

Recherche opérationnelle L'analyse spectrale des séries chronologiques

Alain Haurie

Volume 42, numéro 2, juillet–septembre 1966

URI : <https://id.erudit.org/iderudit/1003288ar>

DOI : <https://doi.org/10.7202/1003288ar>

[Aller au sommaire du numéro](#)

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)

1710-3991 (numérique)

[Découvrir la revue](#)

Citer cet article

Haurie, A. (1966). Recherche opérationnelle : l'analyse spectrale des séries chronologiques. *L'Actualité économique*, 42(2), 324–338.
<https://doi.org/10.7202/1003288ar>

Analyse

Recherche opérationnelle

L'analyse spectrale des séries chronologiques

Les études statistiques peuvent se ranger en deux grandes catégories : celles qui ont pour but de décrire un phénomène, trop complexe pour être compris dans son ensemble au moyen d'une nouvelle présentation des données, et, aussi, celles qui tentent d'expliquer un phénomène en précisant les causes et les effets. La construction de modèles en économie est du deuxième type. Ces modèles sont des relations causales que l'on suppose exister entre des variables et qui, après avoir été testées sur un ensemble d'observations, peuvent servir à la prévision. Avant de faire ces « hypothèses causales », il est cependant nécessaire de faire une étude descriptive qui fournit généralement énormément d'information et pourra encourager ou rendre futile la construction du modèle. Cette nouvelle présentation des observations peut se faire en utilisant des diagrammes, des tableaux, des indices comme la moyenne, la variance, les coefficients des corrélations, etc. On peut aussi essayer de préciser la structure du phénomène et de présenter les données de façon à simplifier les « hypothèses causales » que l'on fait par la suite. C'est ainsi que lorsqu'un phénomène est représenté par un certain nombre des variables aléatoires on peut chercher une nouvelle présentation qui ne comporte que des variables aléatoires indépendantes ; on fait alors une décomposition de la variance totale en composantes principales. Si le phénomène est représenté par une série chronologique, c'est-à-dire par un nombre infini de variables aléatoires $\{x_t ; t \in T\}$ liées entre elles, une

présentation analogue est encore possible si la série est stationnaire ; on fait alors l'analyse spectrale de la série chronologique.

Décomposition de la variance en composantes principales

Quand un phénomène est représenté par n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n suivant dans leur ensemble une loi normale à n dimensions, la matrice des covariances entre ces variables aléatoires, B , contient toute l'information concernant leurs liaisons, donc concernant la « structure » du phénomène.

$$B = \parallel b_{kl} \parallel \quad \begin{array}{l} k = 1 \dots n \\ l = 1 \dots n \end{array}$$

$$b_{kl} = \text{cov}(X_k, X_l)$$

Connaissant la matrice B , on peut par combinaisons linéaires des n variables X_i ($i = 1 \dots n$) se ramener à n variables Z_j ($j = 1 \dots n$) indépendantes représentant le même phénomène et telles que :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) = \sum_{j=1}^n \text{var}(Z_j)$$

Les variables Z_j sont donc définies par des combinaisons linéaires :

$$(2) \quad Z_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} X_i$$

et ont des covariances nulles deux à deux :

$$(3) \quad \text{cov}(Z_k, Z_l) = 0 \quad \text{si } k \neq l$$

La relation (1) indique qu'on a décomposé la variance totale V_T des variables aléatoires décrivant le phénomène en n composantes v_1, v_2, \dots, v_n représentant chacune la variance d'une des nouvelles variables indépendantes Z_j décrivant le phénomène.

$$(4) \quad V_T = v_1 + v_2 + \dots + v_n ; \quad v_j = \text{var}_j(Z_j)$$

Si les variances v_1, v_2, \dots, v_n sont rangées par ordre décroissant, on peut ne conserver pour décrire le phénomène que les p variables Z_1, Z_2, \dots, Z_p qui ont une variance totale comptant pour la plus grande partie de la variance V_T (par exemple 75 p.c.). On voit qu'une telle analyse permet de représenter le phénomène au moyen de variables aléatoires indépendantes Z_j dont on ne conservera que

les plus importantes. On aura alors précisé la structure du phénomène et facilité une étude ultérieure faisant intervenir ces variables aléatoires.

