L'Actualité économique

# Arguments graphiques simples pour comprendre la spécification du modèle d'espérance non additive d'utilité et l'intégrale de Choquet

# Simple Graphic Arguments to Understand the Specification of the Choquet Expected Utility Model and the Choquet Integral

Jean-Pascal Gayant

Volume 74, numéro 2, juin 1998

URI : https://id.erudit.org/iderudit/602256ar
DOI : https://doi.org/10.7202/602256ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Gayant, J.-P. (1998). Arguments graphiques simples pour comprendre la spécification du modèle d'espérance non additive d'utilité et l'intégrale de Choquet. *L'Actualité économique*, *74*(2), 183–195. https://doi.org/10.7202/602256ar

Résumé de l'article

Le modèle d'espérance non additive d'utilité ou *Choquet Expected Utility* (Schmeidler, 1989) est une généralisation du modèle d'espérance d'utilité mettant en oeuvre une mesure de vraisemblance non nécessairement additive et faisant appel au concept d'intégrale de Choquet. L'objectif de cet article est de présenter ce type d'intégrales à l'aide d'arguments graphiques simples et de clarifier l'articulation existant entre les spécifications rencontrées dans l'incertain probabilisé et celles rencontrées dans l'incertain non nécessairement probabilisé.

L'Actualité économique, Revue d'analyse économique, vol. 74, nº 2, juin 1998

# ARGUMENTS GRAPHIQUES SIMPLES POUR COMPRENDRE LA SPÉCIFICATION DU MODÈLE D'ESPÉRANCE NON ADDITIVE D'UTILITÉ ET L'INTÉGRALE DE CHOQUET*

Jean-Pascal GAYANT
*CEME – Université de Paris I*
*CRESE – Université de Franche Comté*

RÉSUMÉ – Le modèle d'espérance non additive d'utilité ou *Choquet Expected Utility* (Schmeidler, 1989) est une généralisation du modèle d'espérance d'utilité mettant en œuvre une mesure de vraisemblance non nécessairement additive et faisant appel au concept d'intégrale de Choquet. L'objectif de cet article est de présenter ce type d'intégrales à l'aide d'arguments graphiques simples et de clarifier l'articulation existant entre les spécifications rencontrées dans l'incertain probabilisé et celles rencontrées dans l'incertain non nécessairement probabilisé.

ABSTRACT – *Simple Graphic Arguments to Understand the Specification of the Choquet Expected Utility Model and the Choquet Integral.* The Choquet expected utility model (Schmeidler,1989) is a generalization of the expected utility model introducing a non-additive measure (or capacity) and refering to the concept of Choquet integral. The aim of this paper is to present such an integral with help of simple graphical arguments and to clarify the existing link between risk and uncertainty from a formal viewpoint.

## INTRODUCTION

Le terme « espérance non additive » d'utilité désigne une famille de modèles de décision dans le risque et l'incertain généralisant le modèle d'espérance d'utilité. Le modèle d'espérance non additive d'utilité, obtenu en affaiblissant le « principe de la chose sûre » ou l'axiome d'indépendance dans le cadre restreint du risque, permet de prendre en compte le comportement d'agents affectant aux événements des vraisemblances subjectives non nécessairement additives (en particulier ceux dont le comportement révèle de l'aversion pour l'incertitude). Cette famille de modèles est surtout connue sous l'appelation *Choquet Expected Utility*

* Je tiens à remercier Michèle Cohen, Marco Scarsini et Jean-Marc Tallon pour leurs précieux commentaires. Toute erreur ou imprécision est de mon entière responsabilité.

(CEU) (Schmeidler, 1989) et, dans le cas particulier du risque, sous la désignation *Rank Dependent Expected Utility* (RDEU) (Quiggin, 1982; Yaari, 1987 et Wakker, 1994)[1]. Si, dans le cas d'actes à nombre fini de résultats, ces modèles peuvent être spécifiés sous une forme assez simple, il n'en va pas de même lorsque le nombre de conséquences est infini; en effet, il est alors absolument nécessaire de spécifier la fonction représentative des préférences sous la forme d'une intégrale de Choquet (Choquet, 1953 et Dellacherie, 1970).

L'objectif de cet article n'est pas de proposer un quelconque apport mathématique (on peut, à cette fin, consulter avec grand bénéfice Chateauneuf, 1994), mais d'apporter, à l'aide d'arguments graphiques, un éclaircissement sur cette intégrale. Il est en effet possible de montrer que, en dépit d'une spécification formelle à laquelle les économistes ne sont guère accoutumés, ce modèle ne propose rien d'autre qu'un calcul d'espérance d'utilité quelque peu « étendu ».

