L'Actualité économique

Stratégies optimales dans l'incertitude

Georges Bernard

Volume 43, numéro 2, juillet–septembre 1967

URI : https://id.erudit.org/iderudit/1000147ar
DOI : https://doi.org/10.7202/1000147ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Bernard, G. (1967). Stratégies optimales dans l'incertitude. *L'Actualité économique*, *43*(2), 236–260. https://doi.org/10.7202/1000147ar

Stratégies optimales dans l'incertitude

Les ouvrages de référence [1] 1, 2, 4, 7, 8, 10, 11 et 12 et la bibliographie très fournie contenue dans ces publications exposent dans sa généralité la théorie moderne de la décision.

Dans ce qui suit l'auteur se borne à exposer quelques réflexions élémentaires qui lui sont venues à la lecture de l'article de MM. Thompson et Beranek [2]. Pour la plupart elles constituent un rappel de résultats bien connus. Le reste présente une interprétation moins fréquemment rencontrée, sinon nouvelle, des stratégies optimales en information imparfaite.

Nous examinons le problème de la décision optimale dans sa structure statique et discrète suivante :

— soient m actions possibles d'un agent : A_1, A_2, ... A_i, ... A_m

— soient n états de la nature ou actions possibles d'un autre agent, considéré alors et dit adversaire du premier agent :

$$\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots \mathcal{N}_j, \dots \mathcal{N}_n \qquad m \gtrless n$$

— soit g_{ij} le gain, connu à priori, de l'agent faisant l'action A_i lorsque l'état $\mathcal{N}_j$ se réalise (ou l'adversaire fait l'action $\mathcal{N}_j$).

La matrice G $\{ g_{ij} \}$ est donnée.

La lecture des ouvrages de référence 1, 2 et 8 permet de se familiariser avec les critères pessimistes utilisables en l'absence de toute prévision de l'avenir, d'une prédiction de ce que « fera » la nature ou, réellement, l'adversaire lorsqu'on fera A_i : l'information disponible se borne à la connaissance du tableau G. On dit

1. Les références sont à la fin de l'article, pages 259 et 260.
2. Voir référence 9.

alors que l'avenir n'est pas probabilisable et on applique pour l'agent le raisonnement aujourd'hui classique du jeu à deux personnes à somme nulle : si l'agent choisit l'action A_i, la nature (ou l'adversaire) choisira l'état $\mathcal{N}_j$ tel que sa « perte » soit minimum, donc la valeur de g_{ij} minimum :

(1) $$\forall i,\ A_i \Rightarrow \mathcal{N}_j :\ \min_j g_{ij}$$

L'agent choisit alors l'action optimale $A°$ telle que son gain soit maximum sous la contrainte (1) :

(2) $$A° :\ \max_i / \mathcal{N}_j :\ \min_j g_{ij} /$$

donc : $$\overset{\circ}{g}_{ij\ \mathrm{maximin}} = \max_i \min_j g_{ij}$$

C'est ce qu'on appelle agir suivant le critère maximin (ou minimax en cas de pertes ou coûts inscrits dans les cases de G). Il est évident qu'il existe *toujours* un résultat g°_{ij} ainsi défini.

Dans la littérature la « stratégie » $A°$ est dite « stratégie pure », puisqu'elle définit un seul acte optimal, par opposition aux « stratégies mixtes » qui définissent plus d'un acte optimal. Nous écrirons « action » ou « acte » optimal pour « stratégie pure » et « stratégie » pour « stratégie mixte », dans un sens d'ailleurs un peu plus large que dans la littérature.

Si l'on agit en face de la nature, il est absurde de penser qu'elle puisse faire de son côté un tel raisonnement. Il est même d'un pessimisme exagéré et non fondé à priori d'admettre que la nature « choisira l'état $\mathcal{N}_j$ tel que sa « perte » soit « minimum ». La notion de « perte » de la nature n'a guère de sens ; appliquer la règle du jeu à somme nulle est peu défendable, sinon pour dire qu'en choisissant $A°$ on se prémunit contre la malchance la plus noire possible, que l'état de la nature soit justement :

$$\forall i,\ \mathcal{N}_j :\ \min_j g_{ij}$$

Bien que très peu probable, une telle situation n'est ni absurde ni impossible.

Si, par contre, il s'agit d'un conflit, d'un combat ou d'un jeu entre deux personnes disposant toutes les deux de la seule connaissance de G, par ailleurs également conscientes de leur intérêt et agissant en conséquence, dans lesquels ce que l'un gagne l'autre le perd, il faut refaire le même raisonnement que ci-haut pour l'adversaire de l'agent. Si cet adversaire fait l'action N_j, l'agent choisira A_i telle que son gain soit maximum, la perte de l'adversaire maximum :

$$(3) \qquad \forall j, \; N_j \Rightarrow A_i : \max_i g_{ij}$$

L'adversaire choisira donc l'action $N°$ telle que sa perte soit minimum sous la contrainte (3) :

$$(4) \qquad N° : \min_j / A_j : \max_i g_{ij} /$$

donc : $\qquad \overset{\circ}{g}_{ij\ \text{minimax}} = \min_j \max_i g_{ij}$

Si $\qquad \overset{\circ}{g}_{ij\ \text{maximin}} = \overset{\circ}{g}_{ij\ \text{minimax}}$,

la case correspondante du tableau G est appelée « col » ou « *saddle point* » et la stratégie pure ou action $A°$ pour l'agent et $N°$ pour l'adversaire sont optimales pour eux deux.

Si $\qquad \overset{\circ}{g}_{ij\ \text{maximin}} \neq \overset{\circ}{g}_{ij\ \text{minimax}}$,

il est connu que le comportement optimal de l'agent est une certaine stratégie composée d'actions A_i et le comportement optimal de son adversaire, s'il y a lieu, une stratégie composée d'actions N_j. Le raisonnement suivant le démontre et donne en même temps la méthode de calcul des stratégies optimales. On admet que l'espérance du gain (ou de la perte) est le critère du choix. L'agent cherche une distribution de probabilités à priori d'actions à entreprendre telle que l'espérance de son gain soit indépendante de l'état de la nature (ou de l'action de l'adversaire) et la plus grande possible. Il agira alors suivant une stratégie définie par un dispositif de réalisation d'aléas c'est-à-dire en choisissant les actions composant cette stratégie au moyen d'un système de paris.

La distribution de probabilités à trouver est la solution d'un système d'équations linéaires. En effet, la stratégie de l'agent consiste à transformer les actions A_i possibles, entre lesquelles il ne sait pas choisir, en un aléa $\{A_i, p_i\}$ où p_i est la probabilité qu'il choisisse justement A_i. Si $E(g_{ij})$ est dans ces conditions son espérance de gain, on doit avoir :

$$(5) \quad \max E(g_{ij}) = M = \sum_i g_{ij} p_i \; \forall j \; ; \; 0 \leq p_i \leq 1 \text{ et } \sum_i p_i = 1$$

(5) est un système de $n + 1$ équations ($j = 1, \ldots n$) à $m + 1$ inconnus $p_1 \ldots p_m$ et la valeur de l'espérance M. Il est classique

de rechercher sa solution par sa transformation en un programme linéaire $m \times n$, dont le vecteur p est l'inconnue et la matrice G la matrice caractéristique [3].