Analyse spectrale des séries chronologiques stationnaires

Une série chronologique est une suite infinie de variables aléatoires x_t qui représente l'évolution d'une quantité aléatoire au cours du temps t . Dans tout ce qui suit nous supposons que les valeurs prises par t sont toutes les valeurs entières.

$$(-\infty \dots -2 -1 0 1 2 3 \dots \infty)$$

Cette série est le résultat d'un processus aléatoire qui est spécifié si on connaît la fonction de répartition de toute suite de variables x_t :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P \left[x_{t_1} < x_1 \dots ; x_{t_n} < x_n \right]$$

Si ces fonctions de répartition ne changent pas quand on ajoute une même quantité l à tous les temps t_1, \dots, t_n le processus est dit stationnaire. Alors le temps n'intervient que de façon relative dans les liaisons entre variables x_t , en particulier la covariance de deux variables aléatoires x_t et $x_{t'}$ ne dépend que de la valeur absolue de la différence entre les deux époques t et t' .

$$\text{cov}(x_t, x_{t'}) = B(|t' - t|)$$

Ce qu'on peut écrire aussi :

$$\text{cov}(x_t, x_{t+\tau}) = B(\tau) \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Cette fonction $B(\tau)$ est la fonction de covariance du processus aléatoire. Si le processus est normal, $B(\tau)$ contient toute l'information concernant les liaisons entre les x_t . Elle joue un rôle analogue à celui de la matrice des covariances de n variables aléatoires X_i ($i = 1 \dots n$) et c'est à partir de cette fonction que l'on pourra préciser la structure de la série chronologique en décomposant la variance.

Puisque le processus est stationnaire la variance de x_t est constante quand t varie, c'est la valeur pour $t = 0$ de la fonction de covariance :

$$B(0) = \text{cov}(x_t, x_t) = \text{var}(x_t)$$

Les autres propriétés de la fonction de covariance $B(\tau)$ sont les suivantes :

a)
$$B(\tau) = B(-\tau)$$

La fonction de covariance est paire car selon l'hypothèse de stationnarité et pour un processus réel, la liaison entre x_t et $x_{t+\tau}$ est la même que celle qui existe entre $x_{t-\tau}$ et x_t .

b)
$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B(\tau) = 0$$

Les liaisons tendent à s'affaiblir quand l'écart de temps τ augmente.

c) Quels que soient les nombres : $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$

$$\sum_{t=1}^n \sum_{t'=1}^n B(t'-t) \alpha_t \alpha_{t'} > 0$$

Puisque cette expression est celle de la variance de la variable aléatoire :

$$U = \sum_{t=1}^n \alpha_t x_t$$

Or si une fonction $B(\tau)$ vérifie ces hypothèses, il existe une fonction $F(\omega)$ définie sur l'intervalle $(0, \pi)$ non négative et non décroissante telle que :

(5)
$$B(\tau) = \int_0^\pi \cos \omega \tau dF(\omega)$$

Si $B(\tau)$ est la fonction de covariance d'un processus aléatoire.

$F(\omega)$ est la fonction de répartition « spectrale » de ce processus.

Si nous faisons $\tau = 0$ dans la relation précédente nous voyons que :

(6)
$$B(0) = \text{var}(x_t) = \int_0^\pi dF(\omega)$$

$F(\omega)$ représente donc une répartition de la variance de x_t sur l'intervalle $[0, \pi]$.

La relation (6) est ainsi l'analogue de la relation (4) de décomposition de la variance en composantes principales. On peut aussi déduire de (5) et (6) une nouvelle présentation du processus

aléatoire x_t dite représentation spectrale par analogie avec la décomposition de la lumière.