## 1. FORMALISATION DES PROBLÈMES DE DÉCISION DANS L'INCERTAIN

Soit $S$ l'ensemble des états de la nature (notés $s$), et $\Sigma$ une $\sigma$-algèbre de parties de $S$. Un acte est une application de $S$ dans un ensemble de conséquences ou résultats $\mathcal{C}$. L'ensemble des actes est noté $\mathbb{F}$. On distingue traditionnellement deux types de situations :

a) Il existe une distribution de probabilité $P$ connue sur $S$ (risque). Chaque acte $f$ induit alors une distribution de probabilité sur $\mathcal{C}$. Sous l'hypothèse de *neutralité* qui postule que deux actes induisant la même distribution de probabilité sur $\mathcal{C}$ sont équivalents aux yeux de tout décideur, on peut identifier tout acte avec la loi de probabilité de cet acte. Autrement dit, la classe d'équivalence regroupant les variables aléatoires ayant même loi de probabilité sera identifiée à cette loi. Ainsi, dans le cas du risque, on a coutume de travailler sur les lois elles-mêmes.

b) Il n'existe pas nécessairement de distribution de probabilité connue sur $S$ (incertain). Dans ce cas, il n'est pas possible de travailler sur les lois images, il faut impérativement revenir aux actes.

Notons, bien sûr, que le premier cas est un cas particulier du second.

Par souci de simplicité, nous nous restreindrons, dans cette note, aux actes ou variables aléatoires à conséquences réelles ($\mathcal{C}$ est donc inclus dans $\mathbb{R}$ muni de $\mathcal{B}$, tribu des boréliens).

Lorsque $S$ est un ensemble fini, tout acte $f$ est tel qu'il existe une partition $(A_1, A_2, ..., A_n)$ de $S$, pour laquelle $\forall i = 1, 2, ..., n\, f(s) = x_i$ ($x_i \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}$) pour tout $s \in A_i$. On convient de noter $f = (x_1, A_1;\ x_2, A_2; ... ; x_n, A_n)$, ou encore $f = (x_i, A_i)_{i=1,...,n}$.

1. L'article de Machina (1982) peut également être mentionné au titre des travaux précurseurs de cette famille de modèles. Segal (1989), quant à lui, en propose les premières représentations graphiques.

*Nous supposons en outre que les résultats sont ordonnés par ordre croissant* ($x_1 < x_2 < ... < x_n$). Dans le cas particulier où il existe une distribution de probabilité $P$ connue sur $S$ (risque), et sous l'hypothèse de neutralité, on peut assimiler l'acte $f$ à une distribution de probabilité, encore appelée loterie, notée $(x_i, p_i)_{i=1,...,n}$ où $\forall\, i \in \{1,..., n\}, p_i = P\{A_i\}$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

## 2. DÉFINITION D'UNE CAPACITÉ DE CHOQUET

Le modèle d'espérance non additive d'utilité repose sur le concept de mesure de vraisemblance (subjective) non nécessairement additive. Originellement, c'est dans un contexte indépendant du problème de la décision dans l'incertain que Choquet (1953) a développé une théorie de ces « mesures », sous l'appelation de « capacités » (se référer aussi à Shafer, 1976).

Soit $(S,\Sigma)$ un espace probabilisable. Une capacité sur $\Sigma$ est une mesure $C : \Sigma \rightarrow [0; 1]$ vérifiant :

(i) $C(\varnothing) = 0$

(ii) $C(S) = 1$

(iii) $\forall A, B \in \Sigma, A \subset B \Rightarrow C(A) \leq C(B)$.

La condition (iii), de monotonie (d'ordre 1) au sens de l'inclusion, est une exigence très faible puisque pour $A$ et $B$ éléments mutuellement exclusifs de $\Sigma$, $C(A \cup B)$ peut être supérieure, inférieure ou égale à $C(A) + C(B)$. Il est entendu que les probabilités sont un cas particulier (additif) de capacités.

## 3. FORME GÉNÉRALE DU MODÈLE D'ESPÉRANCE NON ADDITIVE D'UTILITÉ

Soit une relation de préférence « $\succsim$ » sur $\mathbb{F}$ (préféré ou indifférent à) supposée complète, réflexive et transitive. Si cette relation satisfait aux axiomes du modèle d'espérance non additive d'utilité (Schmeidler, 1989, et Sarin & Wakker, 1992), il existe une mesure de vraisemblance subjective (ou capacité) $C$ et une fonction $u$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, croissante et définie à une transformation affine positive près, telles que la fonction représentative de la relation de préférence $V : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall f, f' \in \mathbb{F},\ V(f) \geq V(f') \Leftrightarrow f \succsim f'$$

soit :

$$V(f) = \int_{-\infty}^{0} [C\,\{s \in S /\, u\,[f(s)] > x\} - 1]\, dx + \int_{0}^{+\infty} C\,\{s \in S /\, u\,[f(s)] > x\}\, dx.$$

Afin d'interpréter cette spécification absconse, nous allons tout d'abord étudier la forme de la fonction $V(.)$ dans le cas où l'ensemble des états de la nature est fini.