S'il s'agit d'un jeu à somme nulle entre l'agent et son adversaire, le même raisonnement appliqué au comportement de ce dernier livre :
Soit q_j la probabilité à priori que l'adversaire choisisse l'action N_j. Il cherchera à rendre minimum l'espérance de sa perte, quelle que soit l'action A_i de l'agent :

$$(6) \quad \min E(g_{ij}) = M' = \sum_j g_{ij} q_j \ \forall i \ ; \ 0 \leqq q_j \leqq 1 \text{ et } \sum_j q_j = 1$$

(6) est un système de $m+1$ équations à $n+1$ inconnues : $q_1, q_2 \ldots q_n$ et M'.
Sa solution est en général obtenue par sa transformation en un programme linéaire qui est le dual du programme issu de (5) [4]. Lorsqu'il y a col, ces programmes dégénèrent car les aléas A_i et N_j se concentrent en des points uniques de probabilité 1, qui déterminent le col, action optimale.

C'est là l'essentiel des raisonnements simples qui décrivent la démarche de von Neumann et Morgenstern [5]. En absence d'informations sur le comportement de l'adversaire ou de la nature, on neutralise leur action dolosive possible en transformant son propre choix en un aléa à priori. Dans certains cas la méthode échoue ; dans d'autres (existence d'un col) l'aléa dégénère en une certitude et la stratégie se transforme en une action (la stratégie mixte en stratégie pure). Si la méthode échoue et si l'on « joue » contre la nature, on peut toujours utiliser le raisonnement maximin, qui est une action ou stratégie pure.

Dans certains cas le programme dual est plus facile à résoudre que le primal. On peut alors modifier légèrement le raisonnement ci-dessus et définir une action optimale en absence du col, lorsqu'on joue contre la nature, action en général meilleure que le maximin pur. On peut d'ailleurs admettre cette solution pour d'autres raisons aussi, par exemple, de simplicité de règle d'action, au lieu d'une stratégie, mais en gardant à l'esprit ce qu'elle signifie.

3. Voir référence 7.
4. *Ibid.*
5. Voir référence 1.

On résout le dual et on définit ainsi une distribution q des états de la nature, qui est par hypothèse la plus défavorable pour l'agent, entre toutes les distributions possibles. Pour chacun de ses actes A_i, l'espérance de l'aléa $\{g_{ij}, q_j\}$ est invariante par rapport à i, comme il vient d'être montré. Par hypothèse cette solution est équivalente à celle de la stratégie optimale d'un jeu de mêmes résultats avec un adversaire. Puisque la nature ne peut pas « apprendre » la stratégie de l'agent et utiliser cette information additionnelle à son profit, comme le ferait un joueur, toute stratégie de l'agent reste optimale. Le critère maximin donne alors une indication non obligatoire de choix entre les m actions.

Certes, ce raisonnement est à la fois pessimiste et irréaliste. Il est pessimiste, car il suppose que la nature ait « choisi » la distribution de probabilités de ses états la plus défavorable pour l'agent ; il est irréaliste, car cette distribution peut être, et l'est avec une grande probabilité, différente. Une distribution à priori d'états de la nature est d'un caractère essentiellement extra-mathématique. C'est une quantification qui peut se servir des mathématiques, de comportements ou d'expériences. La déduire formellement de la matrice des gains, comme il vient d'être fait, et cela de quelque manière que ce soit, est une incohérence logique, sauf évidemment dans une théorie des jeux ou des conflits. Mais alors les distributions de probabilités, p et q, sont des outils d'action et non pas des mesures d'*incertitude*. C'est une *distinction* essentielle rarement rencontrée.

Savage [6] propose d'utiliser les mêmes raisonnements mais en transformant la matrice des résultats G en une matrice « regrets » G', pour l'agent, et G'', pour l'adversaire, s'il y a lieu. Pour chaque état N_j possible, on calcule la différence entre le gain maximum et les autres gains, qui se réalisent pour toutes les autres actions possibles :

$$g'_{ij} = \max_i g_{ij} - g_{ij} \text{ pour tout } i$$

On admet ensuite que pour tout acte A_i l'agent recherche son regret le plus faible et la nature ou l'adversaire son regret le plus grand :

$$\forall i, \; N_j \; \max_j g'_{ij}$$

6. Voir référence 2.

L'agent choisira l'action A_i telle que son regret soit sous cette contrainte le plus faible :

$$A'^{\circ} : \min_i / \mathcal{N}_j : \max_j g'_{ij} / \ ; \ g'^{\circ}_{ij} = \min_i \max_j g'_{ij}$$

Si l'agent a un adversaire, la matrice G est pour celui-ci une matrice de pertes ; pour toute action A_i il va donc calculer la différence entre la perte la plus faible et les autres pertes, qui se réalisent pour tous les états $\mathcal{N}_j$ possibles ; ce sera le regret de cet adversaire :

$$g''_{ij} = g_{ij} - \min_j g_{ij}$$

L'agent cherche à infliger à l'adversaire le regret maximum :

$$\forall j \ A_i : \max_i g''_{ij}$$

tandis que celui-ci choisira l'état $\mathcal{N}_j$ tel que son regret soit sous cette contrainte le plus faible :

$$\mathcal{N}''_j : \min_j / A_i : \max_i g''_{ij} ; \ g''^{\circ}_{ij} = \min_j \max_i g''_{ij}$$

Comme précédemment, si la case A'°, $\mathcal{N}''^{\circ}$ est unique, il y a col et la solution du jeu est une action ou stratégie pure ; dans le cas contraire on peut appliquer les raisonnements de von Neumann sur les stratégies mixtes.

Le raisonnement de Savage ressort pour nous d'un problème qui est distinct du nôtre, car il consiste à savoir dans quelle mesure la matrice G représente des éléments corrects des choix. Il s'agit là de la théorie de l'utilité des valeurs certaines, tant qu'on manipule G en dehors de toute quantification de l'incertitude ; puis de l'utilité de ces valeurs, lorsqu'elles sont incertaines. Nous examinerons brièvement ce point plus loin, point qui est par ailleurs traité dans les ouvrages de référence 13 et 15.

Nous allons maintenant pour le principal borner notre examen à celui des actions ou stratégies optimales en face d'un ensemble d'états de la nature indifférente, mais sur laquelle on dispose d'une information additionnelle : ces états sont distribués suivant un vecteur de probabilités donné à priori q $(q_1, q_2 \ldots q_j \ldots q_n)$, quelconque et indépendant de la matrice G. Cette matrice pourra être remplacée par celle des regrets de l'agent ou, plus généralement, par celle des utilités des résultats d'une action A_i lorsque l'état $\mathcal{N}_j$ se produit.

Une action optimale (stratégie pure) strictement à priori, en absence de toute autre information additionnelle, est immédiatement définie par :

$$(7) \qquad A^\circ : \max_i E(g_{ij}) = \max_i \sum_j g_{ij} q_j$$

si le critère de choix est l'espérance du gain. On choisit l'action pour laquelle l'espérance de l'aléa (g_{ij}, q_j) est la plus grande, parmi les m aléas possibles.

Les états de la nature sont toujours à priori aléatoires de distribution q. À posteriori, l'un d'entre eux se produit et devient alors certain, puisque réalisé. Nous faisons l'hypothèse, absurde, suivante : nous sommes capables de *prédire* parfaitement quel état $\mathcal{N}_j$ va se réaliser, parmi les n états possibles de l'aléa ($\mathcal{N}_j$, q_j). Sans piper le dé, nous savons qu'au prochain coup va sortir 3 ou 6 ou 1.