Considérons par exemple une fonction $F(\omega)$ définie ainsi :

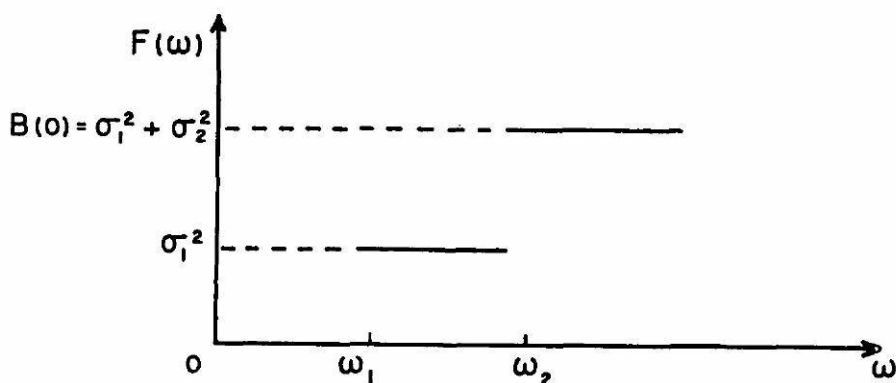
$$(7) \quad \begin{array}{ll} 0 \leq \omega < \omega_1 & F(\omega) = 0 \\ \omega_1 \leq \omega < \omega_2 & F(\omega) = \sigma_1^2 \\ \omega_2 \leq \omega < \pi & F(\omega) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = B(0) \end{array}$$

$dF(\omega)$ est donc nulle sauf pour :

$$\omega = \omega_1 \quad dF(\omega_1) = \sigma_1^2 \quad \omega = \omega_2 \quad dF(\omega_2) = \sigma_2^2$$

Le graphe de $F(\omega)$ étant :

Graphique I



Le processus x_t peut alors avoir la décomposition suivante :

$$(8) \quad \begin{aligned} x_t = & dU(\omega_1) \cos \omega_1 t + dV(\omega_1) \sin \omega_1 t \\ & + dU(\omega_2) \cos \omega_2 t + dV(\omega_2) \sin \omega_2 t \end{aligned}$$

où $dU(\omega_1)$ et $dV(\omega_1)$ sont deux variables aléatoires indépendantes de même variance σ_1^2 ; $dU(\omega_2)$ et $dV(\omega_2)$ sont aussi indépendantes entre elles, indépendantes des deux autres variables aléatoires et de variance σ_2^2 .

Il est facile de montrer que la structure (8) pour x_t entraîne pour la fonction de covariance $B(\tau)$ une décomposition (5) où $F(\omega)$ vérifie (7).

Puisque $B(\tau) = \text{cov}(x_t, x_{t+\tau})$

$$B(\tau) = \sigma_1^2 (\cos \omega_1 t \cos \omega_1 (t + \tau) + \sin \omega_1 t \sin \omega_1 (t + \tau)) \\ + \sigma_2^2 (\cos \omega_2 t \cos \omega_2 (t + \tau) + \sin \omega_2 t \sin \omega_2 (t + \tau))$$

du fait des propriétés des variables aléatoires, dU et dV . Donc :

$$B(\tau) = \sigma_1^2 \cos \omega_1 \tau + \sigma_2^2 \cos \omega_2 \tau = \int_0^\pi \cos \omega \tau dF(\omega)$$

avec $F(\omega)$ définie selon (7).

Il serait plus délicat de montrer que les décompositions (5) et (7) entraînent pour le processus x_t la décomposition spectrale (8) et nous renvoyons le lecteur avide de démonstration aux ouvrages spécialisés traitant de la question.

Si on augmente le nombre de sauts de la fonction $F(\omega)$, par exemple n sauts pour $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ d'amplitudes respectives $dF(\omega) = \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ on complique la structure de x_t qui a alors une décomposition spectrale faisant intervenir des oscillations suivant les n pulsations $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$

$$(9) \quad x_t = \sum_{i=1}^n (dU(\omega_i) \cos \omega_i t + dV(\omega_i) \sin \omega_i t)$$

Les $dU(\omega_i)$ et $dV(\omega_i)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(10) \quad \text{var}(dU(\omega_i)) = \text{var}(dV(\omega_i)) = dF(\omega_i) = \sigma_i^2 \\ \text{cov}(dU(\omega_i), dV(\omega_i)) = 0 \\ \text{cov}(dU(\omega_i), dU(\omega_j)) = 0 \text{ si } i \neq j \\ \text{cov}(dV(\omega_i), dV(\omega_j)) = 0 \text{ si } i \neq j \\ \text{cov}(dU(\omega_i), dV(\omega_j)) = 0 \text{ si } i \neq j$$