## 4. FORME DU MODÈLE D'ESPÉRANCE NON ADDITIVE D'UTILITÉ DANS LE CAS OÙ L'ENSEMBLE DES ÉTATS DE LA NATURE EST FINI

Dans le cas où $S$ est un ensemble fini, l'espérance non additive d'utilité de l'acte ordonné $f = (x_i, A_i)_{i=1,\ldots,n}$ prend la forme :

$$V(f) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \, u(x_i)$$

où $\forall i \in \{1,\ldots, n-1\}$, $\pi_i = C(A_i \cup \ldots \cup A_n) - C(A_{i+1} \cup \ldots \cup A_n)$ et $\pi_n = C(A_n)$.

On peut interpréter cette expression de la manière suivante : l'espérance non additive d'utilité de l'acte $f$ est la somme pondérée des utilités associées à chacun des résultats. Le poids associé au résultat $x_i$ est la différence entre la vraisemblance subjective d'un gain « supérieur ou égal à $x_i$ » et la vraisemblance subjective d'un gain « supérieur ou égal à $x_{i+1}$ ».

Dans le cas particulier où la mesure de vraisemblance subjective est additive, on retrouve le modèle d'espérance subjective d'utilité (Savage, 1954) puisque $\forall i \in \{1,\ldots, n-1\}$, $\pi_i = C(A_i \cup \ldots \cup A_n) - C(A_{i+1} \cup \ldots \cup A_n) = C(A_i)$.

Dans le cas particulier du risque, il existe une mesure de probabilité objective $P$, telle que $\forall i \in \{1,\ldots, n\}$, $P\{A_i\} = p_i$. Sous le postulat de respect de la dominance stochastique du premier ordre (Wakker, 1990), il existe une fonction $\phi$ croissante et définie à une transformation affine près telle que : $\forall i \in \{1,\ldots, n-1\}$, $C(A_i \cup \ldots \cup A_n) = \phi\,(p_i + \ldots + p_n)$ et $C(A_n) = \phi\,(p_n)$. La spécification ainsi obtenue est celle du modèle RDEU. La fonction $\phi$ est alors interprétée comme une transformation subjective non nécessairement linéaire des probabilités objectives (cf. Gayant, 1995).

Dans le cas particulier où $\phi$ est linéaire, et puisqu'on postule, sans perte de généralité, que $\phi\,(0) = 0$ et $\phi\,(1) = 1$, on retrouve le modèle d'espérance d'utilité (Von Neumann et Morgenstern, 1944).

Dans le cas particulier où $u$ est linéaire (sans que $\phi$ ne le soit nécessairement), on retrouve le modèle dual de Yaari (1987) (pour une présentation plus complète, on peut par exemple se référer à Gayant, 1997).

## 5. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UN CALCUL D'ESPÉRANCE

Dans le cadre du risque, un acte $f \in \mathbb{F}$ peut se définir comme une application de $(S, \Sigma, P)$ dans $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ et nous pouvons travailler sur la loi image $P_f$. Désignons par $L = P_f = (x_i, p_i)_{i=1,\ldots,n}$ une telle loterie. Que le nombre de conséquences soit fini ou infini, il est possible de représenter graphiquement cette loterie, ainsi que son espérance mathématique (par une aire ou une différence d'aires). Donnons tout d'abord les définitions des fonctions cumulative $F_L$ et décumulative $G_L$ :

$F_L(x) = P\,\{s \in S / f(s) \leq x\}$ et $G_L(x) = P\,\{s \in S / f(s) > x\}$.

Dans un repère (avec les résultats en abscisse et les probabilités en ordonnée), ces fonctions « représentent » chacune la loterie $L$. Nous choisirons d'utiliser la fonction *décumulative* $G_L$.

Voyons maintenant comment représenter l'espérance mathématique de la loterie, en distinguant si les loteries engendrent des gains uniquement (i), des pertes uniquement (ii), ou à la fois des gains et à la fois des pertes (iii). Nous nous intéressons, dans un premier temps, au cas où le nombre de conséquences est fini.