Il est évident que dans ces conditions l'acte optimal A° sera celui qui procure le gain maximum pour chaque état $\mathcal{N}_j$ possible. Nous pouvons définir cet acte, puisque nous sommes capables de prédire la réalisation de l'état $\mathcal{N}_j$:

$$j = j^\circ \Rightarrow A_i^\circ : \max_i g_{ij}^\circ$$

La stratégie optimale (stratégie mixte) sera donc :

$$\forall j, \text{ si } \mathcal{N}_j \text{ arrive on fait } A_i^\circ : \max_i g_{ij}$$

et la valeur de cette stratégie sera :

$$(8) \qquad /A^\circ/ = E(\max_i g_{ij}) = \sum_j (\max_i g_{ij} q_j)$$

$/A^\circ/$ est la stratégie de prévision parfaite. Elle est composée de m actions généralement distinctes, mais dont certaines peuvent être les mêmes que d'autres. Bien que de nature aussi limitée que les stratégies mixtes neumanniennes, elle leur est opposée : c'est une stratégie de préscience, de la connaissance de l'avenir. C'est aussi une stratégie opérationnelle à posteriori, lorsque la décision sur A_i peut attendre la réalisation de $\mathcal{N}_j$, stratégie dont la valeur est estimée à priori par l'expression (8).

Il est évident que dans les hypothèses de l'analyse du problème la décision de prévision parfaite est absolument optimale : il est impossible d'en définir une autre d'espérance plus grande.

Toutes les actions ou stratégies sont des éléments de l'ensemble des stratégies possibles, dont le nombre d'éléments est

(9) $$R = m^n$$

comme il est facile de le voir : pour chaque état N_j il y a m choix (par ligne de la matrice G). Donc dans deux lignes il y a $m \times m$ choix, dans trois $(m \times m) \times m$ choix, etc.

Il est possible, du moins en théorie et cela d'autant plus facilement que les entiers m et n sont plus petits, d'énumérer toutes les stratégies et ensuite d'appliquer sur leur ensemble un ordre suivant un critère de préférence donné à priori. L'utilisation d'une calculatrice électronique élargit beaucoup le domaine pratique d'application d'une telle méthode d'exploration.

L'énoncé ci-dessus implique la définition générale d'une stratégie et d'un critère de préférence. Nous proposons de dire qu'une stratégie définit un aléa à priori, compte tenu de la matrice G, et que l'utilité de cet aléa est une mesure — pour autant que l'utilité puisse l'être — dans l'espace des stratégies possibles.

Définissons par exemple une stratégie par l'énoncé :

(10) si l'état N_j se produit, on fait l'action A_i : $N_j \Rightarrow A_i$

En présence d'une distribution à priori des états N_j, q, les aléas résultant de toutes les stratégies possibles ne se distinguent que par les valeurs des résultats (des cases de la matrice G). On peut adopter, pour écrire ces stratégies, la notation de Chernoff et Moses [7] :

(11) $$S(a, b, c, \ldots)$$

où $a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots i \ldots m$ et le nombre de lettres différentes est égal à n. Si le nombre i se trouve dans cette écriture au rang j, cela signifie que l'on entreprendra l'action A_i si l'état N_j se produit. Puisque les utilités des aléas, comme les utilités en général, sont des fonctions monotones croissantes des valeurs et des probabilités, il est évident qu'il est immédiat de déterminer, suivant cette définition, dans l'ensemble R des stratégies, la meilleure et la pire d'entre elles.

La meilleure stratégie est celle de prévision parfaite (8), définie à la page 242 ci-dessus et la pire est la stratégie définie de la même

7. Voir référence 11.

manière, sauf qu'à la place de $\max_i$ on écrit $\min_i$. L'espérance de sa valeur est :

$$(12) \qquad /A'^{\circ}/ = \sum_j (\min_i g_{ij}) q_j$$

La définition (10) de stratégies n'est pas la seule possible : les stratégies mixtes de von Neumann et Morgenstern sont d'un type différent, que l'on peut interpréter ainsi. On admet que la distribution à priori q des états de la nature (ici des actions de l'adversaire) est la plus défavorable possible pour l'agent. La stratégie optimale de l'agent est définie comme un aléa à priori de distribution p telle que son utilité devienne indépendante des actions de l'adversaire, donc des états N_j distribués suivant q. Admettons pour simplifier le raisonnement que l'utilité d'un aléa est l'espérance des gains. Le raisonnement de von Neumann et Morgenstern revient à un pari composé : l'utilité d'une action A_i est celle d'un aléa de n éléments g_{ij}, $j = 1 \ldots n$, de distribution q. L'espérance de cet aléa est un élément d'un deuxième aléa de m éléments A_1, A_2, ... A_m de distribution p, dont l'espérance, l'utilité de la stratégie de l'agent, est la valeur du jeu, indépendante des états N_j. L'adversaire de l'agent adoptant d'ailleurs la stratégie duale, consistant à distribuer ses actions N_j suivant une distribution à priori q, obtient une utilité du jeu, espérance d'un aléa composé, égale à celle du jeu de l'agent.

Cette interprétation des stratégies mixtes neumanniennes rend claire la raison contraignante pour laquelle ses auteurs ont adopté dans leur axiomatique de l'utilité l'axiome de l'indifférence entre les paris simples et composés :

$$U(aX_1 + (1 - a)X_2) = aU(X_1) + (1 - a)U(X_2)$$

Une troisième définition des stratégies consiste à remplacer dans (10) le membre de phrase : « si l'état N_j arrive » par « si on prévoit à priori que N_j va arriver » :

$$(13) \qquad \text{prév } N_j = N_{j^\circ} \Rightarrow A_i$$

Nous examinerons ces stratégies dans la section suivante. Leur classe est très importante, puisqu'elle comprend en fait tout ce que l'on définit par la recherche scientifique : c'est une démarche entre l'expérimentation, l'hypothèse constituant une prévision et la stratégie optimale découlant de cette prévision.

Avant d'entreprendre cet examen, il semble utile de rendre concrets, sur un exemple numérique simple, les résultats déjà obtenus.

Nous adopterons la matrice G de l'exemple 9, page 109, de l'ouvrage de J.D. Williams [8] :

	A_1	A_2	A_3	q
N_1	3	5	2	2/5
N_2	0	6	8	1/9
N_3	4	1	3	22/45
p	5/9	1/5	11/45	

Les nombres portés dans ce tableau sont les gains de A, contrairement à l'ouvrage mentionné.

Le critère maximin pour A conduit à adopter l'action A_3 pour laquelle son gain ne peut pas être inférieur à 2, maximum des minimums des gains possibles pour les autres actions.

Le même critère, ici minimax, utilisé par N, supposé un joueur informé et intelligent, conduit à l'action (état) N_3, pour laquelle sa perte est au plus égale à 4, minimum des maxima des pertes possibles pour ses autres actions.

