

# Modèles linéaires stochastiques théoriques pour la réponse des petits bassins

## Linear stochastic conceptual response models for small catchments

B. A. Bodo and T. E. Unny

Volume 3, Number 2, 1990

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/705069ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/705069ar>

[See table of contents](#)

### Publisher(s)

Université du Québec - INRS-Eau, Terre et Environnement (INRS-ETE)

### ISSN

0992-7158 (print)

1718-8598 (digital)

[Explore this journal](#)

### Cite this article

Bodo, B. A. & Unny, T. E. (1990). Modèles linéaires stochastiques théoriques pour la réponse des petits bassins. *Revue des sciences de l'eau / Journal of Water Science*, 3(2), 151–182. <https://doi.org/10.7202/705069ar>

### Article abstract

By randomizing the inputs to the deterministic Nash-Dooge linear reservoir cascade, linear stochastic conceptual response models suitable for small catchments are formulated as simple linear stochastic dynamical systems within the formalism of stochastic differential equations (SDE's). The system driving processes, rainfall and evapotranspiration losses, the latter regarded as a negative input, are modeled respectively as a compound Poisson process and a mean zero white Gaussian noise superposed on a deterministic mean. Elementary stochasticized Nash-Dooge cascades of  $n$  equal linear reservoirs and two reservoirs in parallel are given as potential models of surface and subsurface response. On consideration of recent discoveries concerning streamflow generation, a more conceptually plausible coarse-grained dynamical model of parallel quick and slow response regimes is developed by confining all evapotranspiration losses to the slow reservoir, modeling evapotranspiration fluctuations as mean zero colored Gaussian noise and rationalizing a linearized infiltration model dependent on slow regime outflow just prior to an event. In essence, the effort is directed towards generalizing the deterministic Nash-Dooge theory of the unit hydrograph to a linear stochastic theory of catchment response.

# Modèles linéaires stochastiques théoriques pour la réponse des petits bassins

Linear stochastic conceptual  
response models for small catchments

B.A. BODO<sup>1</sup>, T.E. UNNY<sup>2</sup>

## RÉSUMÉ

En rendant aléatoires les intrants du modèle déterministe en cascade de réservoirs linéaires de Nash-Dooge, on obtient des modèles linéaires stochastiques adaptés aux petits bassins, qui peuvent être formulés comme des systèmes dynamiques stochastiques linéaires simples représentés par des équations différentielles stochastiques (EDS). Les processus du système, la précipitation et les pertes dues à l'évapotranspiration (cette dernière étant considérée comme un intrant négatif), sont respectivement modélisés par un processus composé de Poisson et par un bruit blanc gaussien à moyenne nulle superposé à une moyenne déterministe. Pour la réponse superficielle et la réponse souterraine, on propose des modèles stochastiques en cascades de Nash-Dooge à  $n$  réservoirs linéaires égaux et à deux réservoirs en parallèle. Des travaux récents sur la genèse des débits ont conduit à mettre au point un modèle dynamique grossier, plus plausible conceptuellement, formé de régimes à réponse rapide et à réponse lente parallèles. Ce modèle est élaboré en attribuant au réservoir lent toutes les pertes d'évapotranspiration, les fluctuations de celle-ci étant modélisées par un bruit gaussien coloré à moyenne nulle et en rationalisant un modèle d'infiltration linéarisé fonction d'un écoulement à régime lent précédant une précipitation. En fait, cette contribution vise à donner une portée plus générale à la théorie déterministe de Nash-Dooge basée sur l'hydrogramme unitaire, afin de l'étendre à une théorie linéaire stochastique de réponse d'un bassin.

**Mots clés :** *Modèles stochastiques théoriques, équations différentielles stochastiques, modèles stochastiques en cascades, théories linéaire stochastique.*

1. Ministère de l'Environnement de l'Ontario, Toronto, Ontario.  
2. Département « System Design Engineering », Université de Waterloo, Waterloo, Ontario, N2L3G1.

## SUMMARY\*

By randomizing the inputs to the deterministic Nash-Dooge linear reservoir cascade, linear stochastic conceptual response models suitable for small catchments are formulated as simple linear stochastic dynamical systems within the formalism of stochastic differential equations (SDE's). The system driving processes, rainfall and evapotranspiration losses, the latter regarded as a negative input, are modeled respectively as a compound Poisson process and a mean zero white Gaussian noise superposed on a deterministic mean. Elementary stochasticized Nash-Dooge cascades of  $n$  equal linear reservoirs and two reservoirs in parallel are given as potential models of surface and subsurface response. On consideration of recent discoveries concerning streamflow generation, a more conceptually plausible coarse-grained dynamical model of parallel quick and slow response regimes is developed by confining all evapotranspiration losses to the slow reservoir, modeling evapotranspiration fluctuations as mean zero colored Gaussian noise and rationalizing a linearized infiltration model dependent on slow regime outflow just prior to an event. In essence, the effort is directed towards generalizing the deterministic Nash-Dooge theory of the unit hydrograph to a linear stochastic theory of catchment response.

*Key-words : Stochastic conceptual models, stochastic differential equations, stochastic linear cascade, linear stochastic theory.*

## INTRODUCTION

Les hydrologues ont continuellement cherché à établir les relations quantitatives entre intrants et extrants du sous-système hydrologique que constitue le bassin versant. Le courant actuel des recherches, né au début des années 70, a pour objectif principal la mise au point de modèles stochastiques reposant soit sur la physique des processus, soit sur une approche conceptuelle. Ceci implique que la fonction du système liant les variables d'entrée et de sortie prend en compte, même de façon rudimentaire, l'aspect physique du système et introduit, par conséquent, un certain degré de causalité.

Des progrès récents ont aussi vu le jour en hydrologie physique fondamentale, principalement dans la compréhension des mécanismes de génération du débit et dans l'estimation indépendante des pertes dues à l'évapotranspiration. Les conséquences de ces développements doivent encore cependant faire l'objet d'analyses approfondies.

Parallèlement à ces percées, la capacité de l'arsenal d'outils mathématiques et informatiques a évolué et s'est diversifiée. L'hydrologue doit maintenant relever le défi de réaliser la synthèse entre les progrès de la physique et ceux de la théorie dans le but non seulement d'élargir les horizons de la science mais aussi pour réviser et critiquer des concepts dépassés.

La formulation de modèles théoriques stochastiques à réponse linéaire continue dans le temps pour représenter des régimes d'orages convectifs sur de petits bassins constitue l'objet de cette étude. Ces modèles reflètent les récents progrès accomplis dans l'étude de la physique des phénomènes naturels considérés.

\* Original English version of this paper is available. Please address your request to : *Revue des sciences de l'eau*, INRS-Eau, 2800 rue Einstein, Québec (Qué), Canada G1 X 4N8.

Un petit bassin est défini arbitrairement comme ayant une surface inférieure à 500 km<sup>2</sup>. Le bassin est assimilé sous l'angle théorique le plus élémentaire à un réservoir linéaire. En rendant aléatoires les intrants du modèle déterministe, on obtient un modèle stochastique du système dynamique représenté par des équations différentielles stochastiques (EDS). La théorie relative à ce formalisme est exposée dans BODO *et al.* (1987). Le modèle est analytique en ce que seuls les éléments essentiels des intrants ainsi que la dynamique du système sont conservés afin de déduire à l'aide de la théorie mathématique les caractéristiques statistiques des extrants.

## GÉNÉRATION DES DÉBITS

La compilation des intrants et des extrants d'un bassin fait appel au concept fondamental en hydrologie de l'équation du bilan hydrique :

$$(P - ET) - Z = \pm \Delta s \quad (1)$$

où  $\Delta s$  représente la variation de stockage du bassin et  $Z$ , le débit de sortie. L'intrant précipitation est noté  $P$  alors que les pertes combinées, évaporation et transpiration, sont désignées par  $ET$  et sont considérées dans les calculs comme intrants négatifs. Toutes les quantités sont rapportées à un certain pas de temps  $\Delta t$ . La figure 1 esquisse les grands traits d'un modèle simplifié à double régime pour de petits bassins.

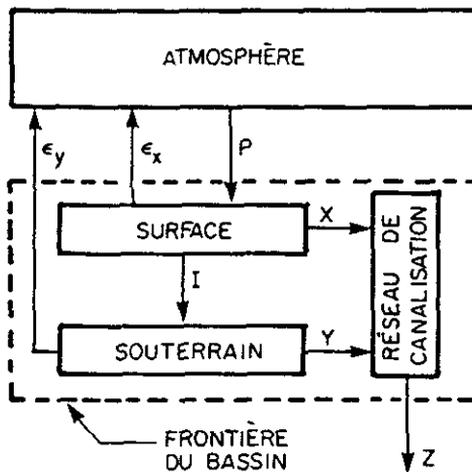


Figure 1 Modélisation simplifiée du bassin. Légende :  $P$ , précipitation ;  $\epsilon_x$ , évaporation de surface ;  $X$ , débit de surface ;  $I$ , infiltration ;  $\epsilon_y$ , évapotranspiration souterraine ;  $Y$ , débit souterrain ;  $Z$ , extrant.