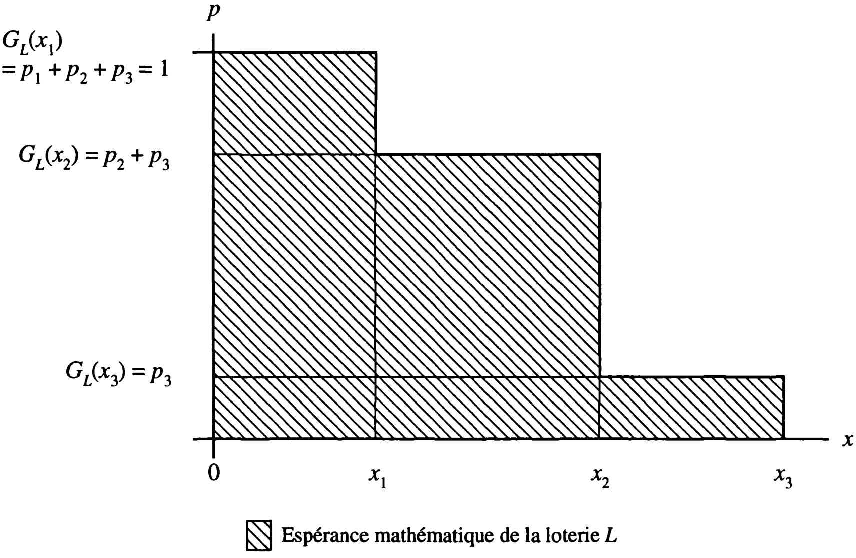
(i) Pour une loterie $L = (x_i, p_i)_{i=1,\dots,n}$, uniquement constituée de résultats positifs.

Dans le quadrant positif, l'aire située entre la courbe de la fonction *décumulative* $G_L$ et les deux axes est égale à l'espérance mathématique de la loterie $L$. En effet, l'aire située sous la courbe est :

$$(x_1 - 0).(p_1 + p_2 + \dots + p_n) + (x_2 - x_1).(p_2 + \dots + p_n) + \dots + (x_n - x_{n-1}).(p_n)$$
$$= (x_1 - 0).G_L(x_1) + (x_2 - x_1).G_L(x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}).G_L(x_n)$$
$$= (x_1 - 0).G_L(x_1) + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1})\, G_L(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Donnons une illustration dans le cas d'une loterie comportant 3 résultats, $L = (x_1, p_1; x_2, p_2; x_3, p_3)$ :

FIGURE 1



(ii) Pour une loterie $L = (x_i, p_i)_{i=1,\ldots,n}$, uniquement constituée de résultats négatifs.

Dans le quadrant des abscisses négatives et des ordonnées positives, l'aire située entre la courbe de la fonction *décumulative* $G_L$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $p = 1$, est égale à la valeur absolue de l'espérance mathématique de la loterie $L$. Autrement dit, cette aire accompagnée d'un signe « moins » est égale à l'espérance mathématique de la loterie $L$. En effet, cette aire est :

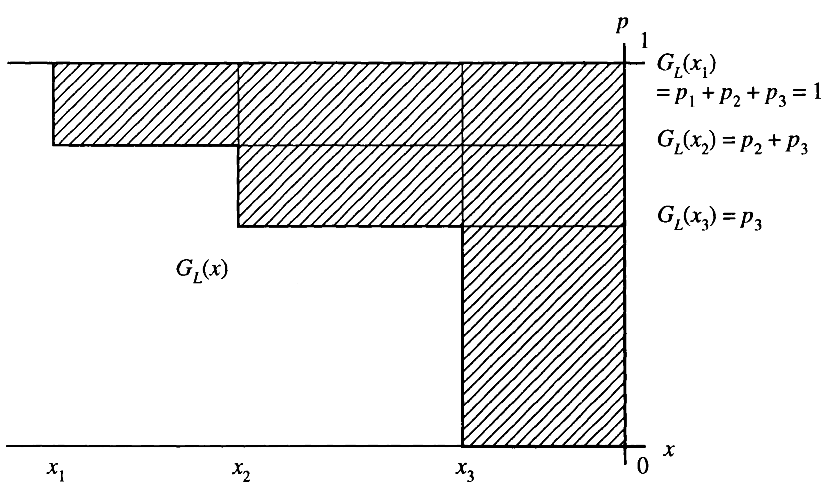
$$- \{(x_2 - x_1).[1 - (p_2 + \ldots + p_n)] + (x_3 - x_2).[1 - (p_3 + \ldots + p_n)] + \ldots$$
$$+ (x_n - x_{n-1}) .(1 - p_n) + (0 - x_n)\}$$

$$= - \{(x_2 - x_1).[1 - G_L(x_2)] + (x_3 - x_2).[1 - G_L(x_3)] + \ldots$$
$$+ (x_n - x_{n-1}).[1 - G_L(x_n)] + (0 - x_n)\}$$

$$= - \{ \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}) [1 - G_L(x_i)] + (0 - x_n)\} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Donnons une illustration dans le cas d'une loterie comportant 3 résultats, $L = (x_1, p_1; x_2, p_2; x_3, p_3)$ :

FIGURE 2




Valeur absolue de l'espérance mathématique de la loterie $L$

(iii) Pour une loterie quelconque $L = (x_i, p_i)_{i=1,\dots,n}$.