L'exemple ainsi choisi, exprès, pour qu'il n'y ait pas de col, il est immédiat de calculer les distributions de probabilité p et q de stratégies (mixtes) optimales du jeu :

$$3p_1 + 5p_2 + 2p_3 = 0p_1 + 6p_2 + 8p_3 = 4p_1 + p_2 + 3p_3$$
$$\text{et } p_1 + p_2 + p_3 = 1$$
$$3q_1 + 0q_2 + 4q_3 = 5q_1 + 6q_2 + 1q_3 = 2q_1 + 8q_2 + 3q_3$$
$$\text{et } q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

d'où :

$$p_1 = 5/9 \qquad p_2 = 1/5 \qquad p_3 = 11/45$$
$$q_1 = 2/5 \qquad q_2 = 1/9 \qquad q_3 = 22/45$$

Si A et N sont deux joueurs dont l'un gagne ce que l'autre perd, la stratégie optimale de A est de tirer au sort son action dans le rapport des fréquences 25:9:11, tandis que celle de N est de tirer au sort son action dans le rapport des fréquences 18:5:22.

8. Voir référence 8.

Dans ces conditions l'espérance du gain de A ou de perte de $\mathcal{N}$ sera, quelle que soit l'action de l'autre, choisie par le sort, égale à

$$6p_2 + 8p_3 = 3q_1 + 4q_3 = 6/5 + 88/45$$
$$= (54 + 88)/45 = 142/45 = 3.156...$$

Le gain de A est alors supérieur en moyenne au gain maximin de 2 et la perte de $\mathcal{N}$ inférieure en moyenne à la perte minimax de 4.

Si A agit en face de la nature, en absence de toute information autre que celle du tableau des gains possibles, il est avantageux pour lui, et moins pessimiste, de remplacer l'utilisation du critère maximin par la supposition que la distribution de probabilités des états de la nature est à priori celle qui est définie par le vecteur q. L'espérance de son gain devient 3.156 au lieu de la valeur maximin 2. Mais ses trois actions possibles sont alors indifférentes :

$$E/S(111)/ = E/S(222)/ = E/S(333)/ = 142/45$$

tandis que le critère maximin indique impérativement l'action A_3 (stratégie $S(333)$).

La meilleure stratégie pour A est évidemment $S(231)$: si $\mathcal{N}_1$ arrive on fait A_2, si $\mathcal{N}_2$ arrive on fait A_3, si $\mathcal{N}_3$ arrive on fait A_1. Son espérance à priori est égale à

$$5 \times 2/5 + 8/9 + 88/45 = (90 + 40 + 88)/45 = 218/45 = 4.85$$

La pire stratégie est $S(312)$ dont l'espérance à priori est de $58/45 = 1.3$.

L'analyse ci-dessus montre qu'en absence de toute information autre que la connaissance de G et en absence de tout effort de prévision il y a lieu d'utiliser l'action A_3 (stratégie $S(333)$) et on peut espérer alors un gain moyen de 3.156...

Il est absurde de penser que la nature ait des « utilités ». Si, par contre, on remplace pour A les valeurs des gains par leurs utilités (certaines) ou encore [9], on calcule les utilités des aléas résultant des stratégies possibles, les indications des choix changeront. Il est par exemple facile de voir que si l'utilité marginale des gains est décroissante, la stratégie $S(111)$ (action A_1) devient optimale.

Il n'y a dans la grande majorité des cas réels aucune raison suffisante pour accepter la distribution q comme celle des probabilités

9. Voir référence 15.

réelles (objectives ou subjectives) d'arrivée des états N_j. Il est de même généralement possible, en vertu d'une information plus ou moins complète et certaine, de préciser une distribution à priori q'. Les choix optimaux changent alors.

Par exemple, supposons que la distribution q' soit :

$$q'_1 = 0.5 \qquad q'_2 = 0.3 \qquad q'_3 = 0.2$$

Les espérances des trois actions possibles deviennent :

$$\begin{aligned} A_1 &= S(111) = 1.5 + 0.8 = 2.3 \\ A_2 &= S(222) = 2.5 + 1.8 + 0.2 = 4.5 \\ A_3 &= S(333) = 1.0 + 2.4 + 0.6 = 4.0 \end{aligned}$$

La meilleure stratégie est indépendante de la distribution des probabilités, mais la valeur de son espérance change :

$$E/S(231)/ = 2.5 + 2.4 + 0.8 = 5.7$$

Il en est de même de la pire stratégie :

$$E/S(312)/ = 1.0 + 0.2 = 1.2$$

En prévision parfaite, la meilleure stratégie reste donc $S(231)$; en absence de toute prévision l'action optimale devient $S(222)$.

Nous pouvons répéter la même suite de raisonnements avec la matrice de regrets de A, G', et de N, G''. Elles sont facilement construites (voir pages 240-241) :

G'	A_1	A_2	A_3	q''
N_1	2	0	3	2/5
N_2	8	2	0	1/9
N_3	0	3	1	22/45

G''	A_1	A_2	A_3
	3	4	0
	0	5	6
	4	0	1
p''	5/9	1/5	11/45

Le critère minimax pour A conduit à adopter l'action A_2 ou A_3, puisque dans ces deux choix le regret de A ne peut pas dépasser le minimum des maxima possibles de ce regret pour les trois états possibles de la nature, minimum égal à 3.

Si la nature est un être intelligent, elle appliquera le même critère minimax à sa matrice de regrets G''. Cela la conduira à adopter l'action (état) N_3, pour lequel son regret sera au plus de 4, minimum des maxima des regrets pour toutes les actions possibles de A, ou l'état N_1, où il en est de même.

L'exemple ayant été choisi pour qu'il n'y ait pas de col, on peut calculer les distributions de probabilités p'' et q'' des stratégies optimales du jeu ; mais ici on doit utiliser la matrice G'' pour p'' et G' pour q''. Il a été démontré (référence 2) que ces distributions sont les mêmes que pour G : $p'' = p$ et $q'' = q$.

L'espérance du regret de A ou de N, si tous les deux adoptent la stratégie neumannienne sera égale à :

$$4/5 + 8/9 = (36 + 40)/45 = 76/45 = 2/9 + 66/45$$
$$= 6/5 + 22/45 = 1.69$$

$$15/9 + 4/5 = (75 + 36)/45 = 111/45 = 1 + 66/45$$
$$= 20/9 + 11/45 = 2.47$$

Pour les deux adversaires l'espérance du regret est plus faible que sa valeur par application du critère minimax.

La meilleure stratégie pour A est celle de prévision parfaite, donc encore $S(231)$, de regret nul (ce qui est évident) et la pire $S(312)$, de regret maximum. L'espérance de la première est nulle, de la seconde égale à

$$6/5 + 8/9 + 66/45 = 160/45 = 3.56$$

Nous avons ainsi examiné, dans notre exemple, 5 stratégies : les trois actions (111), (222), (333), la stratégie la meilleure (231) et la pire (312). Il reste $3^3 - 5 = 22$ autres stratégies, dont il est facile de dresser le tableau de définitions et de valeurs d'espérances : (pour l'ensemble des 27 stratégies, espérances multipliées par 45)

231	218	213	156	132	116
221	208	321	154	212	112
233	196	232	152	122	106
223	186	123	150	313	102
131	182	111, 222,		332	98
211	178	333	142	322	88
121	172	323	132	112	76
331	164	311	124	312	58
133	160	113	120		

Un ordinateur rapide serait capable d'établir un tel tableau pour un nombre plus grand d'actions et d'états, bien que pour 6×6

il s'agit déjà de plus de 46,000 stratégies possibles et pour 9 ×9 leur nombre devient environ 7×10^8...

