loi de Poisson ou la loi binomiale négative pour le nombre ou la fréquence des sinistres[6] et la loi Gamma pour le montant moyen par sinistre. Les paramètres de ces lois sont estimés à partir des données historiques en utilisant le maximum de vraisemblance ou la méthode des moments.

En multipliant la valeur estimée du nombre N_{t+1} et du montant moyen X_{t+1} des sinistres, la part de sinistralité due aux sinistres standards peut être donnée par :

$$C_{t+1}^{nc}=N_{t+1}X_{t+1}$$

Cette estimation ne prend pas en compte l'impact de l'inflation et l'âge de contrats. Toutefois, l'inflation peut avoir un impact non seulement sur le montant moyen par sinistre, mais également sur le nombre déclaré de sinistres.

Pour la sévérité des sinistres, certains travaux comme Kaufmann et al (2001) et D'Arcy et al. (1998) distinguent entre les contrats nouvellement souscrits, les contrats récents renouvelés et les contrats anciens renouvelés. Cette distinction est motivée par le fait historique que le ratio de perte (perte totale estimée/ prime acquise) diminue quand l'âge du contrat augmente.

2.1.2. La perte due aux catastrophes

Les sinistres causés par les catastrophes sont généralement modélisés séparément des sinistres standards. Toutefois, on peut intégrer les pertes dues aux catastrophes et celles imputables aux sinistres standards en utilisant des distributions a queues épaisses.

Par une modélisation séparée, on peut procéder comme pour les sinistres standards en modélisant le nombre et le montant des catastrophes.

Pour le nombre des catastrophes, on peut utiliser la loi binomiale, la loi binomiale négative, la loi de Poisson. Pour la modélisation des montants de catastrophe, on peut utiliser la loi log-normale, la loi de Pareto, ou la loi de Pareto généralisée.

Toutefois, contrairement aux sinistres standards, il faut simuler la perte totale de chaque événement de catastrophe avant d'estimer la part individuelle de perte de l'assureur pour chaque ligne d'activité.

Soit le nombre de catastrophes M_{t+1} et la perte totale $Y_{t+1,i}$ causée par l'événement de catastrophe $i \in (1,.......M_{t+1})$ estimé à partir des données historiques. La perte totale due aux catastrophes doit prendre en compte la part de catastrophe et la part du marché de la société pour chaque ligne d'activité k . La part de sinistralité due aux catastrophes est donnée par:

$$C_{t+1}^{c} = b_{t+1}(k)\sum_{i=1}^{M_{t+1}} Y_{t+1,i}^{k}$$

Avec:

$b_{t+1}(k)$ la part du marché de la société dans la ligne d'activité k durant l'année $t+1$

$Y_{t+1,i}^{k}$ la part du montant de catastrophe pour la ligne d'activité k durant l'année $t+1$

2.1.3. La liquidation de perte globale

Le montant global des sinistres pour l'année $t+1$ est donné pour chaque scénario par la somme du montant imputable aux sinistres standards et celui imputable aux catastrophes. Soit:

$$C_{t+1} = C_{t+1}^{nc} + C_{t+1}^{c}$$

Ce montant est scindé en perte payée pendant la première année $t+1$ et la provision à la fin de cette année. Suivant Kaufmann et al (2001)[7], on utilise la loi Beta pour générer les proportions à payer durant toutes les années de développement $j = 1,\dots,6$.