Si le nombre de sauts de $F(\omega)$ devient très grand ($n \rightarrow \infty$) l'amplitude de chaque saut tendant vers 0, $F(\omega)$ tend à devenir une fonction continue qui peut avoir une dérivée $f(\omega)$.

$$dF(\omega) = f(\omega) d\omega$$

$f(\omega)$ est appelée fonction de densité spectrale.

x_t a alors une décomposition spectrale faisant intervenir des oscillations infiniment nombreuses suivant des pulsations ω réparties sur tout l'intervalle $[0, \pi]$.

$$(11) \quad x_t = \int_0^\pi dU(\omega) \cos \omega t + dV(\omega) \sin \omega t$$

L'intégrale figurant ici est une intégrale stochastique définie de façon semblable à l'intégrale d'une fonction certaine.

Les décompositions (8), (9) ou (11) de x_t montrent qu'un processus stationnaire peut être considéré comme étant le résultat de la superposition d'oscillations de différentes pulsations ω qui ont des amplitudes aléatoires indépendantes. La variance des amplitudes de l'oscillation de pulsation ω est alors égale à la différentielle $dF(\omega)$ de la fonction de répartition spectrale du processus. Autrement dit on peut représenter le même processus aléatoire stationnaire dans le domaine du temps \mathcal{T} par la suite de variables aléatoires x_t et dans le domaine des pulsations par l'ensemble de variables aléatoires $dU(\omega)$ et $dV(\omega)$. Il est important de préciser cette dualité de représentation.

Une série chronologique stationnaire $\{x_t, t \in \mathcal{T}\}$ est la représentation suivant le temps d'un processus aléatoire. C'est sous cette forme seulement que l'on peut faire des observations du processus. La fonction de covariance $B(\tau)$ indique alors, si le processus est normal, les liaisons entre les valeurs x_t successives. Les problèmes statistiques qui font intervenir ce processus sont délicats à traiter du fait de l'infinité de variables aléatoires x_t liées entre elles qui interviennent dans cette représentation.

Le même processus peut être représenté par l'ensemble des variables aléatoires :

$$dU(\omega) \qquad dV(\omega) \qquad \omega \in [0, \pi]$$

indépendantes deux à deux et de variance $dF(\omega)$. Ces variables ne sont plus observables mais représentent le processus d'une façon simple puisqu'elles sont indépendantes. Il sera donc intéressant d'utiliser cette représentation pour traiter un problème statistique faisant intervenir le processus quitte à repasser à la représentation dans le temps dès que l'on aura besoin d'une quantité observable. La fonction $F(\omega)$ ou sa dérivée $f(\omega)$ représentera les propriétés statistiques du processus ; quand on cherche à estimer à partir des observations x_t ($t \in \mathcal{T}$) ces fonctions on fait l'analyse spectrale de la série chronologique.

Cette analyse suit les étapes suivantes :

- a) On observe la série chronologique x_t ($t \in \mathcal{T}$)
- b) On estime la fonction de covariance $B(\tau)$

c) À partir de l'estimation de $B(\tau)$ on estime la fonction de densité spectrale $f(\omega)$ en utilisant la propriété d'inversion (12) de la formule (5).

On sait que si :

$$(5') \quad B(\tau) = \int_0^\pi \cos \omega \tau dF(\omega) = \int_0^\pi \cos \omega \tau f(\omega) d\omega$$

alors :

$$(12) \quad f(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[B(0) + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} B(\tau) \cos \omega \tau \right]$$

On ne peut cependant appliquer aussi crûment cette formule pour estimer $f(\omega)$ quand on a estimé la fonction $B(\tau)$, car du fait de la taille finie de l'échantillon dont on dispose les estimés de $B(\tau)$ tendent à devenir instables quand τ augmente.