L'analyse faite montre que le problème de la stratégie optimale dans l'incertitude dépend de trois sortes de paramètres.

La matrice des résultats G. On en admet la parfaite détermination en ce qui concerne les gains (ou les coûts ou les pertes) ; mais elle peut, d'une manière aussi déterminée, être définie en regrets, formalisés par la méthode de Savage ; elle peut aussi être définie en utilités, par définitions subjectives, des résultats, avec toutes les difficultés et les finesses de la mesure de ces utilités. Quoi qu'il en soit, la matrice contient un minimum d'informations nécessaires pour qu'on puisse opérer un choix entre les stratégies, informations sur les grandeurs ou valeurs et sur les comportements du décideur en présence de ces valeurs.

Le vecteur de probabilités à priori d'états de la nature. En absence d'informations additionnelles à celle qui est contenue dans la matrice des résultats, ce vecteur peut être déterminé à partir de cette matrice, par le calcul de von Neumann ; il est alors pessimiste. Ce calcul peut dégénérer et donner le critère d'action (de stratégie pure) du minimax. Une certaine information sur le comportement du décideur peut faire établir un vecteur subjectif de ces probabilités, seul compatible avec l'utilisation des utilités neumanniennes dans la matrice des résultats. En présence d'informations par exemple sur la fréquence de réalisation d'états N, on peut préférer utiliser un vecteur de probabilités objectives, mais il faut alors préciser d'une autre manière la mesure de l'utilité des résultats de la matrice G.

La définition des stratégies. Nous avons admis qu'une stratégie définit un aléa dont l'utilité permet d'établir un ordre dans l'espace des stratégies possibles. Nous avons décrit trois définitions de stratégies.

La stratégie neumannienne ou du jeu, consistant à appliquer sur le vecteur d'actions possibles une distribution de probabilités et obtenir ainsi un aléa à priori qui constitue la stratégie. Il est souvent possible de déterminer à partir de la matrice G une distribution p définissant la stratégie optimale en présence d'un adversaire, dans un jeu à somme nulle.

La stratégie neumannienne est évidemment opérationnelle, lorsqu'elle existe, et elle n'exige pour sa définition aucune information supplémentaire à celle qui est contenue dans la matrice G. Dans le cas d'action en face de la nature, cette stratégie est irréaliste et pessimiste.

L'ensemble des *stratégies définies par (10)* : si $\mathcal{N}_j$ arrive on fait A_i. Cet ensemble de stratégies n'est pas en général opérationnel, car il s'agit en fait dans la plupart des situations de décider du choix de A_i avant que l'on sache quel état $\mathcal{N}_j$ arrivera. Mais cet ensemble correspond à l'une des limites des possibilités et est à ce titre d'une grande utilité pour l'analyse. Il représente en effet l'espace de stratégies de prévision parfaite : en plus de l'information contenue dans la matrice G et dans la distribution à priori q, on détient le pouvoir de deviner correctement l'état futur de la nature ou, dans des situations particulières, la possibilité d'attendre, pour décider du choix de A_i, que l'état $\mathcal{N}_j$ soit connu, d'agir à posteriori.

Nous avons vu que l'ordre à priori dans cet ensemble de stratégies est facile à établir ; la meilleure et la pire de ces stratégies sont indépendantes de la distribution q comme des fonctions d'utilité et peuvent être définies, en absence d'informations sur ces deux fonctionnelles, sur la base de la seule matrice G.

Les décisions réelles tiennent en général compte d'autres informations, souvent non quantifiables, en plus de celles qui sont contenues dans la matrice G et la distribution q. Il est alors utile de pouvoir raisonner sur l'ensemble des stratégies (10) et leur ordre, et non pas seulement définir la meilleure d'entre elles, donc d'utiliser non seulement la matrice G mais aussi la distribution q.

C'est en général le cas, par exemple, de décisions fondées sur des calculs de bénéfices actualisés en prévision parfaite, calculs qui interviennent dans le choix d'investissements.

La troisième définition de la page 244 (13) : $P_k =$ *prévision de* $\mathcal{N}_j \Rightarrow A_i$. On introduit ainsi dans le problème une information supplémentaire qui, comme la matrice G et la distribution q, possède un coût ou plus généralement une désutilité, à rapprocher, comme on doit le faire pour les deux informations précédentes, de l'utilité qu'elle procure et qui peut être quantifiée par le surcroît des valeurs des stratégies optimales définies avec son aide.

Nous allons aborder l'étude de cette classe de stratégies en nous inspirant de l'article de H.E. Thompson et W. Beranek [10] et des publications citées dans la bibliographie de cet article.

Faire la prévision P_k consiste à définir une distribution r_{kj}, $k = 1, 2, \ldots n$ de probabilités conditionnelles de la réalisation de la prévision P_k si l'état N_j arrive :

(14) $$\Pr(P_k/N_j) = r_{kj} \quad \sum_k r_{kj} = 1 \qquad r_{kj} \geq 0$$

L'information contenue dans l'ensemble de la prévision est donc formalisée par une matrice carrée P de probabilités conditionnelles :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & P_1 & P_2 & \ldots & P_k & \ldots & P_n \\
N_1 & r_{11} & r_{21} & \ldots & r_{k1} & \ldots & r_{n1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
N_j & r_{1j} & r_{2j} & \ldots & r_{kj} & \ldots & r_{nj} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
N_n & r_{1n} & r_{2n} & \ldots & r_{kn} & \ldots & r_{nn}
\end{array}$$

Si la prévision est parfaite, cette matrice devient unité : $r_{kj,\, k \neq j} = 0$, $r_{11} = r_{22} = \ldots r_{jj} \ldots = r_{nn} = 1$.

C'est une matrice de Markov. Si les prévisions et les choix forment une séquence, une chaîne de Markov, en quelque sorte inversée dans le temps par rapport aux définitions usuelles, les représente. Elle ne donne pas, en effet, les probabilités conditionnelles d'arrivée dans une période $t + 1$ de l'état P_k si l'état N_j arrive dans la période t, mais les probabilités conditionnelles de la prévision dans la période t de l'état P_k si l'état N_j arrive dans la période $t + 1$.

Le traitement formel de P est classique. On a, suivant l'axiome de Bayes de probabilités composées et les règles du calcul de probabilités [11]

(15) $$\Pr(P_k) = \bar{q} \times \bar{r}'_k = \sum_j q_j r_{kj}$$

(16)
$$\Pr(P_k \cap N_j) = \Pr(P_k) \times \Pr(N_j/P_k) = \Pr(N_j) \times \Pr(P_k/N_j) = q_j r_{kj}$$

d'où la « probabilité des causes » :

(17) $$\Pr(N_j/P_k) = q_j r_{kj} / \sum_j q_j r_{kj}$$

10. Voir référence 9.
11. Voir références 3, 5, 6.

Le problème consiste en ceci : étant donné une stratégie $S(a, b, \dots i \dots m)$, définie suivant (11) et (13) (pages 243 et 244) déterminer l'aléa qu'elle représente et calculer son utilité.