*Simplified catchment model. Legend :  $P$ , precipitation ;  $\epsilon_x$ , surface evaporation ;  $X$ , overland flow ;  $I$ , infiltration ;  $\epsilon_y$ , subsurface evapotranspiration ;  $Y$ , groundwater flow ;  $Z$ , outflow.*

La précipitation, principal intrant du système, a la caractéristique d'une fonction aléatoire, très variable dans le continuum espace-temps. Elle est en fait un phénomène extrêmement difficile à modéliser adéquatement. Nous n'avons considéré ici que la précipitation due à un régime d'orages convectifs d'été qui tombent avec intensité et sont circonscrits dans le temps et l'espace. Typiquement, durant les mois de juin, juillet et août dans le sud-ouest de l'Ontario, ce sont les orages convectifs isolés et les orages convectifs en série associés à des fronts cycloniques qui prédominent. Sur de petits bassins, il est difficile de distinguer entre ces deux types d'orages. Nous ne nous sommes donc intéressés qu'aux orages pouvant être représentés comme des points sur l'axe de temps. Les petits bassins répondent généralement à ces orages de façon instantanée. L'écoulement peut se produire en quelques heures et l'hydrogramme affiche des crues rapides suivies de baisses relativement lentes (fig. 2). Un processus stochastique qui rend compte du phénomène « crues rapides/baisses lentes » est dit « irréversible dans le temps » (voir BODO, 1985 pour une définition mathématique). Les modèles précipitation-ruissellement devraient être capables de simuler ce comportement.

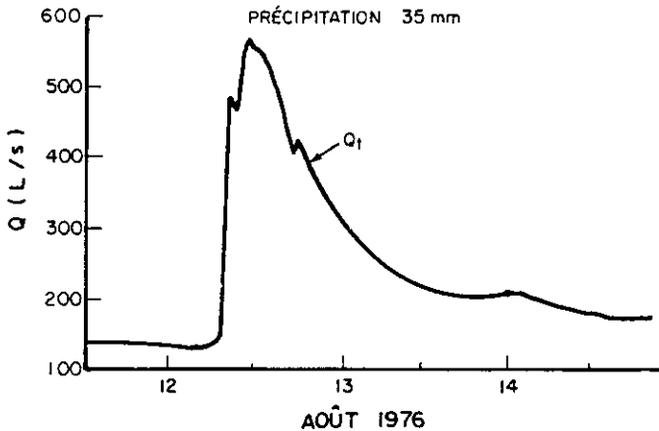


Figure 2 Hydrogramme type d'écoulement d'orage d'un petit bassin, présentant une crue rapide et une récession lente (adapté à partir de SKLASH et FARVOLDEN, 1979).

*Typical small catchment storm runoff hydrograph exhibiting rapid rise and slow recession (adapted from SKLASH and FARVOLDEN, 1979).*

HORTON (1933) a été à l'origine de l'approche classique à la génération des débits qui domine encore la vision de beaucoup d'hydrologues étudiant les eaux de surface. Cette approche soutient que la plupart des événements pluvieux produisant un ruissellement surviennent lorsque la capacité d'infiltration est dépassée et engendrent un ruissellement ou un écoulement superficiel sur de larges étendues. Il s'avère que le débit résulte de divers mécanismes et que surtout dans les régions humides avec végétation du nord-est de l'Amérique, l'écoulement superficiel ne provient que de moins de 10 % de l'aire du bassin et ce pour seulement 10-30 % des événements

pluvieux (FREEZE, 1978 ; FREEZE et CHERRY, 1979). Plusieurs chercheurs (NEWBURY *et al.*, 1969 ; PINDER et JONES, 1969 ; SKLASH *et al.*, 1976 ; SKLASH et FARVOLDEN, 1979) attribuent en effet aux écoulements souterrains de la moitié à plus des deux tiers du débit d'orage total observé sur les petits bassins (fig. 3). Les chiffres mentionnés précédemment incluent le débit de base au sens usuel, ou plus précisément la réponse lente de la nappe souterraine. Dans l'exemple de la figure 3, on constate, d'une part, que l'écoulement, à composante souterraine dominante, précédant l'orage, est assez élevé et, d'autre part, que la proportion de la réponse rapide de la nappe souterraine à la réponse rapide totale à l'orage se situe autour de 40 %. Néanmoins, c'est un chiffre frappant pour un bassin d'environ 700 km<sup>2</sup>. La double bosse de la composante due à l'orage peut s'expliquer : lorsque la surface du bassin augmente, le pourcentage de la surface contribuant à l'effet direct de la précipitation s'accroît tandis que le pourcentage de la surface contribuant à l'écoulement direct décroît. Ce phénomène n'était pas perceptible sur les bassins en amont ou voisins lors d'un même événement. Par ailleurs, l'effet rapide de la composante souterraine sur la rivière s'explique mal puisqu'une partie de celle-ci peut avoir émergé dans une région contribuant à l'écoulement et s'être rendu jusqu'au cours d'eau sous forme d'écoulement de surface.

GILHAM (1984) qui étudie le phénomène, considère que si la nappe est peu profonde dans un sol relativement perméable, l'ajout de petites quantités d'eau peut rapidement saturer la frange capillaire provoquant ainsi un saut quasi instantané de la nappe phréatique vers la surface. Il en résulte un changement important des gradients hydrauliques responsables du régime d'écoulement souterrain qui propulsent littéralement l'eau en dehors du réservoir souterrain. Le phénomène se produirait surtout aux environs immédiats de la rivière et serait en accord avec le concept d'extension du réseau d'écoulement et de surface de charge variable discuté dans les références mentionnées précédemment au sujet de la génération de débit.

Pour les besoins de notre recherche, les contributions de SKLASH *et al.* (1976) au sujet de la séparation « temps-source » des écoulements de surface et souterrain sont probablement les plus pertinentes. Utilisant les concentrations d'isotopes dans l'environnement, ces auteurs séparent l'hydrogramme d'orage en une composante « pré-événement » (qui représente l'écoulement souterrain dû au stockage) et une composante « événement » (qui prend en compte le débit dû à la précipitation). Il semble aussi plausible que la composante due à l'écoulement hypodermique puisse être importante dans certains systèmes (NEWBURY *et al.*, 1969). Ces résultats signifieraient en outre que la majeure partie de la précipitation non interceptée s'infiltrerait puisque la composante de l'événement est produite directement par la précipitation sur les surfaces contribuant à l'écoulement ou sur la rivière elle-même.

Le décalage entre les réponses superficielle et souterraine peut aussi expliquer le phénomène de bosse double dans les hydrogrammes d'orages sur certains bassins. Les modèles mis au point dans cette étude ont été d'abord conçus en termes du mécanisme Hortonien de génération du débit. Toutefois, ils peuvent aussi être envisagés dans la perspective du concept « temps-source » de SKLASH *et al.* (1976).

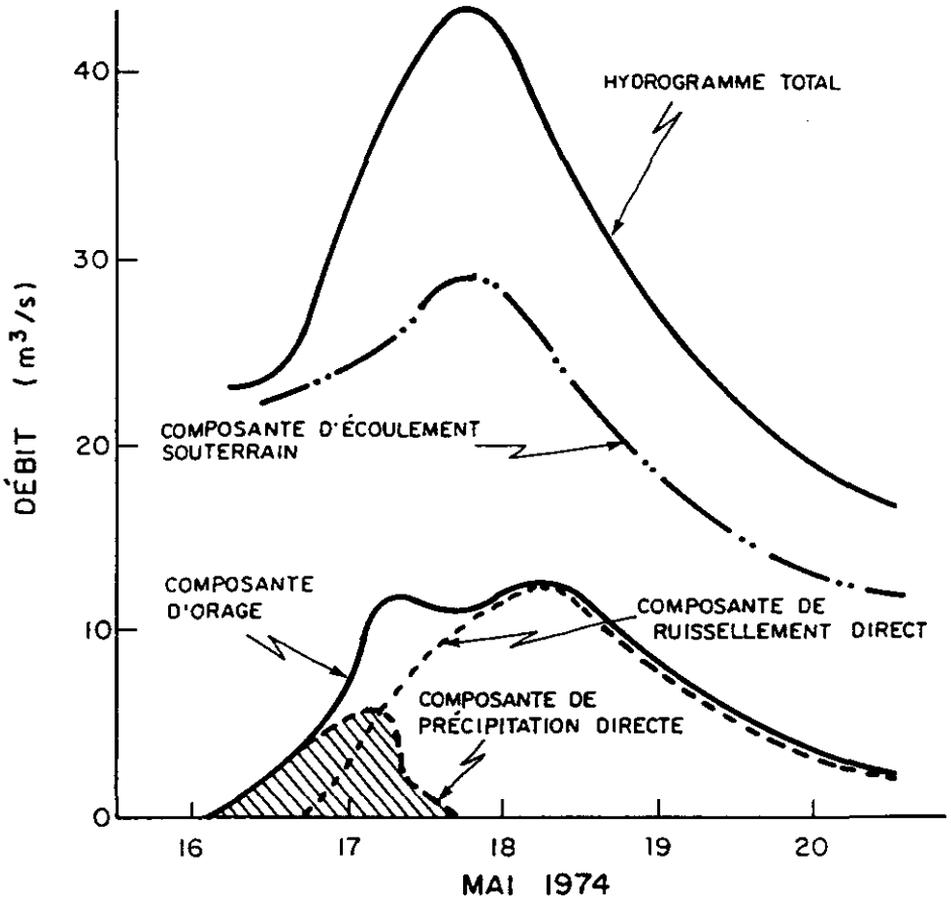


Figure 3 Séparation d'un hydrogramme en trois composantes (selon SKLASH et FARVOLDEN, 1979). Légende : Précipitation directe, précipitation sur le canal et sur les surfaces voisines qui l'alimentent ; Ruissellement direct, eaux provenant d'événements sur des surfaces éloignées.