On estime $B(\tau)$ à partir de l'observation d'une réalisation au cours du temps de x_t . Si on a n valeurs x_t , on estime alors $B(\tau)$ par :

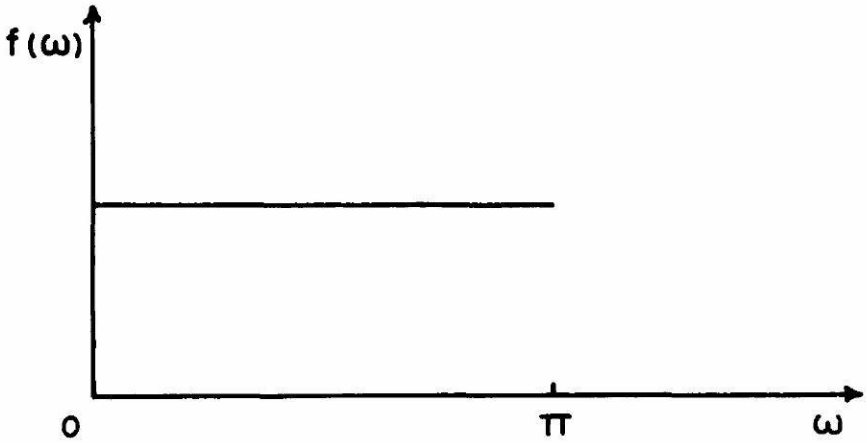
$$\hat{B}(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} x_t x_{t+\tau}$$

On conçoit que quand τ augmente $\hat{B}(\tau)$ tende à devenir instable ; il a donc fallu développer une technique particulière qui combatte l'influence de cette instabilité de $\hat{B}(\tau)$ sur $\hat{f}(\omega)$, estimé de $f(\omega)$. Nous n'entrerons pas plus dans les détails car cela nous ferait sortir du cadre de cet article.

Dans le cas d'une série chronologique économique la fonction de densité spectrale est particulièrement bien adaptée à l'étude des variations saisonnières cycliques ou tout autre mouvement périodique. En effet une série purement aléatoire aura un « spectre » plat, c'est-à-dire que la fonction $f(\omega)$ a pour graphe une parallèle à l'axe des ω .

Une série ayant des composantes saisonnières ou cycliques aura un spectre qui témoignera de l'importance relative de ces oscillations par rapport à l'ensemble des autres oscillations de pulsations différentes. Le graphe de $f(\omega)$ aura alors des pics, l'abscisse de ces pics indiquera la pulsation et, donc, la fréquence des oscillations importantes, tandis que l'ordonnée indiquera, selon (6), la part de

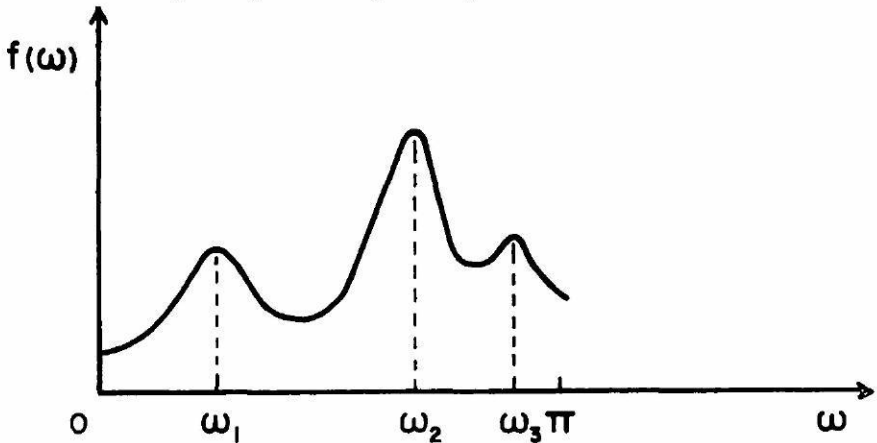
Graphique II
Spectre d'une série purement aléatoire



la variance de x_t due aux oscillations de cette fréquence. Par exemple si on a le spectre représenté par le graphique III, aux pulsations $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ correspondent des fréquences $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ définies par :

$$\lambda_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}, \quad \lambda_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}, \quad \lambda_3 = \frac{\omega_3}{2\pi}$$

Graphique III
Spectre caractéristique d'une série comportant trois oscillations comptant pour une part importante de la variance