On pourra procéder de l'une des deux manières suivantes : si $\mathcal{N}_j$ arrive et P_k est la prévision de probabilité r_{kj}, on choisira, suivant la stratégie S, l'action A_i. Le résultat de cette action sera g_{ij}. L'espérance de la stratégie S sera donc, pour un état $\mathcal{N}_j$:

$$(18) \qquad E(A_i) = E(S/\mathcal{N}_j) = \sum_k g_{ij_{(i:\, a_{ik})}} r_{kj}$$

et pour tous les états $\mathcal{N}_j$ possibles :

$$(19) \qquad E(S) = \sum_j q_j E(A_i) = \sum_j \sum_k g_{ij} q_j r_{kj}$$

L'ordre dans l'espace des stratégies sera celui de ces espérances des gains ou d'utilités. Cette procédure exige le calcul de $m^n(n+1)$ espérances et la comparaison de m^n d'entre elles. Il y a m^n stratégies possibles, pour chacune on calcule *n espérances* $E(A_i)$ plus l'espérance de la stratégie elle-même, $E(S)$. Cette méthode directe d'énumération exhaustive de stratégies possibles est donc lourde.

On peut tenter une recherche plus directe de la stratégie optimale, par une sorte de décomposition par sous-optimisation de l'espace des stratégies. Si P_k est la prévision, la stratégie S définit l'action A_i ; le résultat est g_{ij} de probalité conditionnelle définie par (17). L'aléa A_i possède n éléments g_{ij} $(j = 1 \dots n)$ et son vecteur de probabilités est (17), donc son espérance de gains est :

$$(20) \qquad E(A_i/P_k) = \sum_j g_{ij}(q_j r_{kj} / \sum_j q_j r_{kj})$$

La stratégie S définit un aléa dont les éléments sont les espérances (20), au nombre de $n (k = 1, \dots n)$ et dont la distribution est définie par (15). Il s'agit donc d'un aléa composé dont l'espérance est :

$$E(S) = \sum_k \sum_j q_j r_{kj} \sum_j g_{ij}(q_j r_{kj} / \sum_j q_j r_{kj} = \sum_k \sum_j g_{ij} q_j r_{kj}$$

c'est-à-dire, comme il se doit, l'expression (19) de la première méthode. Mais dans ce raisonnement on peut faire une sous-optimisation intermédiaire : parmi les m espérances $E(A_i/P_k)$ on peut choisir celle de valeur maximum :

$$(21) \qquad A_k = \max_i E(A_i/P_k)$$

Utilisée dans (19), A_k permet de définir directement la stratégie optimale et de calculer son espérance.

Cette deuxième méthode est plus avantageuse, puisqu'elle ne comporte le calcul que de $mn+1$ espérances : mn espérances $A_k(i=1 \dots m\,;\ k=1 \dots n)$ et une espérance $E/S(A_k)/$.

Par exemple, pour $m=n=4$, on a pour la méthode directe 1,280 espérances à calculer, tandis que la méthode par décomposition donne le résultat avec 17 calculs analogues. L'économie est très importante ; mais on perd évidemment de l'information qui consiste en une description complète de l'espace des stratégies possibles, par la méthode directe.

À titre d'illustration, nous appliquerons la méthode de sous-optimisation à l'exemple numérique déjà utilisé.

Rappelons auparavant que la matrice P de prévisions peut être considérée comme le résultat d'expériences sur l'espace d'états de la nature : chacun des aléas P_k/N_j peut être considéré comme la mesure, entachée d'erreurs, de l'état N_j.

Soit donc donnée l'information contenue dans le tableau ci-après :

		i			j		k	
		A_1	A_2	A_3	q	P_1	P_2	P_3
	N_1	3	5	2	2/5	a	$1-a$	0
j	N_2	0	6	8	1/9	0	a	$1-a$
	N_3	4	1	3	22/45	$1-a$	0	a

On a donné une forme simple, évidemment arbitraire, à la distribution r_{kj} : la probabilité d'une prédiction correcte d'arrivée d'un état N_j est a, dont la valeur est indépendante de j ; la probabilité de prévision d'un autre état parmi les trois possibles est complémentaire, tandis que celle du troisième est nulle.

Dans ces conditions les espérances des stratégies sont des fonctions linéaires de a et l'ordre dans l'espace des stratégies peut être facilement discuté en fonction du degré de pertinence de la prévision, défini par a :

— pour $a=0$, la prévision est totalement fausse ;

— pour $a=1$, la prévision est parfaite.

Il semble utile, à titre d'exemple d'écriture d'un programme éventuel sur machine, de développer le raisonnement.

Si P_1 est la prévision et la stratégie appelle l'action A_1, cet aléa a pour espérance, suivant (20), en n'écrivant pas le dénominateur qui disparaîtra :

$$g_{11}q_1r_{11} + g_{12}q_2r_{12} + g_{13}q_3r_{13} = 3.(2/5).a + 0.(1/9).0$$
$$+ 4.(22/45).(1 - a) = 6a/5 + 88/45 - 88a/45 = (88 - 34a)/45$$

Si la stratégie appelle l'action A_2, l'espérance de l'aléa correspondant est :

$$g_{21}q_1r_{11} + g_{22}q_2r_{12} + g_{23}q_3r_{13} = 5.(2/5).a + 6.(1/9).0$$
$$+ 1.(22/45).(1 - a) = 2a + (22 - 22a)/45 = (22 + 68a)/45$$

Si la stratégie appelle l'action A_3, l'espérance de l'aléa correspondant est :

$$g_{31}q_1r_{11} + g_{32}q_2r_{12} + g_{33}q_3r_{13} = 2.(2/5).a + 8.(1/9).0$$
$$+ 3.(22/45).(1 - a) = 4a/5 + (66 - 66a)/45 = (66 - 30a)/45$$

Si P_2 est la prévision et la stratégie appelle l'action A_1, cet aléa a pour espérance :

$$g_{11}q_1r_{21} + g_{12}q_2r_{22} + g_{13}q_3r_{23} = 3.(2/5).(1 + a)$$
$$+ 0.(1/9).a + 4.(22/45).0 = (54 - 54a)/45$$

Si la stratégie appelle l'action A_2, l'espérance de l'aléa correspondant est :

$$g_{21}q_1r_{21} + g_{22}q_2r_{22} + g_{23}q_3r_{23} = 5.(2/5).(1 - a) + 6.(1/9).a$$
$$+ 1.(22/45).0 = 2(1 - a) + 2/3a = 2 - 4/3a = (90 - 60a)/45$$

Si la stratégie appelle l'action A_3, l'espérance de l'aléa correspondant est :

$$g_{31}q_1r_{21} + g_{32}q_2r_{22} + g_{33}q_3r_{23} = 2.(2/5).(1 - a) + 8.(1/9).a$$
$$+ 3.(22/45).0 = (36 - 36a)/45 + 40a/45 = (36 + 4a)/45$$

Si P_3 est la prévision et la stratégie appelle l'action A_1, cet aléa a l'espérance :

$$g_{11}q_1r_{31} + g_{12}q_2r_{32} + g_{13}q_3r_{33} = 3.(2/5).0 + 0.(1/9).(1 - a)$$
$$+ 4.(22/45).a = 68a/45$$

Si la stratégie appelle l'action A_2, l'espérance de l'aléa correspondant est :

$$g_{21}q_1r_{31} + g_{22}q_2r_{32} + g_{23}q_3r_{33} = 5.(2/5).0 + 6.(1/9).(1-a)$$
$$+ 1.(22/45).a = (30 - 30a + 22a)/45 = (30 - 8a)/45$$