*A three component hydrograph separation (adapted from SKLASH et al., 1976). Legend : Direct rainfall, rainfall on channel and near channel contributing areas ; Direct runoff, event water from remote contributing areas.*

Parmi les processus moteurs apparaissant dans l'équation (1), l'évapotranspiration est celui qui est le plus mal compris car ses composantes ne sont pas faciles à séparer. Les précipitations interceptées ou captives des dépressions du sol s'évaporent rapidement après une pluie ; relativement parlant, leur évaporation se produit donc instantanément dans le temps par rapport à l'événement pluvieux. A l'opposé, l'évapotranspiration d'origine souterraine, qui est un processus continu pendant la saison de croissance, est dominée par la transpiration des végétaux. Jusqu'à récemment, l'évapotranspiration était souvent estimée en supposant que sur de longues périodes d'enregistrement, la composante  $\Delta s$  de l'équation (1) était nulle. Au fil des ans, il y a eu

des améliorations dans cette estimation. Très récemment, MORTON (1983) décrivait une technique de pointe pour estimer indépendamment l'évapotranspiration superficielle de 5 jours. En plus d'apporter des estimations assez précises par sa technique, Morton montre comment l'équation (1) peut maintenant être utilisée pour tabuler les variations de stockage dans le bassin, ce qui constitue un progrès remarquable.

## MODÉLISATION THÉORIQUE DE LA RÉPONSE DU BASSIN

Le but de la modélisation théorique est de représenter un système par une fonction reliant les intrants et les extrants et qui traduit, jusqu'à un certain point, les mécanismes de causalité propres à ce système. KLEMES (1978) a exposé en détail les principales formes possibles de modèles basés sur la physique des phénomènes à l'exclusion toutefois des modèles géomorphologiques proposés récemment. Le concept le plus simple qui peut représenter un bassin est celui du réservoir linéaire de stockage ; c'est celui qui a servi de base aux modèles présentés dans cette étude. A l'opposé, une approche rigoriste décrit la fonction de système du bassin par l'ensemble des équations de conservation de l'énergie, de la masse, de la quantité de mouvement et d'état caractéristique d'un modèle hydrodynamique. FREEZE (1974, 1980) a proposé des modèles de génération du débit dans les pentes, en ignorant l'équation de conservation de l'énergie et en considérant la loi de Darcy pour le débit souterrain et l'approximation par l'onde cinétique pour le débit superficiel. Malgré les simplifications de ces modèles, ceux-ci comportent des formulations complexes qui exigent de longs calculs. Simplifiant davantage, EAGLESON (1971, 1972) a déduit une distribution analytique des débits de pointe de crues qui sont exprimés en fonction des paramètres de précipitation et du bassin. KLEMES (1978) a souligné qu'en dépit des nombreuses simplifications apportées, le niveau de conceptualisation n'est peut être pas idéal si les modèles reposent explicitement sur plusieurs composantes estimées à partir de mesures éparses. Par conséquent, des formes plus simples de conceptualisation, décrites par GUPTA et WAYMIRE (1983) comme « des modèles dynamiques à une échelle plus grossière appropriée à une réponse à l'échelle du bassin » ne seraient pas nécessairement inférieures en qualité.

Ces dernières années, la dérivation d'un hydrogramme unitaire instantané (HUI) basé sur la géomorphologie du bassin a suscité beaucoup d'intérêt (RODRIGUEZ-ITURBE et VALDES, 1979 ; GUPTA *et al.*, 1980 ; WANG *et al.*, 1981 ; HEBSON et WOOD, 1982 ; RODRIGUEZ-ITRUBE *et al.*, 1982 ; GUPTA et WAYMIRE, 1983). Le HUI géomorphologique, noté ici HUG, est un modèle probabiliste du temps de parcours d'une goutte de précipitation effective tombant au hasard, depuis son arrivée au sol jusqu'à la sortie du bassin. Les paramètres du modèle sont tirés de la structure topologique moyenne de la géométrie de son réseau d'écoulement. D'un côté, le HUG est enraciné dans les lois dérivées empiriquement de l'ordre de la géomorphologie du bassin et, de l'autre, il est

conceptuel dans le sens que la géométrie du réseau de drainage joue sans contredit un rôle important dans la réponse du bassin. L'approche géomorphologique est séduisante puisque le HUG est formulé en terme de paramètres faciles à calculer, ce qui la rend particulièrement apte à étudier la similarité des réponses d'un bassin à l'autre. La difficulté principale des modèles géomorphiques et leur incapacité à rendre compte du débit souterrain (HEBSON et WOOD, 1982). Ce problème pourrait être en partie évité si les particules de précipitation effectives pouvaient entrer dans le réseau d'écoulement autant par le haut que par le bas. Il y aurait encore des problèmes pour définir un débit de base avec une signification au sens proprement physique.

De nombreux modèles théoriques ont aussi été mis de l'avant sous forme de modèles de simulation digitale. Ils ont pour but de décrire explicitement, jusqu'à un certain niveau de détail, les sous-éléments physiques du bassin ainsi que les phases du mouvement de l'eau comme s'ils se comportaient en réseau interactif de sous-composantes. Citons, par exemple, le TOPMODEL de BEVEN et KIRKBY (1979) et BEVEN *et al.* (1984) conçu pour de petits bassins : les notions de réservoir ainsi que d'aire variable de ruissellement, définie en terme de topographie du bassin et de cheminement de canaux d'écoulement des sous-bassins, ont été incorporées dans le modèle. Il suffit d'un nombre relativement faible de paramètres physiquement observables pour asseoir le modèle. Puisque les modèles de ce type peuvent prendre en compte de manière explicite les effets de seuil, les non linéarités, les hétérogénéités spatiales, etc., ils s'avèrent bien adaptés à la simulation pratique de séries chronologiques discrètes de débits, quoique aux dépens de solutions analytiques.

## LE MODÈLE DÉTERMINISTE DE RÉSERVOIR EN TEMPS CONTINU

Soit la limite de l'équation de bilan hydrique (1) au pas de temps  $\Delta t \rightarrow 0$ . Le résultat de cette limite est l'équation de continuité du bassin :

$$\frac{ds}{dt} = y - x \quad (2)$$

où  $s$ ,  $y$  et  $x$  représentent respectivement le stockage, l'intrant et l'extrant à tout moment. Le bassin est assimilé à un réservoir de stockage linéaire régi par la relation :

$$x = \alpha s \quad (3a)$$

ou

$$s = \frac{1}{\alpha} x = Kx \quad (3b)$$

où  $\alpha > 0$  et  $k$  désigne un coefficient de stockage correspondant au temps de retenue moyen du réservoir. Afin d'éviter toute confusion, le paramètre  $\alpha$  sera qualifié, dans ce qui suit, de coefficient de réservoir. L'expression (3) est une équation dynamique grossière. La combinaison de (2) et (3) donne l'équation différentielle ordinaire (EDO) linéaire pour le réservoir linéaire unique :

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = \alpha y \tag{4}$$

qui a comme solution continue dans le temps :

$$X_t = \int_{t_0}^t \alpha y_\tau e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau + x_0 e^{-\alpha t} \tag{5}$$

où  $x_0 = x(t_0)$ . Le noyau de l'intégrale, c'est-à-dire la fonction de réponse d'impulsion unitaire (fri), ou fonction de Green dans un système linéaire, est :

$$\xi(t) = \alpha e^{-\alpha t} \tag{6}$$

où  $\xi(t)$  est la solution de (4) pour une unité instantanée d'intrant dans un réservoir vide au temps  $t = 0$ . NASH (1957) a généralisé ce résultat pour une série, ou cascade, de  $n$  réservoirs linéaires égaux, où les réservoirs successifs n'acceptent d'intrants qu'en provenance du réservoir directement en amont. Si on représente par  $x_i$  l'extrant du  $i^{\text{ème}}$  réservoir, alors les  $n$  réservoirs peuvent être représentés par le système d'EDO linéaires :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} + \alpha x_1 &= \alpha y \\ \frac{dx_2}{dt} + \alpha x_2 &= \alpha x_1 \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} + \alpha x_n &= \alpha x_{n-1} \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

pour lequel NASH a obtenu la fonction de réponse d'impulsion unitaire (fri) du  $n^{\text{ème}}$  réservoir soit :

$$\xi_n(t) = \frac{\alpha^n t^{n-1} e^{-\alpha t}}{\Gamma(n)} \tag{8}$$

où  $\Gamma(\cdot)$  représente la fonction gamma.

Le modèle est schématisé à la figure 4. Le débit de sortie, discontinu pour le premier réservoir, devient continu et s'étale au fur et à mesure qu'il traverse les réservoirs successifs. Un phénomène identique se produit en électronique si un signal impulsif unitaire traverse une série de filtres linéaires constants dans le temps. Remarquons aussi que la forme de la fri suit une loi de distribu-

tion Pearson type III ou gamma à deux paramètres. Comparativement au niveau élevé de raffinement théorique présent dans un modèle hydrodynamique, ce modèle linéaire en bloc s'apparente, à première vue, à un descripteur moyen du cheminement complexe de l'eau dans un bassin, pour paraphraser KLEMES (1978).