L'aire située, entre la courbe de la fonction *décumulative* $G_L$, l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses dans le demi-plan positif, à laquelle on retranche l'aire située, entre la courbe de la fonction *décumulative* $G_L$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $p = 1$ dans le demi-plan négatif, est égale à l'espérance mathématique de la loterie $L$.

En effet, si $k \in \{1, \dots, n\}$, $1 < k < n$, est l'indice du dernier résultat négatif et par conséquent $k + 1$ l'indice du premier résultat positif, la différence entre ces deux aires est :

$$(x_{k+1} - 0).(p_{k+1} + \dots + p_n) + (x_{k+2} - x_{k+1}).(p_{k+2} + \dots + p_n) + \dots + (x_n - x_{n-1}).(p_n)$$
$$- [(x_2 - x_1).(p_1) + \dots + (x_k - x_{k-1}).(p_1 + \dots + p_{k-1}) + (0 - x_k)]$$

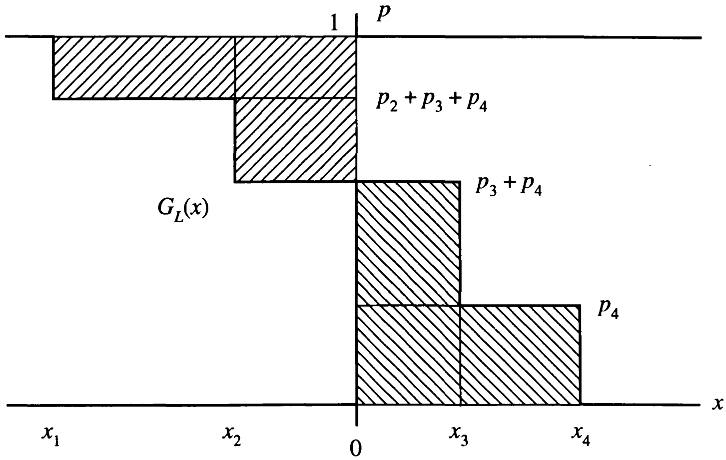
$$= (x_{k+1} - 0).G_L(x_{k+1}) + (x_{k+2} - x_{k+1}).G_L(x_{k+2}) + \dots + (x_n - x_{n-1}).G_L(x_n)$$
$$- \{(x_2 - x_1).[1 - G_L(x_2)] + \dots + (x_k - x_{k-1}).[1 - G_L(x_k)] + (0 - x_k)\}$$

$$= (x_{k+1} - 0).G_L(x_{k+1}) + \sum_{i=k+2}^{n} (x_i - x_{i-1})\, G_L(x_i) - \{ \sum_{i=2}^{k} (x_i - x_{i-1})\, [1 - G_L(x_i)]$$
$$+ (0 - x_n)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Donnons une illustration dans le cas d'une loterie comportant 4 résultats, $L = (x_1, p_1; x_2, p_2; x_3, p_3; x_4, p_4)$, où $x_2 < 0$ et $x_3 > 0$ :

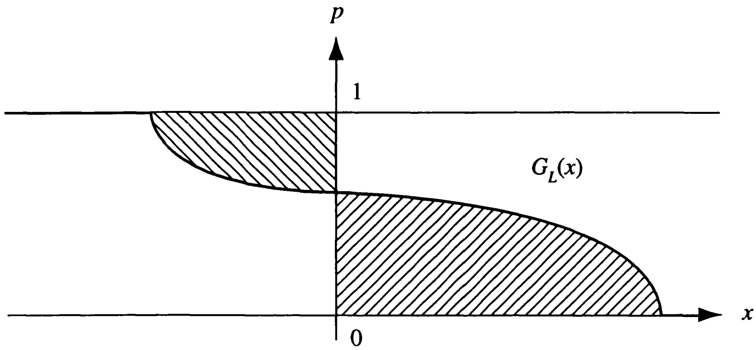
FIGURE 3




= Espérance mathématique de la loterie $L$

Dans le cas où le nombre de conséquences n'est pas nécessairement fini, nous pouvons mener le même type de présentation graphique. Dans le cas d'une loterie engendrant à la fois des gains et à la fois des pertes, ce type d'illustrations conduit à :

FIGURE 3 BIS




Dans l'orthant positif, l'aire hachurée sous la courbe vaut :

$$\int_0^{+\infty} G_L(x)\, dx.$$

Dans l'orthant négatif, l'aire hachurée (c'est-à-dire l'aire située entre la courbe et la droite d'équation $p = 1$), vaut :

$$\left| \int_{-\infty}^{0} [1 - G_L(x)]\, dx \right| = - \int_{-\infty}^{0} [1 - G_L(x)]\, dx.$$