Soit $A_{t+1,j}$ la proportion de la perte ultime de l'année $t+1$ payée durant l'année de développement j

$$A_{t+1,j} = \begin{cases} B_{t+1,j} \text{ pour } j = 1 \\ B_{t+1,j}\left(1 - \sum_{k=1}^{j-1} A_{t+1,k}\right) \text{ pour } j > 1 \end{cases}$$

Avec $B_{t+1,j}$ ~Beta (α,β)

Les paramètres α et β peuvent être estimés par la méthode du maximum de vraisemblance à partir des moyenne et variance historiques :

$m_{t+1,j}$ la valeur moyenne estimée en se basant sur $\dfrac{A_{t,j}}{\sum_{k=j}^{n} A_{t,k}}, \dfrac{A_{t-1,j}}{\sum_{k=j}^{n} A_{t-1,k}}, \dfrac{A_{t-2,j}}{\sum_{k=j}^{n} A_{t-2,k}} \dots$

$v_{t+1,j}$ la variance estimée en se basant sur les mêmes données

Les paiements futurs sont ainsi obtenus par $c_{t+1,j} = C_{t+1}A_{t+1,j}$.

2.2. Risque de variation de primes

La modélisation sur l'année $t+1$ du risque de souscription doit inclure également la prime acquise. En terme économique, la provision pour prime acquise doit couvrir le montant moyen de sinistres de l'année $t+1$ et de dépenses liées. Durant l'année $t+1$, la prime acquise peut ainsi être donnée par :

$$P = U_t - U_{t+1} + \pi$$

Où U_t et U_{t+1} sont la provision pour prime acquise à la fin de l'année t (début de l'année $t+1$) et à la fin de l'année $t+1$ respectivement. $U_t - U_{t+1}$ couvre les contrats souscrits avant la fin de l'année t (début de l'année $t+1$) durant l'année $t+1$.

Conditionnellement aux informations disponibles en fin de l'année t (début de l'année $t+1$), U_t n'est pas stochastique. De manière similaire aux provisions pour sinistres à payer, U_{t+1} est stochastique et on peut utiliser la même méthode que celle utilisée pour estimer U_t en prenant en compte les informations de l'année $t+1$.

π est la prime émise des contrats souscrits durant l'année $t+1$. Cette prime couvre donc non seulement les sinistres payés pendant l'année $t+1$ mais également ceux payés après cette date et dont la souscription est effectuée pendant $t+1$. Si on prend en considération l'impact des cycles de souscription, π est modélisé de manière stochastique. Dans le cas contraire, on peut supposer qu'elle est déterministe.

De même pour les dépenses, on peut appliquer une approche stochastique ou utiliser une valeur déterministe, en fonction de l'objectif de l'assureur et des données disponibles.

3. Application à une ligne d'activité

Pour illustrer notre approche annuelle de mesure des risques techniques non vie, nous prendrons un exemple, celui des dommages véhicules à moteur entre 1988 et 1993 sur le total des sociétés nationales françaises. Les données sont les suivantes :

TABLEAU 3.1. *Triangle des règlements cumulés de sinistres, brut de recours*

EXERCICE DE SURVENANCE		1	2	3	4	5	6
1988	1	3209	4372	4411	4428	4435	4456
1989	2	3367	4659	4696	4720	4730	
1990	3	3871	5345	5398	5420		
1991	4	4239	5917	6020			
1992	5	4929	6794				
1993	6	5217					

TABLEAU 3.2. *Triangle des primes acquises*

EXERCICE DE SURVENANCE		1	2	3	4	5	6
1988	1	4563	4589	4590	4591	4591	4591
1989	2	4718	4674	4671	4672	4672	
1990	3	4836	4861	4861	4863		
1991	4	5140	5168	5173			
1992	5	5633	5668				
1993	6	6389					

TABLEAU 3.3. *Triangle du nombre de sinistres déclarés*

EXERCICE DE SURVENANCE		1	2	3	4	5	6
1988	1	414	460	482	488	492	494
1989	2	453	506	526	536	539	
1990	3	494	548	572	582		
1991	4	530	588	615			
1992	5	545	605				
1993	6	557					

Les données dans les tableaux ne font pas de distinction entre risque standard et risque catastrophe. De ce fait, dans la description du modèle simplifié que nous appliquons dans la présente section, nous ne prenons pas en compte le fait empirique que la liquidation d'un sinistre unique à grande perte diffère de celle des pertes d'un ensemble de sinistres standards. On utilise la loi binomiale négative et la loi Gamma respectivement pour simuler le nombre et le montant des sinistres. Les données sont également brutes de réassurance. La perte à transférer aux réassureurs peut ainsi être étudiée et fixée en fonction de l'objectif de l'assureur et de son niveau du capital dans le bilan. L'impact en termes de baisse de capital économique par le transfert de risque vers le réassureur peut être estimé de manière séparée.