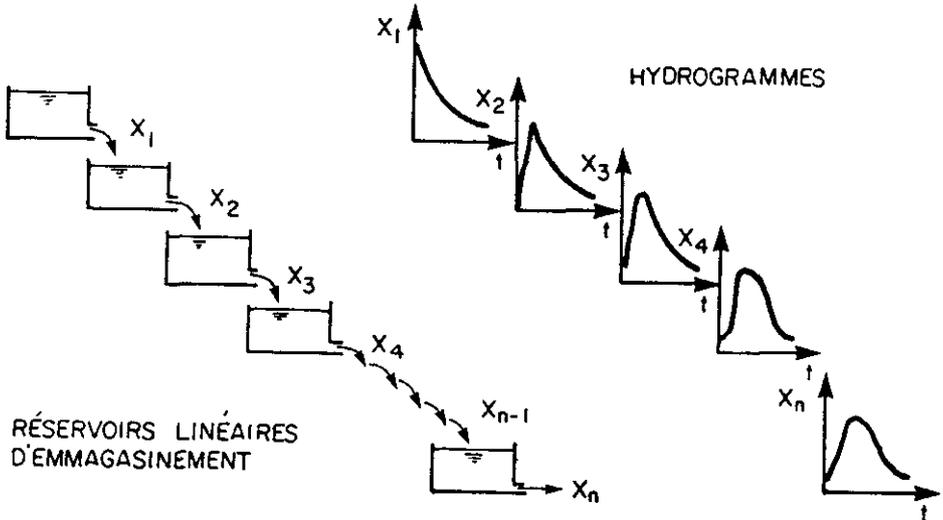


Figure 4 La cascade de réservoirs linéaires (tiré de CHOW, 1964).  
The linear reservoir cascade (adapted from CHOW, 1964).

Dans le cadre du régime de surface, la tri est connue sous le nom d'hydrogramme unitaire instantané (HUI). SHERMAN (1932) avait proposé empiriquement la notion d'hydrogramme unitaire de surface pour transformer la précipitation effective, c'est-à-dire cette partie de la précipitation d'un orage identifiée au ruissellement ou écoulement direct.

L'assimilation du bassin à un réservoir d'emménagement était implicite dans les premiers travaux de ZOCH (1934, 1936, 1937). Vingt-cinq ans après les travaux de ZOCH et de SHERMAN, la théorie linéaire de l'HUI fut formalisée par NASH (1957) et DOOGE (1959). NASH proposa la notion de cascade linéaire de réservoirs pour représenter le régime superficiel et relia les paramètres  $n$  et  $\alpha$  de réponse de l'HUI aux deux premiers moments de la précipitation effective et de l'écoulement direct. DOOGE (1959) identifia l'HUI à la fonction de Green d'un système linéaire, utilisa la notion de canal linéaire (qui ne fait qu'induire une translation dans le temps, c'est-à-dire un décalage linéaire du temps de réponse) et il formula la théorie générale de l'HUI linéaire. Cette notion a depuis été étendue aux modèles de bassin de la forme de celui de la figure 1, qui est une réduction du cycle d'écoulement du bassin à ses éléments les plus élémentaires (CHOW, 1964 ; DOOGE, 1977). La précipitation est l'intrant, les sorties sont l'évaporation superficielle, l'évapotranspiration souterraine ainsi que les écoulements superficiels et souterrains. Le milieu souterrain peut se subdiviser en une zone non saturée en eau dont l'apport est l'écoulement divergent et en une zone saturée où se situe l'écoulement souterrain ; toute-

fois, le modèle à double régime permet d'explorer mathématiquement ces notions. Le réseau de cheminement n'est qu'un moyen simple de totaliser les extrants des réservoirs parallèles ou, de façon plus générale, des cascades de réservoirs parallèles. Supposons maintenant que la notion de réservoir soit appliquée au régime de surface à réponse rapide décrit à la figure 1. L'équation de système pour la surface peut s'écrire :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_x (P - I - \epsilon_x - x) \tag{9}$$

où  $\alpha_x$  est le coefficient du réservoir de surface, P est la précipitation,  $\epsilon_x$  est l'évaporation superficielle, I est l'infiltration souterraine et x est l'écoulement de surface. Soit q la partie de la précipitation qui s'infiltré ; avec  $I = qP$ ,  $0 \leq q \leq 1$ , l'intrant précipitation nette au réservoir est alors  $P - I = (1 - q) P$  et (9) devient :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_x [(1 - q) P - \epsilon_x - x] \tag{10}$$

Une cascade en surface de n réservoirs égaux pourrait être formulée comme en (7) par :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_x (1 - q) P - \alpha_x \epsilon_x - \alpha_x x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \alpha_x x_1 - \alpha_x x_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \alpha_x x_{n-1} - \alpha_x x_n \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

où les indices inférieurs représentent l'ordre séquentiel des réservoirs et où la fri conserve la forme de (8).

Si on assimile les régimes superficiels et souterrains à des réservoirs parallèles comme dans la figure 1, le système d'équations peut alors s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha_x [(1 - q) P - \epsilon_x - x] \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha_y [qP - \epsilon_y - y] \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

où  $\alpha_y$  est le coefficient du réservoir souterrain,  $\epsilon_y$  l'évapotranspiration souterraine, qP l'intrant d'infiltration et y l'écoulement souterrain. L'écoulement total du système est donné par :

$$z_t = x_t + y_t \tag{13}$$

et les quantités  $\epsilon_x, \epsilon_y, P, x, y, z$  sont toutes identiquement exprimées en taux volumétrique par unité de surface, c'est-à-dire (longueur/temps) de sorte que les valeurs totales de réponse pour le bassin sont obtenues en multipliant chaque quantité par sa surface. Une cascade souterraine peut aussi s'exprimer comme en (11).

## LE MODÈLE STOCHASTIQUE

On peut aussi obtenir des représentations linéaires stochastiques simples des processus précipitation-débit en rendant aléatoires les processus moteurs  $P, \epsilon_x, \epsilon_y$  des équations (10, 11, 12). On suppose un régime d'orage convectif qui, à la limite, peut être modélisé par un processus de bruit impulsif. Le processus composé de Poisson jouit à cet égard d'une certaine crédibilité comme représentation potentielle du processus de précipitation (TODOROVIC et YEVJEVICH, 1969). Utilisant les mêmes symboles déjà acceptés (BODO *et al.*, 1987).

$$Pdt = \int_U uM(dt, du) \quad (14)$$

où  $M(dt, du)$  est une mesure composée de Poisson du taux d'arrivée  $\lambda$  et  $u$  la hauteur de pluie d'orage avec fonction de distribution  $F_u(u)$  définie dans le domaine  $(U) \equiv (0, +\infty)$ , indépendamment du processus d'arrivée. Divers chercheurs (EAGLESON, 1972 ; SMITH et SCHREIBER, 1974 ; TODOROVIC et WOOLHISER, 1975 ; NGUYEN et ROUSSELLE, 1981) ont représenté les hauteurs de pluie d'orage par une distribution exponentielle de moyenne  $v$  et de fonction densité :

$$f(u) = \frac{1}{v} \exp\left(-\frac{u}{v}\right) \quad (15)$$

La distribution gamma à deux paramètres, étroitement reliée à la fonction précédente, pourrait améliorer la représentation des hauteurs mais au prix de beaucoup de complexité.

L'infiltration constitue un problème. En fait, la portion  $q$  qui s'infiltré dans la zone inférieure est une fonction aléatoire complexe où intervient le déficit d'humidité du sol, la capacité d'infiltration, le couvert végétal, etc. Infiltration et précipitation sont des événements simultanés, à toute fin pratique, de sorte que la première est une portion constante de la pluie incidente. En règle générale, cette hypothèse n'est pas sans faiblesse mais elle sert de point de départ au cheminement mathématique.

L'évaporation superficielle et l'évapotranspiration peuvent toutes deux être modélisées comme bruits à bande large avec fluctuations gaussiennes blanches stationnaires de moyenne nulle superposées aux taux moyens constants de chacune, c'est-à-dire :

$$\epsilon_i = \bar{\epsilon}_i + \epsilon'_i \quad i = x, y \quad (16)$$

où  $\bar{\epsilon}$  représente la moyenne et  $\epsilon'$  le terme qui fluctue. On peut ensuite écrire :

$$\epsilon_i dt = \bar{\epsilon}_i dt + dB_i \quad i = x, y \quad (17)$$

où  $B_i$  représente des mouvements browniens indépendants ou des processus de Wiener avec  $E (dB_i)^2 = \beta_i^2 dt$  où  $E [\bullet]$  représente l'espérance mathématique. Puisque  $dB_i = \epsilon'_i dt$ , on peut écrire de la même façon :

$$\epsilon_i dt = \bar{\epsilon}_i dt + \beta_i dW_i \quad i = x, y \quad (18)$$

où  $dW_i$  sont les processus normalisés de Wiener et  $E (dW_i)^2 = dt$ . Notons que les dimensions appropriées du paramètre  $\beta_i$  sont [longueur/temps<sup>1/2</sup>].