La différence entre ces deux aires est égale à l'espérance mathématique de gain de la loterie :

$$E(L) = - \int_{-\infty}^{0} [1 - G_L(x)]\, dx + \int_0^{+\infty} G_L(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} [G_L(x) - 1]\, dx + \int_0^{+\infty} G_L(x)\, dx.$$

Puisque la loterie $L$, dont nous calculons l'espérance, est la loi image d'une variable aléatoire $f$ $(L = P_f)$, nous pouvons encore écrire :

$$E(L) = \int_{-\infty}^{0} [P\{s \in S / f(s) > x\} - 1]\, dx) + \int_0^{+\infty} P\{s \in S / f(s) > x\}\, dx.$$

Notons que, dans le cadre de l'incertain non probabilisé, il n'est pas possible de représenter graphiquement une telle espérance puisqu'il est impossible de construire une fonction décumulative (ou cumulative).

## 6. DU CALCUL D'ESPÉRANCE À L'INTÉGRALE DE CHOQUET

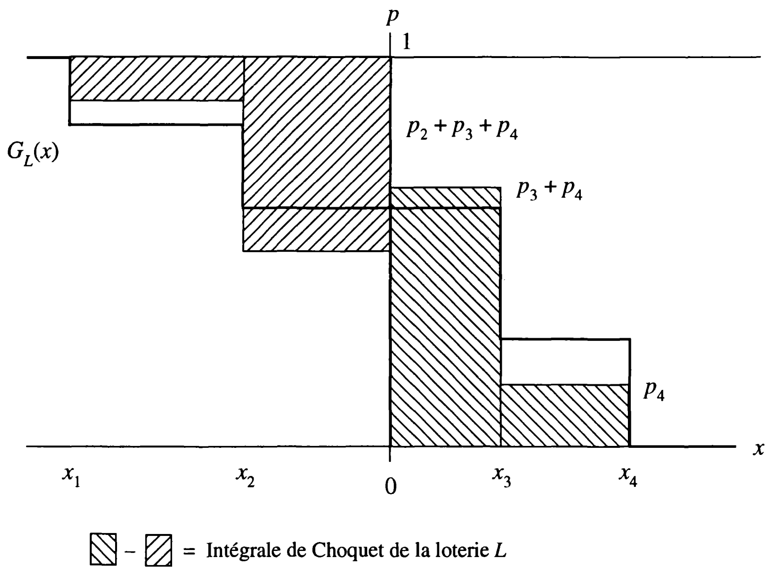
Donnons maintenant la définition d'une intégrale de Choquet (Dellacherie, 1970). Étant donnée une capacité $C : S \to [0;1]$, l'intégrale de Choquet de tout acte $f : S \to \mathbb{R}$, notée $\int f(.)\, dC$, ou encore $\int f\, dC$ est égale à :

$$\int_{-\infty}^{0} [C\,\{s \in S / f(s) > x\} - 1]\, dx + \int_{0}^{+\infty} C\,\{s \in S / f(s) > x\}\, dx.$$

Il existe une analogie frappante entre cette expression et l'espérance mathématique de la loi image d'une variable aléatoire : une intégrale de Choquet est en fait l'extension d'un calcul d'espérance à une mesure non nécessairement additive (formellement, il suffit de remplacer la mesure additive $P$ par la mesure non additive $C$).

La représentation graphique d'une telle intégrale est possible (dans l'incertain probabilisé uniquement) en traduisant la non-additivité de la mesure $C$ par une « contraction » ou une « dilatation » des aires associées à chaque supplément de résultat (chaque $x_{i+1} - x_i$ dans le cas discret). Reprenons tout d'abord l'exemple de la figure 3. L'intégrale de Choquet de la variable dont la loi image est la loterie $L = (x_1, p_1; x_2, p_2; x_3, p_3; x_4, p_4)$ est représentée par la différence d'aires suivante :

FIGURE 4



Dans cet exemple, l'aire associée au supplément de résultat $x_4 - x_3$ est « contractée ». Celà signifie que (en supposant toujours que $L$ est la loi image d'une variable aléatoire $f$) :