3.1. Modélisation de risque de provisions

Pour modéliser le risque de provisions, on utilise la méthode de *bootstrap* décrite en annexe. Pour cela, on suppose que les dépenses sont incluses dans les données historiques et que les prévisions de dépenses futures ne varient pas par rapport à leur valeur moyenne. Nous faisons également abstraction du risque d'inflation dans les paiements futurs, bien qu'il puisse avoir un impact fort sur certains secteurs d'activité.

3.2. Modélisation de risque de souscription

3.2.1. Perte ultime et payements futurs

a. Montant moyen de sinistres

A partir des données disponibles, on procède selon les étapes suivantes:

i. compléter le triangle des paiements cumulés par la méthode de *chain-ladder* et estimer la perte ultime par exercice de survenance.

ii. compléter le triangle du nombre de sinistres par la méthode de *chain-ladder* et estimer le nombre total par exercice de survenance.

iii. calculer les montants moyens de sinistres par année de survenance

iv. simuler le montant moyen de sinistre pour l'année $t+1$ à partir de la loi Gamma en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres.

b. Nombre de sinistres

A partir du triangle du nombre de sinistres complété par la méthode de *chain-ladder*, on utilise la loi binomiale négative pour la simulation de nombre de sinistres pour l'année $t+1$. Les paramètres sont estimés en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

c. Paiements futurs des sinistres

La perte de sinistralité globale, résultant de la multiplication du montant et du nombre de sinistres simulés, est ensuite scindée en perte payée pendant la première année et la provision à constituer à la fin de cette année suivant la méthode développée dans le paragraphe précédent.

3.2.2. Prime acquise

On considère que les primes nécessaires à la couverture des sinistres survenus durant l'année $t+1$ ne varient pas par rapport à la valeur moyenne obtenue par la simulation de perte ultime et de paiements futurs. Ce montant total de prime contient la prime émise durant l'année $t+1$ et la prime acquise ($U_t - U_{t+1}$) durant $t+1$ pour les contrats souscrits avant cette date.

Concernant les dépenses, on fait l'hypothèse qu'elles sont incluses dans les paiements des sinistres et que ces dépenses correspondent à la valeur moyenne couverte par les primes. On fait également abstraction du risque de l'inflation.

3.3. Résultats

L'application de la méthode de c*hain-ladder* sur le tableau de règlements cumulés, donne une provision de 2427 à la date initiale (début de $t+1$), comme le montre le tableau suivant :

TABLEAU 3.4. *Calcul de provision par chain-ladder*

EXERCICE DE SURVENANCE	1	2	3	4	5	6	Provisions
1	3209	4372	4411	4428	4435	4456	
2	3367	4659	4696	4720	4730	4752	22
3	3871	5345	5398	5420	5430	5456	36
4	4239	5917	6020	6046	6057	6086	66
5	4929	6794	6872	6902	6914	6947	153
6	5217	7204	7287	7318	7332	7367	2150
Provisions							2427

La projection de la distribution de provisions à la fin de l'année $t+1$, donne, pour un intervalle de confiance de 99,5 %, une exigence de capital de l'ordre de 13 % du montant initial des provisions en appliquant la VaR et de 15 % en appliquant l' Expected Shortfall (ES).

Pour le risque de souscription, la projection de la distribution de sinistres de l'année $t+1$ donne une valeur moyenne de 5503 et une exigence de capital en pourcentage de la moyenne et pour un intervalle de confiance de 99,5 % de l'ordre de 39 % en appliquant la VaR et de 44 % en appliquant l'ES.