Le processus de Wiener constitue un modèle physique adéquat (par exemple, pour le mouvement de fines particules en suspension) à condition que les accroissements du temps soient macroscopiques ; toutefois, au fur et à mesure que l'échelle de temps diminue, et devient plus petite que celle des collisions moléculaires, rejoignant l'échelle infinitésimale de la différentiation,  $W_i$  s'éloigne de plus en plus de la réalité physique. Les fluctuations de l'évapotranspiration se mesurent à l'échelle temporelle moléculaire ; toutefois, puisqu'elles sont intégrées spatialement sur la surface du bassin et puisque la simulation numérique du processus de Wiener implique la discontinuité sur de petits pas de temps, mais relativement macroscopiques (UNNY, 1984), le processus gaussien blanc intégré ou, de façon équivalente les différentielles du processus de Wiener devraient pouvoir être utilisés comme approximation raisonnable de premier ordre de ces fluctuations.

Maintenant, en substituant les fonctions aléatoires pour  $P$  et  $\epsilon_x$  et après quelques calculs, la cascade stochastique de Nash-Dooge qui est analogue aux EDO (11) est donnée par :

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= (-\alpha_x \bar{\epsilon}_x - \alpha_x x_1) dt - \alpha_x \beta_x dW_x + \int_U \alpha_x (1 - q) u M (dt, du) \\ dx_2 &= (\alpha_x x_1 - \alpha_x x_2) dt \\ \dots \\ \dots \\ dx_n &= (\alpha_x x_{n-1} - \alpha_x x_n) dt \end{aligned} \right\} (19)$$

En rendant aléatoire de la même façon  $\epsilon_y$ , les EDS pour le modèle à double régime qui sont analogues aux EDO (12) sont données par :

$$dx = (-\alpha_x \bar{\epsilon}_x - \alpha_x x) dt - \alpha_x \beta_x dW_x + \int_U \alpha_x (1 - q) uM (dt, du) \quad (20a)$$

$$dy = (-\alpha_y \bar{\epsilon}_y - \alpha_y y) dt - \alpha_y \beta_y dW_y + \int_U \alpha_y quM (dt, du) \quad (20b)$$

lesquelles peuvent être facilement modifiées pour englober un système à deux cascades parallèles. Voyant que (20a) est identique à la première équation du système (19), on peut dire que les trajectoires des processus de sortie  $x$  et  $y$  comprennent des composantes de dérive, des termes de diffusion induits par les fluctuations dues aux pertes d'évapotranspiration superficielle et souterraine,  $\epsilon_x$  et  $\epsilon_y$ , ainsi que des discontinuités sous forme de sauts au moment des impulsions dues à la précipitation. Comme dans le cas du modèle déterministe, les écoulements du modèle de cascade (19) seront continus pour  $n = 2, 3, \dots$  puisque l'impulsion des averses est étalée par les réservoirs additionnels. En général, les trajectoires sont irréversibles dans le temps, ce qui fait qu'elles assimilent la propriété « ascension rapide/récession lente » caractéristique de la réponse des petits bassins.

Le canal linéaire, ou décalage linéaire, proposé par DOOGE (1977) peut aussi être intégré au modèle double régime. Faisons l'hypothèse que le décalage dans la réponse souterraine est dû au temps nécessaire pour que l'eau passe de la surface à la nappe phréatique. Si les temps de transport superficiel et souterrain sont égaux, l'écoulement du bassin subit simplement un retard correspondant à ce temps. Si par contre il existe un décalage différentiel  $l$  entre les temps de réponse de la surface et du souterrain, alors la réponse du bassin au temps  $t$  s'exprime par :

$$z_t = x_t + y_{t-l} \quad (21)$$

où, dans ce cas, la réponse souterraine est décalée d'une valeur  $l$  par rapport à la réponse de la surface. Un décalage différentiel pourrait engendrer la réponse à deux pics qui caractérise certains systèmes.

Alors que le débit d'un cours d'eau est généralement suivi par des enregistreurs analogiques continus de niveau d'eau, les données de débit sont déduites et manipulées beaucoup plus aisément sous forme de paramètres discrets. Donc, d'un point de vue pratique, il faut aussi dériver les expressions équivalentes pour la moyenne temporelle de la somme des extrants, i.e. :

$$X = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x d\tau \quad (22)$$

où  $T$  représente un intervalle de temps convenable pour établir la valeur moyenne et où le processus  $X$  est échantillonné régulièrement aux points  $t = kT$ ,  $k = 1, 2, \dots$  afin de former le processus à paramètre discret  $X_k$ . De

telles relations sont importantes puisqu'elles permettent non seulement d'établir la liaison des modèles en temps continu avec la série chronologique discrète des débits, mais aussi avec les modèles en temps discret analogues aux modèles en temps continu. Ces résultats ont été obtenus par BODO (1985).

Les systèmes (19) et (20) peuvent s'écrire sous la forme générale d'un vecteur EDS :

$$dx = (a_0 + a_1 x) dt + b_0 dW + \int_U c_0 u M(dt, du) \quad (23)$$

où  $x$ ,  $a_0$ ,  $c_0$  sont des vecteurs de dimension  $n$ ,  $a_1$  est une matrice de dimensions  $n \times n$ ,  $b_0$  est de dimension  $n \times m$  et  $W$  est un processus de Wiener normalisé à  $m$  dimensions. Les équations peuvent être considérées dans le sens de Itô ; toutefois, puisque les coefficients par rapport aux fluctuations externes sont indépendants des variables de système (i.e. des extrants), les intégrales stochastiques des équations d'intégrales équivalentes sont définies de façon unique et la controverse de Itô par rapport au calcul de Stratonovich ne s'applique pas. Pour le modèle à double régime (20), les processus de solution  $x$  et  $y$  sont Markoviens, donc on peut facilement déduire que l'écoulement total  $z$  donné en (13) est Markovien. Pour des cascades comme celles données en (19), le processus  $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  est un processus vectoriel de Markov ; les processus  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  sont des projections du processus vectoriel de Markov et seul le processus  $x_1$  est clairement Markovien. Les propriétés de la distribution des processus de sortie  $x_n$  d'un système comme celui décrit en (23) peuvent être obtenues par la solution des équations de Kolmogorov-Feller qui leur sont associées. Toutefois, celles-ci sont des équations integro-différentielles pour lesquelles des solutions analytiques ne sont généralement pas disponibles ; mais lorsque les paramètres sont spécifiés, il est alors possible d'obtenir une solution numérique. Au lieu d'utiliser des fonctions de distribution exactes, il est préférable d'avoir recours aux expressions qui donnent les moments d'ordre faible ainsi que la fonction d'autocovariance. Pour une EDS linéaire, ces expressions sont généralement obtenues par la solution des ensembles d'équations pour les moments, celles-ci pouvant être dérivées en appliquant la règle de transformation d'Itô. Les résultats obtenus pour les extrants en régime permanent des modèles de cascade (19) et (20) sont présentés dans BODO et UNNY (1987).

## MODÈLES STOCHASTIQUES DÉJÀ DÉVELOPPÉS POUR LES RÉSERVOIRS

Les premiers modèles stochastiques de réservoir semblent ceux que MORAN (1967) a formulé pour l'étude des propriétés distributives représentant l'emmagasinement d'un réservoir. Dans les travaux plus récents, les fonction-

nelles sont employées pour obtenir les moments d'ordre intérieur de l'emma-  
gasinement d'un réservoir en régime permanent dans le cas d'un réservoir  
linéaire soumis à un processus d'entrée homogène constitué d'incrémentes  
non-négatifs dont le deuxième moment est fini. La formulation générale est en  
principe à peu près identique à celle qui est présentée dans ce qui suit.  
Cependant, les méthodes sont différentes et les réservoirs ne sont pas consi-  
dérés comme étant des modèles de bassin.

QUIMO (1971, 1973) a obtenu la fonction d'autocovariance (autocorrélation)  
normalisée  $\rho_n(\tau) = R_n(\tau)/V_n$  en utilisant la relation « intrant-extrant » d'un  
système linéaire. Ici  $V_n$ ,  $R_n$ ,  $\rho_n$  représentent respectivement la variance, la  
fonction d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation des extrants du  $n^{\text{ième}}$   
réservoir. Pour  $n = 1, \dots, 5$ .

$$\rho_1(\tau) = e^{-\alpha\tau} \quad (24a)$$

$$\rho_2(\tau) = (1 + \alpha\tau) e^{-\alpha\tau} \quad (24b)$$

$$\rho_3(\tau) = \left(1 + \alpha\tau + \frac{1}{3} \alpha^2 \tau^2\right) e^{-\alpha\tau} \quad (24c)$$

$$\rho_4(\tau) = \left(1 + \alpha\tau + \frac{2}{5} \alpha^2 \tau^2 + \frac{1}{15} \alpha^3 \tau^3\right) e^{-\alpha\tau} \quad (24d)$$

$$\rho_5(\tau) = \left(1 + \alpha\tau + \frac{3}{7} \alpha^2 \tau^2 + \frac{2}{21} \alpha^3 \tau^3 + \frac{1}{105} \alpha^4 \tau^4\right) e^{-\alpha\tau} \quad (24e)$$

et il est clair que la fonction d'autocorrélation de la sortie du système est  
atténuée par l'addition de réservoirs. Quimpo a aussi relié le résultat aux coef-  
ficients du processus autorégressif à paramètres discrets. Comme O'CONNOR  
(1976) et KLEMES (1978) l'ont fait remarquer, les résultats de Quimpo ne sont  
cependant valables que si des conditions assez restrictives sont respectées.  
KLEMES (1978) souligne aussi que la forme de la fonction d'autocorrélation est  
générale pour les intrants déterministes et stochastiques, les premiers ne  
possédant cependant, comme on le sait, que des moments par rapport à  
l'origine.