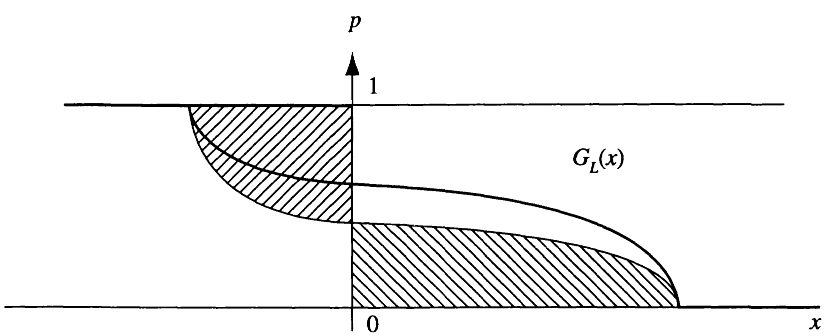
$$\int_{x_3}^{x_4} C\,\{s\in S/\,f(s) > x\}\,dx < \int_{x_3}^{x_4} P\,\{s\in S/\,f(s) > x\}\,dx.$$

Par contre l'aire associée au supplément de résultat $x_3 - 0$ est « dilatée ». Cela signifie que :

$$\int_{0}^{x_3} C\,\{s\in S/\,f(s) > x\}\,dx < \int_{0}^{x_3} P\,\{s\in S/\,f(s) > x\}\,dx.$$

Dans le cas où le nombre de conséquences n'est pas nécessairement fini, nous pouvons également proposer une représentation graphique construite sur le même principe :

FIGURE 4 BIS




Sur la figure 4 bis comme sur la figure 4, la différence d'aires hachurées est égale à l'intégrale de Choquet de la loterie $L$.

L'espérance non additive d'utilité est encore une généralisation de cette intégrale tout comme l'espérance d'utilité de Von Neumann & Morgenstern est une généralisation de l'espérance mathématique simple.

## 7. INTÉGRALE DE CHOQUET ET ESPÉRANCE NON ADDITIVE D'UTILITÉ

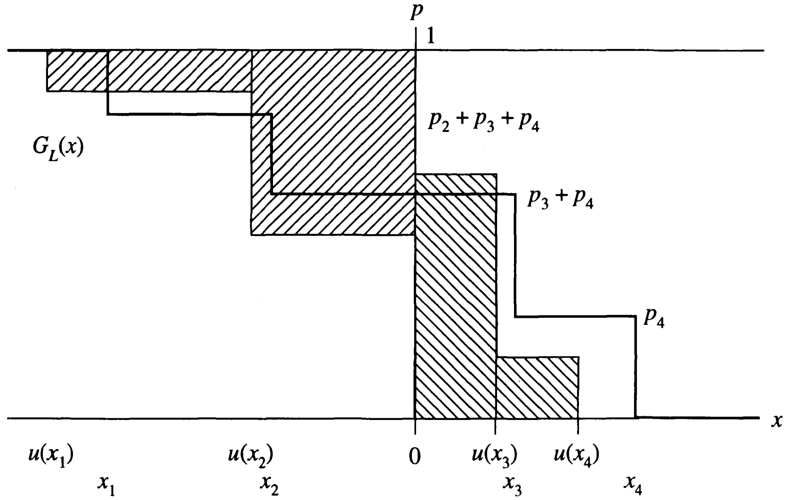
L'intégrale de Choquet est le cas particulier du critère d'espérance non additive d'utilité pour lequel la fonction $u$ est égale à la fonction identité. Mais, de manière plus générale, la satisfaction engendrée par les résultats est mesurée par une fonction $u$ non nécessairement linéaire. C'est pourquoi nous retrouvons bien :

$$V(f) = \int_{-\infty}^{0} [C\{s\in S/\,u[f(s)] > x\} - 1]\,dx + \int_{0}^{+\infty} C\,\{s\in S/\,u[f(s)] > x\}\,dx.$$

La représentation graphique de l'espérance non additive d'utilité est possible dans l'incertain probabilisé en traduisant l'éventuelle non-linéarité de la fonction $u$ par un « rétrécissement » ou un « élargissement » des aires déjà affectées par les « contractions » et « dilatations » dues à la non-additivité de la mesure $C$.

Reprenons l'exemple des figures 3 et 4. L'espérance non additive d'utilité de la variable dont la loi image est la loterie $L = (x_1, p_1; x_2, p_2; x_3, p_3; x_4, p_4)$ est représentée par la différence d'aires suivante :

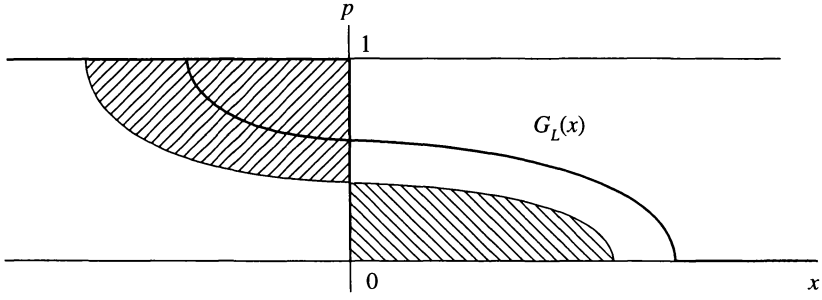
FIGURE 5




– = Espérance non additive d'utilité de la loterie $L$

Dans le cas où le nombre de conséquences n'est pas nécessairement fini, nous pouvons également proposer une représentation graphique construite sur le même principe :

FIGURE 5 BIS



La différence d'aires hachurées est égale à l'espérance non additive d'utilité de la loterie $L$.