Si la stratégie appelle l'action A_3, l'espérance de l'aléa correspondant est :

$$g_{31}q_1r_{31} + g_{32}q_2r_{32} + g_{33}q_3r_{33} = 2.(2.5).0 + 8.(1/9).(1-a)$$
$$+ 3.(22/45).a = (40 - 40a + 66a)/45 = (40 + 26a)/45$$

L'examen du diagramme I (p. 256), où on a tracé ces 9 droites montre que :

— pour $0 < a < 0.65$ la meilleure stratégie est $S(1, 2, 3)$
— pour $0.65 < a < 0.85$ " " " " $S(2, 2, 1)$
— pour $0.85 < a < 1$ " " " " $S(2, 3, 1)$

L'espérance de ces stratégies s'écrit immédiatement :

$$E/S(123)/ = (88 - 34a + 90 - 60a + 40 + 26a)/45$$
$$= (218 - 68a)/45$$
$$E/S(221)/ = 22 + 68a + 90 - 60a + 88a)/45$$
$$= (112 + 96a)/45$$
$$E/S(231)/ = (22 + 68a + 36 + 4a + 88a)/45$$
$$= (58 + 160a)/45$$

Le diagramme I indique aussi les pires stratégies, qui seraient les meilleures si la matrice G spécifiait non pas des gains mais des coûts ou pertes :

— pour $0 < a < 0.3$ la pire stratégie est $S(2, 3, 1)$
— pour $0.3 < a < 0.45$ " " " " $S(2, 1, 2)$
— pour $0.45 < a < 1$ " " " " $S(3, 1, 2)$

Les espérances de ces stratégies sont :

$$E/S(231)/ = (58 + 160a)/45$$
(voir ci-dessus)
$$E/S(212)/ = (22 + 68\mathrm{a} + 54 - 54a + 30 - 8a)/45$$
$$= (106 + 6a)/45$$
$$E/S(312)/ = (66 - 30a + 54 - 54a + 30 - 8a)/45$$
$$= (150 - 92a)/45$$

Les résultats de cette discussion peuvent de prime abord surprendre : la stratégie directement optimale $S(231)$ (voir page 246) ne

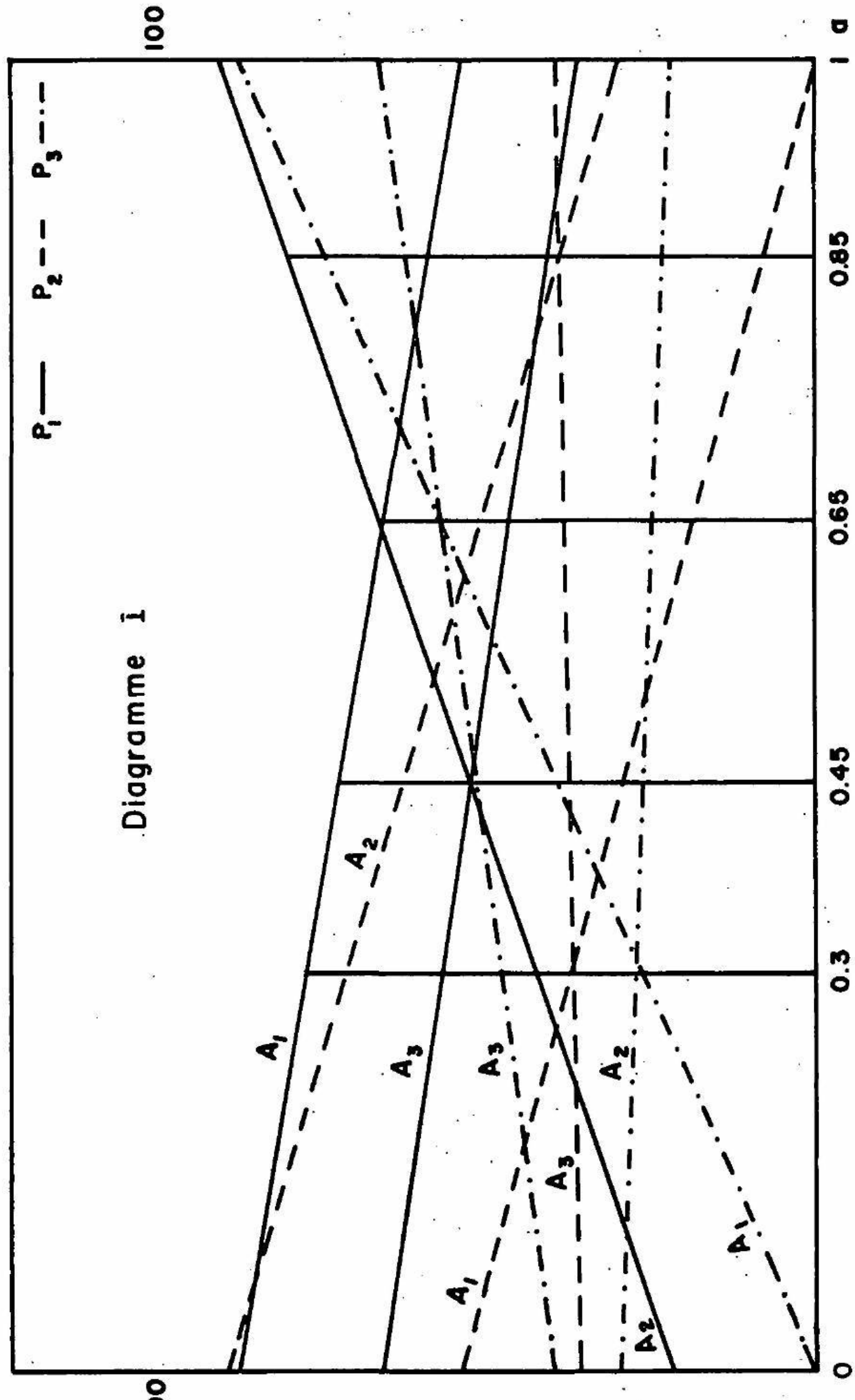


Diagramme I
P_1 ——
P_2 - - -
P_3 -·-·-
100
100
0
0.3
0.45
0.65
0.85
1 a
A_1
A_2
A_3
A_3
A_2
A_3
A_1
A_1
A_2

le demeure que pour des prévisions de très haute probabilité de leur correction : $a > 0.85$. Pour, par exemple, $a = 0.5$, c'est-à-dire 50 p.c. de chances de deviner juste ce qui va arriver, la meilleure stratégie, dans l'exemple, est $S(123)$, et de beaucoup, puisque les deux espérances sont alors :

$$E/S(123)/ = 184/45 \text{ et } E/S(231)/ = 138/45$$

La méthode classique de comparaison d'espérances en prévisions parfaites multiples (d'hypothèses « forte », « moyenne » et « basse », par exemple) peut donc conduire, d'après les résultats de notre étude, à des conclusions fortement erronées.

Récapitulons les gradations des stratégies optimales possibles et de leurs valeurs espérées croissantes, illustrées par notre exemple.

Si l'on est foncièrement pessimiste et que l'on suppose la malchance la plus noire de rencontrer le cas le plus défavorable de la part de la nature, on adopte le minimax, donc on décide l'action A_3, pour laquelle le calcul maximin indique un gain d'au moins 2 unités (page 245).