Le fait que les modèles (19) et (20) peuvent vraiment simuler des débits a  
été établi par WEISS (1973a, 1973b, 1977) à l'aide de modèles rudimentaires  
du type « shot noise » pour simuler des débits journaliers. Weiss a assimilé  
le bassin à un réservoir linéaire d'intrants de composition Poissonnienne  
suivant une distribution exponentielle. Il a montré que le processus de sortie  
en régime permanent est un processus « shot noise » stationnaire donné  
par :

$$x_t = \sum_{j=1}^{N_t} c(t, \tau_j, u_j) \quad (25)$$

où  $\tau_j$  et  $u_j$  sont les temps d'occurrence et la grandeur des  $N_t$  impulsions qui  
surviennent sur l'intervalle  $(t_0, t)$  selon un processus de Poisson ayant un taux  
d'arrivée de  $\lambda$  et pour lequel :

$$c(t, \tau, u) = \begin{cases} \alpha u_{\tau} e^{-\alpha(t-\tau)} & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases} \quad (26)$$

Pour un réservoir unique, on peut montrer que le modèle « shot noise » de base est la solution de l'EDS réduite (20a), i.e. :

$$dx = -\alpha x dt + \int_U \alpha u M(dt, du) \quad (27)$$

où les termes représentant l'évaporation ont été éliminés et où l'infiltration a été ignorée.

Les trajectoires des processus « shot noise » de sortie sont irréversibles dans le temps et sont caractérisées par des discontinuités au temps de l'impulsion suivies par des décroissances exponentielles comme on le montre à la figure 5. Etant donné que les décroissances exponentielles sont fréquemment utilisées en hydrologie pour modéliser la récession de l'hydrogramme, le processus « shot noise » possède un certain attrait si on l'examine de ce point de vue. Nous mettons en garde ceux qui étudient les travaux de Weiss car après avoir établi le modèle de réservoir unique avec un noyau  $\alpha e^{-\alpha t}$ , ses résultats ultérieurs sont, pour quelque raison arbitraire, donnés pour un noyau  $e^{-\alpha t}$ . Il faut donc être prudent si on veut comparer les résultats de Weiss avec les nôtres. L'utilisation du modèle « shot noise » a d'abord été suggérée par BERNIER (1970) afin de modéliser les débits journaliers des rivières.

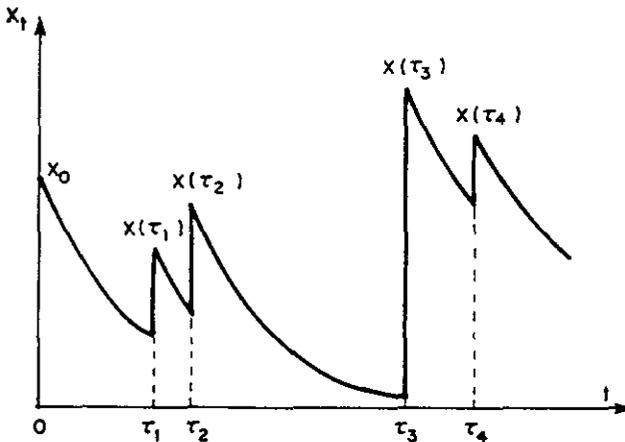


Figure 5 Une réalisation typique du processus « simple shot »  
A typical realization of the simple shot process.

Si le « shot process »  $x$  donné par (24) recommence au début de chaque impulsion, sa trajectoire entre deux impulsions successives est simplement :

$$x_t = x_0 e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (28)$$

et la série des débits journaliers est facilement simulée par l'emploi de (22) entre chaque impulsion, i.e. :

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{(k-1)T}^{kT} x_0 e^{-\alpha\tau} d\tau = x_0 \frac{(1 - e^{-\alpha T})}{\alpha T} \quad (29)$$

où  $k = 1, 2, \dots$  et où  $T$  représente une journée sauf au voisinage du début d'une impulsion qui requiert de faire certains ajustements, et où  $x_0$  est initialisé au début de chaque pas de temps.

La contribution probablement la plus significative de Weiss a été l'obtention des expressions donnant les fonctions des moments et la fonction d'autocovariance pour le « time-average steady-state shot process » présenté plus haut. Weiss a obtenu ses résultats en employant des fonctionnelles de cumulants, lesquelles conduisent, pour un « shot process » simple, à une expression générale donnant les cumulants d'ordre  $n$  du processus moyen par rapport au temps. En définissant les processus centrés  $\hat{x} = x - E(x)$  et  $\hat{X} = X - E(X)$ , Weiss démontra que pour le processus en temps continu :

$$E[x] = \lambda v \quad (30a)$$

$$E[\hat{x}^2] = \alpha \lambda v^2 \quad (30b)$$

$$E[\hat{x}^3] = 2\alpha^2 \lambda v^3 \quad (30c)$$

où  $\lambda$  et  $v$  sont les paramètres composés de Poisson. Il démontra aussi que pour le processus moyen par rapport au temps :

$$E[X] = E[x] \quad (31a)$$

$$E[\hat{X}^2] = E[\hat{x}^2] \frac{2[\alpha T - (1 - e^{-\alpha T})]}{(\alpha T)^2} \quad (31b)$$

$$E[\hat{X}^3] = E[\hat{x}^3] \frac{3[2\alpha T - 4(1 - e^{-\alpha T}) + (1 - e^{-2\alpha T})]}{2(\alpha T)^3} \quad (31c)$$

Fait intéressant à signaler, les moments d'ordre plus élevé du processus « shot noise » en régime permanent, moyen par rapport au temps, sont

donnés, au-delà de la moyenne, par les moments correspondants du processus continu multiplié par des facteurs d'atténuation, fonctions non linéaires du coefficient de réservoir et du temps servant au calcul de la moyenne. Donc, en régime permanent, le « shot process » n'est pas ergodique. De ce point de vue, le travail de Weiss semble n'avoir pas reçu l'attention qu'il méritait de la part des hydrologues.

Les résultats de Weiss sur les moments du processus moyen par rapport au temps  $X$ , lui ont permis d'ajuster les paramètres du modèle aux séries de débit journalier. Il a assez bien rendu les caractéristiques des données de débit journalier par son modèle « double shot ». Celui-ci est analogue au système (20) si tous les termes relatifs à l'évapotranspiration sont éliminés. Il considère le régime de surface comme un réservoir à réponse rapide et le régime souterrain comme un réservoir lent à débits de faible variance et de forte corrélation. Sur la base de cette hypothèse, la covariance croisée entre les extrants de surface et souterrain peut être négligée sans conséquence. Toutefois, Weiss a aussi traité les paramètres de précipitation, c'est-à-dire les paramètres  $\lambda$  et  $\nu$ , comme des paramètres du modèle imposés de force aux données de débit de rivière ce qui revient à considérer les intrants du processus de Poisson composé comme une suite d'événements climatiques non observés responsables du débit. En dépit de ses imperfections au plan de la physique du phénomène, Weiss a atteint son but qui était de démontrer le réalisme accru de ses modèles « shot noise » par rapport aux modèles antérieurs reposant sur des intrants gaussiens. Il a traduit la périodicité annuelle en ajustant son modèle pour chaque mois, tout en reconnaissant l'existence de problèmes de biais lors du passage d'un mois à l'autre.

Quelques-unes des méthodes employées et plusieurs expressions utiles en résultant offrent plus d'intérêt que les détails même des simulations. En employant les fonctionnelles caractéristiques, Weiss a démontré de manière élégante que l'exrant d'un réservoir unique, soumis à des impulsions Poissoniennes à distribution exponentielle, répond à une loi gamma de densité :

$$f(x) = \frac{(\alpha\nu)^{-\lambda\alpha} x^{\lambda\alpha-1} e^{-x/\alpha\nu}}{\Gamma(\lambda\alpha)} \quad (32)$$

Cette fonction est écrite pour le noyau  $\alpha e^{-\alpha t}$  qui est utilisé ici. Si on l'examine à la lumière des résultats de NASH (1957), ce résultat n'est pas particulièrement surprenant. Weiss a aussi examiné les effets de la périodicité des paramètres de précipitation  $\lambda$  et  $\nu$  qui sont fort probables sur l'espace d'une année (TODOROVIC et YEVJEVICH, 1969). Il pose :

$$\lambda_t = \psi [1 + \cos(\phi t - \theta)] \quad (33)$$

où  $\psi$ ,  $\theta$  sont des constantes,  $\phi = 2\pi/\Upsilon$  et  $\Upsilon$  est la période. Il poursuit en déduisant une expression qui, comme on peut s'y attendre, indique un décalage de phase entre le taux d'arrivée de la loi de Poisson  $\lambda_t$  et le débit sortant moyen  $\bar{x}_t$ . Il a exprimé  $\lambda_t$  et  $\nu_t$  en termes d'expansions de Fourier afin de considérer  $\lambda$  et  $\nu$  périodiques, ce qui l'a conduit à des résultats indiquant un changement de phase entre les paramètres de précipitation et l'exrant moyen.