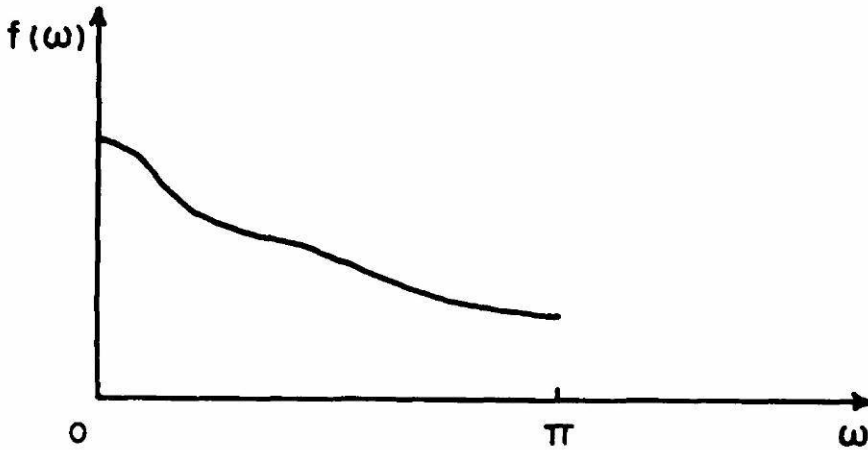


et donc des périodes T_1, T_2, T_3 définies par :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}, T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3}$$

En général les séries économiques observées présentent des variations à très longue période assez importantes, ce qui accentue les valeurs de $f(\omega)$ aux environs de $\omega = 0$ et donne au spectre l'allure générale suivante :

Graphique IV



Une discussion complète de la signification économique du spectre d'une série chronologique se trouve dans le livre de Granger et Hatanaka, *Spectral Analysis of Economic Time Series*.

L'analyse spectrale des séries chronologiques est alors un outil analogue au « périodogramme de Schuster » mais qui est basé sur un modèle probabiliste plus général et est d'un maniement plus sûr. Mais c'est aussi beaucoup plus qu'une façon habile de déceler des oscillations cachées, la dualité de représentation des processus aléatoires stationnaires permet de traiter des problèmes de liaison entre deux séries chronologiques d'une façon correspondant assez bien aux préoccupations habituelles des économistes.

Analyse cospectrale de deux séries chronologiques

Si \mathcal{T} est l'ensemble des entiers, un processus stationnaire $\{x_t; t \in \mathcal{T}\}$ a pour propriété caractéristique que la covariance entre les valeurs x_t et $x_{t+\tau}$ ne dépend pas de t mais de τ seulement.

$$\text{cov}(x_t, x_{t+\tau}) = B_{xx}(\tau)$$

On a vu qu'il était alors possible de décomposer x_t suivant des oscillations de pulsations comprises entre 0 et π

$$x_t = \int_0^\pi dU_x(\omega) \cos \omega t + dV_x(\omega) \sin \omega t$$

Un second processus stationnaire $\{y_t; t \in \mathcal{T}\}$ aura une fonction de covariance :

$$\text{cov}(y_t, y_{t+\tau}) = B_{yy}(\tau)$$

et une décomposition spectrale :

$$y_t = \int_0^\pi dU_y(\omega) \cos \omega t + dV_y(\omega) \sin \omega t$$

S'il existe une liaison entre ces deux processus on utilisera, pour la mettre en évidence, la fonction de covariance croisée :

$$(13) \quad \Gamma_{xy}(t, t + \tau) = \text{cov}(x_t, y_{t+\tau})$$

Si cette fonction de covariance croisée ne dépend que de l'écart τ entre les observations et non de la date t , les deux processus sont dits conjointement stationnaires :

$$(14) \quad \text{cov}(x_t, y_{t+\tau}) = B_{xy}(\tau)$$

Remarquons tout de suite que la fonction de covariance croisée $B_{xy}(\tau)$ n'est pas une fonction paire.

$$B_{xy}(\tau) \neq B_{xy}(-\tau)$$

Nous allons chercher maintenant sous quelles conditions les deux processus x_t et y_t sont conjointement stationnaires. On utilisera leur décomposition spectrale :

$$(15) \quad \Gamma_{xy}(t, t + \tau) = \text{cov}(x_t, y_{t+\tau})$$

$$\Gamma_{xy}(t, t + \tau) = \text{cov} \left[\int_0^\pi dU_x(\omega) \cos \omega t + dV_x(\omega) \sin \omega t, \int_0^\pi dU_y(\omega) \cos \omega(t + \tau) + dV_y(\omega) \sin \omega(t + \tau) \right]$$