Ce résultat montre un montant élevé du capital. Cela peut être expliqué par le fait qu'il couvre à la fois le risque standard et le risque catastrophe sans prendre en compte la réduction de capital qui peut être faite par le transfert d'une partie du risque, essentiellement le risque catastrophe, aux réassureurs. Les données sont également brutes de recouvrement. La prise en compte de cette variable peut ainsi réduire le montant des paiements et des pertes.

Conclusion

Au niveau global d'une société d'assurance non vie, l'évaluation du risque et du capital doit tenir compte de la diversification des portefeuilles en termes de nature d'activité des différentes branches et d'implantation géographique de l'assureur. On peut distinguer la diversification à l'intérieur de chaque branche ou ligne d'activité et celle qui peut être créée par l'exercice d'une activité qui couvre différentes branches.

Sous Solvabilité II, le risque de souscription et le risque de réserve sont combinés au niveau des lignes d'activités en prenant en compte des effets de diversification inter-LOB. Les risques sont ensuite agrégés à travers les lignes d'activités pour prendre en compte la diversification qui peut résulter la corrélation imparfaite des LOB et la distribution géographique de l'activité de l'assureur.

Annexe. La méthode de bootstrap

Dans ce qui suit, on donne les étapes à suivre pour l'application du *bootstrap* :

i. Procédure préliminaire de bootstrap

Cette première étape consiste à calculer les facteurs de développement de *chain-ladder*, le paramètre d'échelle et les résidus de Pearson ajustés qui sont nécessaire à la procédure de simulation.

1- Déterminer les facteurs de développement de *chain-ladder* :

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^{d_j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{d_j-1} C_{i,j}}$$

Le facteur de développement cumulé est donnée par $\Lambda_j = \prod_{k=j}^{n} \lambda_k$

2- Déterminer les valeurs cumulées futures. Pour i=2,…,n

$$\hat{C}_{i,d_i+1} = \hat{C}_{i,d_i}\lambda_{d_i}$$

$$\hat{C}_{i,j+1} = \hat{C}_{i,j}\lambda_j \text{ pour } j = d_i + 1,\ d_i + 2, \ldots, n-1$$

3- Déterminer par récursion les valeurs cumulées ajustées

$$\hat{C}_{i,j-1} = \frac{C_{i,j}}{\lambda_{j-1}} \text{ pour } j = d_i$$

et

$$\hat{C}_{i,j-1} = \frac{\hat{C}_{i,j}}{\lambda_{j-1}} \text{ pour } j = d_i - 1,\ d_i - 2, \ldots, n-1$$

4- Déterminer les paiements annuels :

$$\hat{c}_{i,j} = \hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}$$

5- Calculer les résidus de Pearson du triangle passé :

$$r_{ij} = \frac{c_{ij} - \hat{c}_{ij}}{\sqrt{\hat{c}_{ij}}}$$

6- Estimer le paramètre d'échelle

$$\hat{\phi}_P = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d_i} r_{ij}^2}{f} \text{ où}$$

$f = m - l$ le degré de liberté de l'estimation

$m = \frac{1}{2}n(n+1)$ le nombre d'observation

$l = 2n - 1$ le nombre de paramètres (n de xi, n de yi et une contrainte $\sum_{k=1}^{n} y_k = 1$

7- Calculer les résidus de Pearson ajustés en prenant en compte le degré de liberté :

$$r_{ij}^* = r_{ij}\sqrt{\frac{n}{f}}$$

ii. Procédure d'itération

Cette étape consiste à simuler les paiements à effectuer durant l'année $t+1$ et la réserve à la fin de cette année pour les sinistres déjà survenus en appliquant le *bootstrap* sur les résidus de Pearson ajustés.

La méthode du *bootstrap* est généralement appliquée aux résidus plutôt que sur les données de sinistres elles-mêmes. Car, contrairement à ces dernières pour lesquelles l'hypothèse d'indépendance entre les règlements annuels observés n'est pas évidemment vérifiée[8], les résidus sont approximativement indépendants et identiquement distribués (iid).