Weiss a examiné l'irréversibilité temporelle et proposé des tests statistiques pour déceler sa présence dans l'enregistrement discret du débit, même si le phénomène de montée rapide/récession lente est généralement manifeste sur les hydrogrammes de petits bassins versants. WEISS (1973b) a aussi résolu certains problèmes de changements de niveaux et de temps de passage associés au processus simple en régime permanent « shot noise ». Ces problèmes sont importants si l'on veut caractériser le comportement de débit de crue et d'étiage. Toutefois il a souligné la nécessité de recherches additionnelles pour obtenir les résultats pertinents aux débits discrets dont on prend la moyenne dans le temps et pour le cas du double régime.

TODOROVIC et WOOLHISER (1985) étudiant le modèle « shot noise », ont présenté des arguments supplémentaires en faveur de sa vraisemblance comme modèle du débit de rivière. Ils montrent qu'un processus de suppression d'événements à partir d'un processus ponctuel arbitraire, au fur et à mesure de la diminution de la probabilité qu'un point soit retenu, converge faiblement, i.e. dans toutes les distributions de dimensions finies, vers un processus de Poisson. Il se peut que les séquences d'événements pluvieux présentent des signes de dépendance (KAVVAS et DELLEUR, 1975) à cause de facteurs tels que l'interception, la rétention superficielle, la capacité d'infiltration, etc., mais des écoulements dépassant un seuil suffisamment élevé résulteraient d'une séquence d'événements pluvieux significatifs approchant une distribution de Poisson. Il s'ensuit que le modèle « shot » convient à l'analyse des propriétés des débits de crue. TODOROVIC et WOOLHISER (1985) obtiennent également certains temps de passage, croisements de niveaux et des propriétés extrêmes pour le processus « shot » dont le taux d'arrivée est lié au temps.

KOCH (1985) a récemment développé une extension du modèle « double shot » de Weiss, extension qui détermine la précipitation excédentaire superficielle et la recharge souterraine en utilisant un modèle d'infiltration dépendant de plusieurs paramètres physiques du sol. Les expressions obtenues pour les deux premiers moments et pour les fonctions d'autocovariance des extrants sont utilisées pour examiner les effets combinés de la texture du sol et du climat sur le processus d'écoulement.

UNNY et KARMESHY (1983) ont été les premiers à concevoir un modèle stochastique de réservoir structuré autour du cadre analytique fourni par les équations différentielles stochastiques (EDS). Ils rendent aléatoires les intrants du système de l'équation (2) en superposant des composantes stochastiques aux composantes déterministes moyennes. Les composantes stochastiques sont représentées dans le modèle par des bruits blancs gaussiens, indépendants et de moyenne nulle. Le résultat est une EDS du type « diffusion » que les auteurs ont traitée comme une équation de Stratonovich afin de dériver les moments des extrants du système. L'étude de UNNY et KARMESHY (1983) tire son importance du fait qu'elle encadre le modèle de réservoir en temps continu dans le formalisme des EDS et qu'elle montre l'attrait des modèles stochastiques théoriques de précipitation-débit conçus dans une perspective analytique plus large que celle des tentatives antérieures.

## MODÈLES DE RÉSERVOIR EN TEMPS DISCRET

Une formulation stochastique à paramètre discret a aussi été développée théoriquement par KLEMES (1973, 1974, 1978), O'CONNOR (1976), ANIS *et al.* (1979) et KLEMES *et al.* (1985) dans le cas d'intrants en temps discret pour des réservoirs en temps discret. KLEMES (1978) a défendu avec ardeur la supériorité de la formulation en temps discret sur la formulation en temps continu, parce qu'il considère physiquement impossible de réaliser des modèles basés sur les processus blancs à paramètre continu. La raison de cette attitude serait une confusion apparente de la continuité de l'ensemble indexant et de la continuité du trajet échantillonné. Aucune définition mathématique ne spécifie que la trajectoire du processus blanc à paramètre continu est elle-même continue. Qu'ils soient discrets ou continus, les processus blancs possèdent un spectre de densité qui exige une puissance motrice infinie et donc ils sont également irréalisables physiquement. Le processus blanc à paramètre discret est réalisable dans le sens que les parcours empiriques du cheminement peuvent être facilement simulés. Ils sont donc appropriés aux problèmes de synthèse des données et à celui de la prédiction en temps réel.

Comme WEISS (1973b) l'a démontré pour les modèles « shot noise », un processus à paramètre discret peut être exprimé par l'intégrale d'un processus à paramètre continu dont la moyenne est établie par rapport au temps. Bien que les expressions explicites pour les extrants à paramètre continu ne peuvent être obtenues que pour les classes simples d'intrants à paramètre continu, on pourrait en principe relier mathématiquement les modèles de réservoirs continus et discrets et établir les conditions d'équivalence. Puisque le calcul stochastique a été développé de façon très significative pour les intégrales par rapport aux processus gaussiens blancs à paramètre continu et aux processus de Poisson, la formulation pour le cas d'un paramètre continu possède donc certains avantages pour les études théoriques. A notre avis les modèles de réservoirs continus et discrets sont tous les deux légitimes.

## MODÈLES CONCEPTUELS À RÉPONSE STOCHASTIQUE POUR LES BASSINS VERSANTS

Des objections à l'étude des modèles linéaires des bassins peuvent être soulevées en raison de la non linéarité du comportement des petits bassins. Cette non linéarité a été observée par MINSHALL (1960), AMOROCHO (1961) et WANG *et al.* (1981) dans la réponse superficielle. Elle a aussi été observée dans la réponse souterraine par ANDO *et al.* (1983) ainsi que dans la dynamique de l'infiltration (FREEZE, 1974 et SMITH et HEBBERT, 1983). Quoiqu'il en soit les modèles linéaires jouissent d'une grande popularité comme base pour l'analyse de l'hydrogramme unitaire superficiel et aussi comme composantes pour les modèles digitaux de simulation. La théorie linéaire déterministe de

Nash-Dooge a servi à mesurer la non linéarité de la réponse et constitue un premier pas vers le développement des modèles non-linéaires. KLEMES *et al.* (1985) ont suggéré un moyen d'évaluer la linéarité de la réponse hydrologique au moyen de la formulation d'un réservoir en temps discret. De plus, l'évolution des modèles stochastiques de réservoir en temps continu nécessite une structure linéaire solide comme base de l'évaluation de la non linéarité et pour le développement des théories non linéaires.

Les EDS des systèmes (19) et (20) présentent le processus précipitation-débit-évaporation à travers des réservoirs linéaires sous la forme de systèmes dynamiques linéaires stochastiques simples. Bien que cette représentation théorique puisse être contestée à partir des hypothèses déjà mentionnées, leur étude est justifiable puisque ce sont les structures analytiques les plus simples qui saisissent la nature du bassin et de ses principaux processus moteurs. Les modèles possèdent la forme de base, quoique simplifiée, commune à plusieurs modèles de simulation digitale et, comme WEISS (1977) et KOCH (1985) l'ont montré, les extrants discrétisés présentent les caractéristiques évidentes des données de débits. Dans ce qui suit on examine les modèles de la réponse du bassin versant, plus plausibles et en accord, sur un plan théorique, avec les développements récents de l'hydrologie physique ; ces modèles peuvent être élaborés en utilisant un réservoir linéaire à l'intérieur du cadre mathématique des EDS. On y examine les modèles des processus moteurs, de la précipitation et de l'évapotranspiration, ainsi que le couplage de l'infiltration interne au système à double régime (20). Quelques améliorations ainsi que des orientations de recherche sont aussi proposées.

Nous établissons d'abord le niveau ainsi que les limites de l'approche théorique. Si l'on revient à la discussion antérieure de la génération des débits on peut s'attendre à une réponse d'orage qui, dans certaines régions, soit rapide tant pour les régimes superficiels que souterrains. De plus la réponse souterraine totale pourrait possiblement être formée (*fig. 3*) à la fois d'une réponse rapide et d'une réponse lente qui fournit le débit du bassin entre les précipitations significatives. A partir de cette hypothèse, le modèle à double régime pourrait être supplanté par un modèle à triple régime reposant sur des réservoirs rapides en surface et des réservoirs rapides ainsi que lents en profondeur. Toutefois, ce genre de modèle n'apporte peut-être pas nécessairement une représentation théorique exacte si, par exemple, le mécanisme de la frange capillaire étudié par GILHAM (1983) s'avérait dominer la génération des débits d'orage sur de vastes étendues géographiques. On peut rappeler qu'en vertu de ce mécanisme, la tension d'emmagasinement du quasi canal se convertit rapidement en stockage gravitationnel, ce qui altère radicalement les gradients hydrauliques du quasi canal et force le drainage rapide de l'eau vers celui-ci. En réalité, le régime souterrain du canal capillaire fonctionne, entre les événements, selon un mode à réponse lente, et change au mode à réponse rapide durant l'événement, ce qui crée des conditions où la distinction entre réservoirs à réponse lente et réservoirs à réponse rapide est physiquement difficile. De plus, il semble que la séparation des hydrogrammes à réponse lente de ceux à réponse rapide ne soit possible que par le recours aux procédures traditionnelles. Il nous semble donc à propos de mettre en doute le bien fondé de la distinction entre la réponse d'orage rapide superficielle et souterraine. Dans toutes les études citées relatives à la

séparation de l'hydrogramme, les réponses superficielles et souterraines aux événements étaient du même ordre et ne présentaient aucun délai perceptible entre les régimes. Donc, la fusion des deux n'entraînerait probablement pas de divergence quantitative importante. Nous proposons donc, pour une approche hydrologique purement quantitative, de modéliser grossièrement la dynamique d'un système par un système à double régime du type réservoirs rapides et lents non isolés physiquement à l'interface « surface/souterrain », tel que nous le présentons en (20), ce qui à notre avis constitue une solution tout à fait acceptable.