C'est-à-dire :

(16)

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_t, y_{t+\tau}) = & \int_0^\pi \int_0^\pi \text{cov}(dU_x(\omega), dU_y(\omega')) \cos \omega t \cos \omega'(t + \tau) \\ & + \text{cov}(dU_x(\omega), dV_y(\omega')) \cos \omega t \sin \omega'(t + \tau) \\ & + \text{cov}(dV_x(\omega), dU_y(\omega')) \sin \omega t \cos \omega'(t + \tau) \\ & + \text{cov}(dV_x(\omega), dV_y(\omega')) \sin \omega t \sin \omega'(t + \tau) \end{aligned}$$

Pour que $\Gamma_{xy}(t, t + \tau)$ ne dépende pas de t il suffit que l'on ait :

$$(17) \quad \begin{aligned} \text{cov}(dU_x(\omega), dU_y(\omega')) & \begin{cases} = 0 & \text{si } \omega \neq \omega' \\ = c(\omega) d\omega & \text{si } \omega = \omega' \end{cases} \\ \text{cov}(dU_x(\omega), dV_y(\omega')) & \begin{cases} = 0 & \text{si } \omega \neq \omega' \\ = q(\omega) d\omega & \text{si } \omega = \omega' \end{cases} \\ \text{cov}(dV_x(\omega), dU_y(\omega')) & \begin{cases} = 0 & \text{si } \omega \neq \omega' \\ = -q(\omega) d\omega & \text{si } \omega = \omega' \end{cases} \\ \text{cov}(dV_x(\omega), dV_y(\omega')) & \begin{cases} = 0 & \text{si } \omega \neq \omega' \\ = c(\omega) d\omega & \text{si } \omega = \omega' \end{cases} \end{aligned}$$

Car alors (16) devient :

$$(18) \quad \text{cov}(x_t, x_{t+\tau}) = \int_0^\pi (c(\omega) \cos \omega \tau + q(\omega) \sin \omega \tau) d\omega = B_{xy}(\tau)$$

On ne démontrera pas que les conditions (17) sont nécessaires mais on les supposera vérifiées pour tout couple de processus simultanément stationnaires. (18) établit aussi la décomposition de la fonction de covariance croisée suivant les différentes pulsations ω .

$$(19) \quad B_{xy}(\tau) = \int_0^\pi (c(\omega) \cos \omega \tau + q(\omega) \sin \omega \tau) d\omega$$

Cette décomposition fait intervenir les oscillations « en quadrature » $\cos \omega \tau$ et $\sin \omega \tau$ puisque $B_{xy}(\tau)$ n'est pas une fonction paire.

Comme on peut écrire cette fonction sous la forme :

$$(20) \quad B_{xy}(\tau) = \frac{B_{xy}(\tau) + B_{xy}(-\tau)}{2} + \frac{B_{xy}(\tau) - B_{xy}(-\tau)}{2}$$

C'est la somme de deux fonctions, l'une paire et l'autre impaire, ce qui permet de dire que :

$$(21) \quad \frac{B_{xy}(\tau) + B_{xy}(-\tau)}{2} = \int_0^{\pi} c(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

$$(22) \quad \frac{B_{xy}(\tau) - B_{xy}(-\tau)}{2} = \int_0^{\pi} q(\omega) \sin \omega \tau d\omega$$

Pour calculer $c(\omega)$ et $q(\omega)$ il nous suffira d'inverser ces relations comme en (12) ; du point de vue de la statistique les mêmes difficultés d'estimation se présenteront.

On a convenu d'appeler $c(\omega)$ le cospectre des deux processus et $q(\omega)$ leur spectre de quadrature.