Si l'on suppose la nature non pas soumise au hasard, mais jouant contre l'agent, et que l'on adopte la distribution de probabilités d'états de la nature la plus défavorable (18:5:22), l'espérance des gains des actions A_1, A_2 ou A_3 devient égale à 3.156... Pour contrecarrer la malice de la nature, on mélangera ces trois actions au hasard, suivant une distribution de fréquences relatives 25:9:11. Ce sera la stratégie mixte neumannienne (pages 245-246).

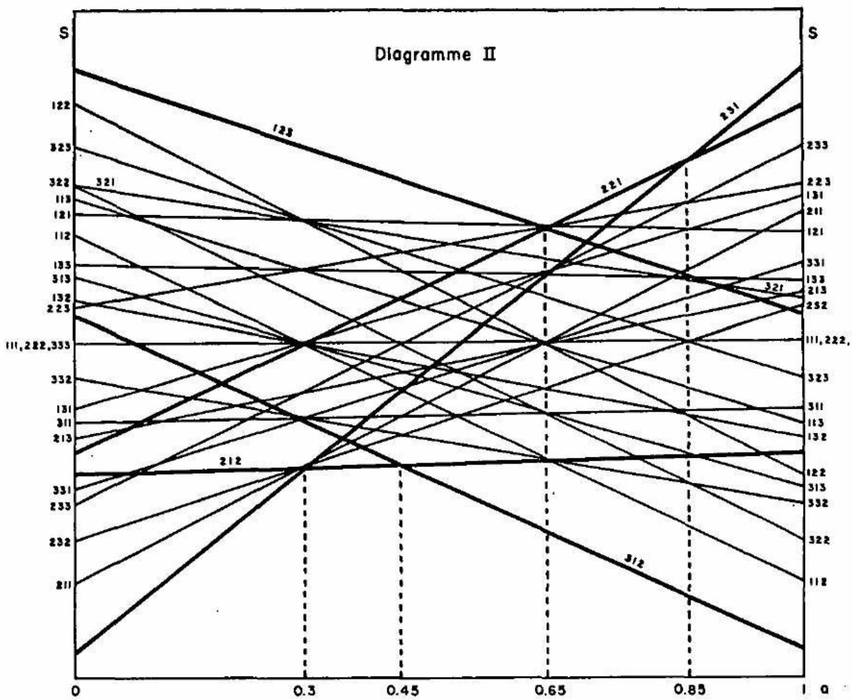
Mais il est juste d'admettre dans un jeu contre la nature qu'elle n'est pas malicieuse. Le hasard, contre lequel on peut vouloir se prémunir, peut toutefois faire que la distribution des probabilités des états de la nature soit celle qui correspond à sa malice (18:5:22). Cela est toutefois peu probable et, si l'on dispose d'une information quelconque sur cette distribution, on doit l'utiliser à la place de celle qui résulte de la théorie des jeux à somme nulle. On pourra alors définir l'action (stratégie pure) d'espérance maximum, à choisir : l'action A_2, de valeur espérée 4.5 (page 247).

Quelle que soit cette distribution à priori d'états de la nature, on peut, à la place d'une action, chercher une stratégie meilleure, par une prévision à priori de ce qui arrivera, prévision, prédiction ou pari.

Si l'on est capable de gagner à tous les coups, $a_i = 1$ (page 255), la valeur espérée de la stratégie $S(231)$ est de 4.85. On a multiplié, par cette méthode perfectionnée, mais idéale, par 2.4 le gain du maximin... Ce cas correspond à l'action à posteriori, lorsqu'on peut attendre la réalisation de l'état de la nature pour décider du choix de l'action à entreprendre. Une telle situation est rare.

Assez paradoxalement à première vue, bien que tout à fait rationnellement, il serait possible, dans un autre cas idéal, d'espérer le même gain, en jouant « à qui perd gagne », cette locution étant ici tout à fait justifiée. Si l'on parie à $a = 0$, c'est-à-dire si l'on se trompe *toujours* dans ses prévisions, et si l'on adopte la stratégie $S(123)$, le gain espéré est encore de 4.85.

Dans un cas plus réel, supposons qu'on tire la prévision à pile ou face. Il y a lieu d'adopter la stratégie $S(123)$, dont la valeur espérée sera de $184/45 = 4.1$. La procédure sera la suivante, comme il est facile de voir :



On lance la pièce pour prévoir N_1 ; si l'on gagne, on fait l'action A_1, si l'on perd, on prévoit N_2 et on fait l'action A_2.

On lance la pièce pour prévoir N_2 ; si l'on gagne, on fait l'action A_2, si l'on perd, on prévoit N_3 et on fait l'action A_3.

On lance la pièce pour prévoir N_3 ; si l'on gagne, on fait l'action A_3, si l'on perd, on prévoit N_1 et on fait l'action A_1, etc.

On a établi ainsi une sorte de stratégie mixte au sens neumannien, de résultat en moyenne meilleur que celui du jeu à somme nulle.

À titre d'information sur l'espace des stratégies dans notre exemple, le diagramme II présente le résultat du calcul suivant la méthode de description exhaustive (page 252).

Conclusions. — Comme dans tous les problèmes de recherche d'ordre puis de l'optimum dans les espaces dénombrables finis, la méthode exhaustive n'est possible dans notre approche que dans les cas de faible nombre de dimensions. Une méthode de décomposition et de sous-optimisation est possible et procure une économie d'effort de calcul considérable. On pourrait aussi, comme dans d'autres problèmes, utiliser des méthodes de simulation pour explorer l'ordre de l'espace des décisions. Nous n'avons pas abordé l'étude de telles méthodes dans notre démarche. Il semble qu'en général la nécessité ne s'en fera sentir que pour des problèmes de très grande dimension.

Georges BERNARD,
chargé de recherche au C.N.R.S.

RÉFÉRENCES

1) J. von Neumann & O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour,* Princeton University Press, 1947.
2) L.J. Savage, *The Foundations of Statistics,* Wiley & Sons, New York 1954.
3) W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* Wiley & Sons, New York, 1957 et 1966.
4) P.C. Fishburn, *Decision and Value Theory,* Wiley & Sons, New York, 1964.

5) R. Fortet, *Éléments de la théorie des probabilités,* T. I, CNRS, Paris 1965.
6) B. Roy, *Aléas numériques et distributions de probabilité usuelles,* Dunod, Paris 1965.
7) S. Vajda, traduction J. Bouzitat, *Théorie des jeux et programmation linéaire,* Dunod, Paris 1959.
8) J.D. Williams, *The Compleat Strategyst,* McGraw-Hill Co., 1954.
9) H.E. Thompson & W. Beranek, « The Efficient Use of an Imperfect Forecast », *Management Science,* vol. 13, N° 3, novembre 1966.
10) J. Eugène, « L'approche scientifique des problèmes de décision », *l'Informatique,* N° 2 à 8, 1966-1967.
11) H. Chernoff & L.E. Moses, *Elementary Decision Theory,* J. Wiley & Sons, New York 1959.
12) H. Schneeweiss, *Entscheidungskriterien bei Risiko,* Lange & Springer, Berlin 1967.
13) G. Bernard, *Valeur Temps et Incertitude dans l'idée de l'Utilité,* CNRS, 1965, (polycopié).
14) G. Bernard, « Incertitude et expertise : exemple d'un problème d'investissement », *Revue française de Recherche Opérationnelle,* N° 27, II/1963.
15) G. Bernard, « Sur les fonctions d'utilité », *Revue française de Recherche Opérationnelle,* N° 41, IV/1966.