Les étapes suivantes sont faites pour chaque itération κ :

Simulation de $S_{t+1} = \sum_{i=2}^{n} {}_{\kappa}c_{i,d_i+1}$

1- Opérer un tirage avec remise dans une uniforme du triangle supérieur ∇ de r_{ij}^{*} en créant ainsi un nouveau triangle ∇ des résidus simulés ${}_{\kappa}r_{ij}^{*}$

2- Pour chaque cellule dans le triangle ∇ , les pseudo-paiements sont obtenus par : ${}_{\kappa}c_{i,j} = {}_{\kappa}r_{i,j}^{*}\sqrt{\hat{c}_{i,j}} + \hat{c}_{i,j}$ à partir de la formule de l'étape 5.

3- Déterminer les pseudo-paiements cumulés :

$$\begin{cases} {}_{\kappa}\hat{C}_{i,j} = \hat{c}_{i,j} \quad pour \quad j = 1 \\ {}_{\kappa}\hat{C}_{i,j} = {}_{\kappa}\hat{c}_{i,j-1} + {}_{\kappa}\hat{c}_{i,j} \quad pour\ j = 2,3,\ldots,n \end{cases}$$

4- Déterminer les nouveaux facteurs de développement de *chain-ladder* ${}_{\kappa}\hat{\lambda}_j$ à partir des pseudo-paiements cumulés.

5- Utiliser ces nouveaux facteurs de développement de *chain-ladder* ${}_{\kappa}\hat{\lambda}_j$ pour projeter les paiements cumulés ${}_{\kappa}\hat{C}_{i,d_i+1}$ dans le triangle inférieur Δ.

6- Déduire les paiements de l'année $t+1$; ${}_{\kappa}\hat{c}_{i,d_i+1}$ dans Δ à partir de ces paiements cumulés.

7- Simuler ${}_{\kappa}c_{i,d_i+1}$ à partir de la distribution de l'ODP de moyenne ${}_{\kappa}\hat{c}_{i,d_i+1}$ et de variance ${}_{\kappa}\hat{c}_{i,d_i+1}$

8- Calculer le montant des paiements à effectuer durant l'année $t+1$ pour les sinistres déjà survenus $S_{n+1} = \sum_{i=2}^{n} {}_{\kappa}c_{i,d_i+1}$

c. Simulation de R_{n+1}

9- La simulation des paiements générés pour l'année $t+1$ (cf. $_{\kappa}c_{i,d_i+1}$) permet de considérer à cette date un nouveau triangle $_{\kappa}\quad_{i,j}$ des paiements annuels où $i=2,3,\ldots,n$ et $j=1,2,\ldots,d_i+1$ tel que :

$$\begin{cases} _{\kappa}\quad_{i,j} = c_{i,j} \quad pour\ i=2,3,\ldots,n\ et\ j=1,\ldots,d_i \\ _{\kappa}\quad_{i,j} = {}_{\kappa}c_{i,d_i+1} \quad pour\ i=2,3,\ldots,n \\ _{\kappa}\quad_{t+1,1} = c_{t+1,1} \end{cases}$$

10- Transformer ce triangle en triangle de paiements cumulés

11- Calcul les nouveaux facteurs de développement $_{\kappa}\hat{\lambda}_j^{'}$ et les facteurs cumulés $\hat{\Lambda}_j^{'} = \prod_{k=j}^{n} \hat{\lambda}_k^{'}$

12- Calculer les provisions à la fin de l'année $t+1$ pour chaque date de survenance : $_{\kappa}\hat{L}_i = (C_{i,d_i} + {}_{\kappa}\hat{c}_{i,d_i+1})({}_{\kappa}\hat{\Lambda}_{d_i+1}^{'} - 1)$ et la provision globale : $R_{n+1} = \sum_{i+3}^{n} {}_{k}\hat{L}_i$

Bibliographie

AISAM-ACME (2007), AISAM-ACME study on non-life long tail liabilities, reserve risk and risk margin assessment under solvency II, AISAM-ACME.