Enfin, on peut aussi écrire (19) ainsi :

$$(23) \quad B_{xy}(\tau) = \int_0^{\pi} A(\omega) \cos(\omega \tau + \varphi(\omega)) d\omega$$

Avec :

$$(24) \quad A^2(\omega) = c^2(\omega) + q^2(\omega)$$

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{q(\omega)}{c(\omega)}$$

Ces fonctions ont une signification intéressante. La décomposition spectrale des deux séries x_t et y_t nous permet de représenter ces deux processus par les deux ensembles de variables aléatoires :

$$dU_x(\omega), dV_x(\omega) \text{ et } dU_y(\omega), dV_y(\omega)$$

Ces variables aléatoires caractérisent des oscillations de pulsation ω . Du fait de l'indépendance des oscillations correspondant à deux pulsations différentes l'étude des liaisons entre x_t et y_t est plus simple si on utilise les représentations dans le domaine des pulsations. Il pourra alors y avoir des corrélations et des déphasages différents entre des composantes de X et Y de pulsations diffé-

rentes. La corrélation et le déphasage seront fonction de la pulsation ω . On peut, en effet, imaginer que les oscillations économiques à court, moyen ou long terme dépendent de facteurs indépendants et dès lors il n'y a aucune raison pour que le délai de transmission de l'influence d'une série x_t sur une autre y_t soit le même en courte et en longue période. Bref, les oscillations saisonnières peuvent par exemple avoir un décalage de quelques semaines tandis que les cycles peuvent être décalés de plusieurs années.

On calculera ainsi au cours d'une analyse cospectrale de deux séries chronologiques les valeurs quand ω varie de :

$$(25) \quad R^2(\omega) = \frac{A^2(\omega)}{f_{xx}(\omega) f_{yy}(\omega)}$$

où : $f_{xx}(\omega)$ et $f_{yy}(\omega)$ sont les densités spectrales x_t et y_t

$$(26) \quad \varphi(\omega) = \text{arc tg } \frac{q(\omega)}{c(\omega)}$$

c'est-à-dire : $\text{tg } \varphi(\omega) = \frac{q(\omega)}{c(\omega)}$

$R^2(\omega)$ sera appelée cohérence et mesure la corrélation entre les oscillations de pulsations ω de x_t et y_t tandis que $\varphi(\omega)$ sera le déphasage entre ces deux oscillations. Le décalage dans le temps $d(\omega)$ entre les deux oscillations sera calculé à partir de $\varphi(\omega)$ par

$$d(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\omega}$$

On conçoit donc que l'estimation des fonctions de densité spectrale $f_{xx}(\omega)$ et $f_{yy}(\omega)$ du cospectre $c(\omega)$ et du spectre de quadrature $q(\omega)$ permette de redécrire deux séries chronologiques stationnaires de façon à mieux faire apparaître leurs structures et leur interdépendance. L'ajustement d'un modèle causal prévisionnel pourra alors se faire mais devra tenir compte de la première étape descriptive qu'a été l'analyse cospectrale des deux séries.

Cet exposé est encore bien incomplet. Il faudrait préciser les méthodes d'estimation des densités spectrales et, surtout, détailler davantage les possibilités de cette analyse. Le livre *Spectral Analysis of Economic Time Series* peut renseigner de façon très satisfaisante

un lecteur curieux ou un économètre désireux de remplacer les éternels moindre carrés par une méthode d'analyse qui, bien que découlant de la même idée, s'adapte souvent mieux aux problèmes concrets.

Les mauvais esprits objecteraient que tout ce qui précède n'est que vue de l'esprit puisque l'hypothèse de base est la stationnarité, état que les séries économiques dédaignent souverainement. Nous concluons donc comme toujours par un appel à la prudence et en attendant mieux, analysons les spectres des séries « quasi-stationnaires ».

Alain HAURIE,
professeur à l'École des
Hautes Études commerciales
(Montréal)

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

Ouvrages :

- C.W.S. GRANGER et M. HATANAKA, *Spectral Analysis of Economic Time Series*, Princeton.
- U. GRENANDER et M. ROSENBLATT, *Statistical Analysis of Stationary Time Series*, J. Wiley.

Articles :

- M. NERLOVE, « Spectral Analysis of Seasonal Adjustment Procedures », *Econometrica*, juillet 1964.
- C.W.S. GRANGER, « The Typical Spectral Shape of Economic Variable », *Econometrica*, janvier 1966.
- C.W.S. GRANGER et O. MORGENSTERN, « Spectral Analysis of Stock Market Prices », *Kyklos*.