## 8. CONVENTIONS D'ÉCRITURE

À la place de l'expression :

$$V(f) = \int_{-\infty}^{0} [C\{s \in S / u[f(s)] > x\} - 1]\, dx + \int_{0}^{+\infty} C\{s \in S / u[f(s)] > x\}\, dx,$$

on trouve parfois l'expression :

$$V(f) = \int_{-\infty}^{0} [C\{s \in S / f(s) > x\} - 1]\, du(x) + \int_{0}^{+\infty} C\{s \in S / f(s) > x\}\, du(x)$$

ou encore : $V(f) = \int u[f(.)]\, dC.$

Ces expressions sont des conventions d'écriture car il n'est possible de définir l'intégration ni par rapport à $u$ non linéaire, ni par rapport à $C$ non additive.

Enfin, dans le cas particulier du risque, il existe une mesure de probabilité objective $P$, et sous le postulat de respect de la dominance stochastique, il existe une fonction $\phi$ croissante et définie à une transformation affine près telle que la fonction représentative de la relation de préférence s'écrive :

$$V(f) = \int_{-\infty}^{0} [\phi\,(P\{s \in S, u[f(s)] > x\}) - 1]\, dx + \int_{0}^{+\infty} \phi\,(P\{s \in S, u[f(s)] > x\}\, dx.$$

La spécification ci-dessus est, bien entendu, celle du modèle RDEU.

## CONCLUSION

Nous avons tenté, dans cet article, de présenter de manière simple les principales spécifications du modèle d'espérance non additive d'utilité (telles qu'on les rencontre dans la littérature). Au delà de la spécificité de l'intégrale de Choquet, la difficulté principale d'une telle clarification réside dans la grande disparité des formalisations retenues pour les différentes axiomatisations et applications. C'est pourquoi nous avons insisté au préalable sur l'hypothèse de neutralité permettant d'établir une transition rigoureuse entre risque et incertain et nous avons attiré l'attention du lecteur sur l'existence de conventions d'écriture susceptibles de troubler la compréhension de l'articulation entre les différentes spécifications.

## BIBLIOGRAPHIE


CHATEAUNEUF, A. (1994), «Modeling Attitudes towards Uncertainty and Risk through the Use of Choquet Integral», *Annals of Operations Research*, 52 : 3-20.

CHOQUET, G. (1953), «Theorie des Capacités», *Annales de l'Institut Fourier*, 5 : 131-295.

DELLACHERIE, C. (1970), «Quelques commentaires sur les prolongements des capacités», Séminaire probabilités V, Strasbourg, Berlin : Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 191.

GAYANT, J.-P. (1995), «Généralisation de l'espérance d'utilité en univers risqué : représentation et estimation», *Revue économique*, 46 : 1047-1061.

GAYANT, J.-P. (1997), «Décroissance de l'utilité marginale et aversion probabiliste pour le risque : une remise en cause de l'interprétation classique», *Revue d'économie politique*, 107 : 331-342.

MACHINA, M. (1982), «Expected Utility without the Independance Axiom», *Econometrica*, 50 : 277-323.

QUIGGIN, J. (1982), «A Theory of Anticipated Utility», *Journal of Economic Behavior and Organisation*, 3 : 323-343.

SARIN, R., et P. WAKKER (1992), «A Simple Axiomatization of Non-Additive Expected Utility», *Econometrica*, 60 : 1255-1272.

SAVAGE, L.J. (1954), *The Foundations of Statistics*, New York, John Willey and Sons.

SCHMEIDLER, D. (1989), «Subjective Probability and Expected Utility without Additivity», *Econometrica*, 57 : 571-587.

SEGAL, U. (1989), «Anticipated Utility : A Measure Representation Approach», *Annals of Operations Research*, 19 : 359-373.

SHAFER, G. (1976), *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press.

VON NEUMANN, J., et O. MORGENSTERN (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.

WAKKER, P. (1990), «Under Stochastic Dominance Choquet Expected Utility and Anticipated Utility are Identical», *Theory and Decision*, 29 : 119-132.

WAKKER, P. (1994), «Separating Marginal Utility and Probabilistic Risk Aversion», *Theory and Decision*, 36 : 1-44.

YAARI, M. (1987), «The Dual Theory of Choice under Risk », *Econometrica*, 55 : 95-105.