Bjorkwall S., O. Hossjer, E. Ohlsson (2008), Non-parametric and parametric *bootstrap* techniques for arbitrary age-to-age development factor methods in stochastic claims reserving, Research Report 2008:2, Mathematical Statistics Stockholm University.

Clark M., C. Olechowski (2008), Economic Capital : Correlation Matrices and Other Techniques – A Survey and Discussion, Ernst & Young LLP pour Society of Actuaries.

D'Arcy, S. P., R. W. Gorvett, T. E. Hettinger and R. J. Walling (1998). Using the public access DFA model : A case study. *Casualty Actuarial Society E-Forum*, DFA Call Papers, Summer 1998.

England P. D. and R. J. Verrall (2002), Stochastic claims reserving in general insurance, Presented to the Institute of Actuaries, 28 January 2002.

Esbjorn O., J. Lauzeningks (2008), The one-year non-life insurance risk, ASTIN Colloquium, Manchester July 2008.

Hayne R.M. (2003), Measurement of Reserve Variability, casualty actuarial society forum 2003.

Hayne R.M. (2004), estimating and Incorporating Correlation in Reserve Variability, casualty actuarial society forum 2004.

Huijuan, L.(2008), Bootstrap Estimation of the Predictive Distributions of Reserves Using Paid and Incurred Claims, ASTIN Colloques, Manchester 13-16 july 2008.

Kaufmann R., A.Gadmer, R. Klett (2001), Introduction to DFA, Astin Bulletin, Vol. 31, No. 1, 2001, pp. 213-249.

Lysenko N., V. Wuthrich, M. Merz (2008), Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method, Scandinavian Actuarial Journal 2008, 1-22, iFirst article.

Mack T. and G. Venter (1999), A Comparison of Stochastic Models that Reproduce Chain Ladder Reserve Estimates, ASTIN Colloquium, Tokyo, Japan — August 22-25, 1999.

Meyers G. (2006), Estimating Predictive Distributions for Loss Reserve Models, casualty actuarial society forum 2006.

Panning, W. H. (2005), Measuring Loss Reserve Uncertainty, ASTIN Colloques Zurich 5-7 September 2005.

Savellin., G. P. Clemente (2005), Modelling aggregate non-life underwriting risk : standard formula vs internal model, ASTIN Colloques Zurich 5-7 September 2005.

Robbin I. (2004), Exposure Dependent Modeling of Percent of Ultimate Loss Development, casualty actuarial society forum 2004.

Schmidt K.D. (2006), Methods and Models of Loss Reserving Based on Run-Off Triangles : A Unifying Survey, casualty actuarial society forum 2006.

Schmidt K.D. (2006), Optimal and Additive Loss Reserving for Dependent Lines of Business, casualty actuarial society forum 2006.

Verall R. J. (2004), Obtaining Predictive Distributions for Reserves Which Incorporate Expert, casualty actuarial society forum 2004.

NOTES

1. Les années d'origine peuvent également être celles de souscription ou de déclaration de sinistres.
2. La période de développement peut être exprimée également en semestres ou trimestres selon les LOB.

3. Les sinistres survenus durant t+1 sont traités dans le risque de souscription.

4. Beaucoup d'autres méthodes déterministes peuvent être appliquées dont la méthode Bornhuetter-Ferguson et la méthode Cape-Cod.

5. Voir l'article pour les autres modèles.

6. On utilise généralement la fréquence puisqu'elle est plus stable que le nombre.

7. Ces auteurs ont utilisé un facteur de développement de sinistres qui est différent de celui de la méthode de *chain-ladder.*

8. Entre autres, cette hypothèse d'indépendance peut être invalidée par des variations annuelles d'inflation des montants de sinistres dans la branche étudiée susceptible d'introduire des corrélations entre les règlements annuels des sinistres. Une telle situation nécessiterait une mise as-if préalable des données.