## PRÉCIPITATION

La représentation des averses par un processus composé de Poisson implique la réduction d'un phénomène spatio-temporel à une séquence d'événements ponctuels. De plus, WEISS (1977) a démontré que les extrants discrétisés du réservoir linéaire reproduisent la « montée rapide/récession lente » caractéristiques des débits. En pratique, le fait d'ajuster les paramètres de précipitation directement sur une séquence de périodes pluvieuses statistiquement indépendantes [définies, par exemple, par l'approche empirique de RESTREPO-POSADA et EAGLESON (1982)], peut s'avérer préférable aux méthodes moins directes de Weiss. Pour l'étude des propriétés des débits de crues, le processus composé de Poisson peut caractériser adéquatement une séquence d'orages dépassant un seuil suffisamment élevé comme le suggèrent TODOROVIC et WOOLHISER (1985). Toutefois, à mesure que le but de la modélisation se déplace vers la simulation d'une réponse générale et vers l'analyse des étiages, il s'avère alors nécessaire de prendre en considération plus d'une séquence réduite d'événements pluvieux significatifs. Le processus de Poisson pour les arrivées pourrait ne plus être approprié si on constate un regroupement dans le temps des différents événements. KAVVAS et DELLEUR (1975) et SMITH et KARR (1983) ont respectivement étudié le processus de Poisson de regroupement ponctuel et le processus de renouvellement de Cox avec intensité Markovienne, en formulant différentes hypothèses pour le mécanisme sous-jacent à la génération des averses. Ces processus ont été étudiés comme modèles permettant de préserver le regroupement observé dans les séquences d'averses quotidiennes. Ces modèles conservent la représentation par impulsion de l'averse. Toutefois, le regroupement entraîne une corrélation avec les incréments de comptage du processus de précipitation. L'intensité de l'événement pluvieux demeure une variable exogène, mais on pourrait établir la corrélation entre les intensités de façon indépendante en se basant sur les observations empiriques. On pourrait donc concevoir l'emploi des modèles de regroupement d'averses pour examiner les effets de la structure de corrélation entre événements sur le débit du bassin.

FOUFOULA-GEORGIU et LETTENMAIER (1984) ont relevé un certain nombre de problèmes reliés à l'utilisation de modèles à paramètre continu de regroup-

pement des précipitations décrits précédemment pour représenter les séquences quotidiennes qui ont servi à les produire. Le regroupement d'averses peut en effet s'avérer être un phénomène significatif. Toutefois, il faudrait alors démontrer que le gain en réalisme de la modélisation de la réponse d'averse autant que de celle de la réponse d'un bassin, présente suffisamment d'avantages pour sacrifier la simplicité de modèles comme celui du processus composé de Poisson. Pour l'étude de la réponse du bassin, il suffit que la représentation de la pluie en donne les traits saillants suffisants pour caractériser de façon adéquate le processus du débit. De toute façon, la modélisation stochastique de la précipitation mérite une attention beaucoup plus grande. Puisque l'intégration stochastique a été définie aussi loin que l'intégration par rapport aux semimartingales, la théorie des systèmes dynamiques à processus stochastiques linéaires garantit que les réservoirs linéaires mènent pour la plupart des processus intrants imaginables à des processus d'extrants à solution unique, ne serait-ce qu'en employant seulement des méthodes numériques.

## ÉVAPOTRANSPIRATION

Bien qu'on puisse ignorer les pertes dues à l'évapotranspiration dans l'étude de la distribution des débits de crue, elles sont importantes pour la simulation des débits durant l'intervalle entre les précipitations ainsi que pour l'étude des propriétés des étiages. Il peut sembler naturel de discriminer entre pertes superficielles et souterraines, mais, en pratique, cette distinction est difficilement réalisable. Ceci est encore plus vrai lorsque les pertes totales d'évapotranspiration doivent être partagées entre régimes à réponse rapide et lente, non différenciés physiquement dans les faits par un interface surface/souterrain. Puisque seuls les totaux sont physiquement observables par la technique de MORTON (1983), une alternative commode consiste à attribuer toutes les pertes au réservoir lent. Les écarts quantitatifs devraient alors être négligeables dans le cas où l'on étudie les propriétés du débit entre précipitations. De plus on évite ainsi les difficultés reliées à l'attribution de paramètres d'évapotranspiration séparés à chacun des deux régimes.

Il demeure toutefois possible que le modèle à bande large (18) présente un débit négatif du réservoir lent s'il arrive que les intervalles qui séparent les orages soient par hasard de longue durée. C'est ce qu'on appelle le problème du passage de valeurs positives à valeurs négatives (zero crossing). Dans le cas des équations induites seulement par le bruit gaussien blanc, on s'est attaqué au problème en installant une barrière réfléchissante avec temps de retenue exponentielle à zéro et en solutionnant l'équation de Kolmogorov à rebours (COX et MILLER, 1965). Il ne semble pas exister de résultats équivalents pour l'EDS générale qui serait induite en même temps par un bruit gaussien blanc et une impulsion de Poisson. Toutefois les problèmes de temps de passage par zéro et de période de retour des étiages devraient pouvoir être résolus étant donné qu'on n'aura à considérer que le régime à réponse lente.

Entre les impulsions causées par la pluie, le système se conduit comme une équation à bruit blanc dont la théorie est établie. L'intervalle à partir d'un point arbitraire  $t$ , situé entre les impulsions, et la prochaine impulsion étant distribué selon une loi exponentielle, on peut en conséquence déterminer les distributions de probabilité jointes qui en découlent.

On rencontre certains problèmes avec les processus gaussiens blancs en tant que modèles physiques de bruit. Premièrement, comment peut-on relier la variance  $\beta_y^2$  du paramètre continu du modèle gaussien blanc des fluctuations de l'évapotranspiration  $\epsilon'_y$  à la série chronologique de pas  $T$  observée constituée des estimations indépendantes de l'évapotranspiration ? Il faut connaître la variance du processus gaussien blanc cumulatif moyen par rapport au temps. On peut facilement démontrer qu'elle est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{var} \left( \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon'_y dt \right) &= E \left( \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon'_y dt \right)^2 = E \left( \frac{\beta_y}{T} \int_0^T dW_y \right)^2 \\ &= \frac{\beta_y^2}{T^2} [W_y(T) - W_y(0)]^2 = \frac{\beta_y^2}{T} \end{aligned} \quad (34)$$

dans laquelle on a fait appel à la substitution formelle  $\epsilon'_y dt = \beta_y dW_y$  et aux propriétés du processus de Wiener (BODO *et al.*, 1987). Remarquons ici que la variance du processus gaussien blanc moyen décroît lorsque le temps  $T$  utilisé pour la moyenne augmente, ce qui signifie que le processus gaussien blanc à paramètre continu n'est pas ergodique. On peut aisément démontrer que, comme pour le bruit gaussien blanc à paramètre continu, le processus gaussien blanc moyen par rapport au temps est aussi non-corrélé, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \text{cov} \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon'_y dt \right) \left( \frac{1}{T} \int_S^{S+T} \epsilon'_y dt \right) \right] \\ = \frac{\beta_y^2}{T^2} E \left[ [W_y(T) - W_y(0)] [W_y(S+T) - W_y(S)] \right] = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

où  $S > T$  et  $S - T = kT$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  définissent une série chronologique à  $T$ -étapes, celles-ci étant un bruit gaussien blanc à paramètre discret. Si une estimation de la variance  $\hat{\sigma}^2$  est obtenue à partir de la série chronologique à  $T$ -étapes observée, une estimation  $\hat{\beta}_y^2$  du paramètre  $\beta_y^2$  est alors donnée par :

$$\hat{\beta}_y^2 = \hat{\sigma}^2 T \quad (36)$$

Donc on peut dire, du moins en principe, que le modèle gaussien blanc à moyenne nulle et à paramètre continu représentant le bruit dû à l'évapotranspiration peut être relié aux pertes totales physiquement observables causées par l'évapotranspiration.

En toute probabilité, la séquence observée, formée des estimations de l'évapotranspiration, sera corrélée. En effet, les adeptes des modèles physiques s'objectent normalement au processus gaussien blanc du fait que les bruits physiques réels sont corrélés. Cette objection peut être immédiatement levée si on filtre le processus gaussien blanc à travers un système linéaire d'où l'on obtient un bruit coloré à structure de corrélation adéquate (JAZWINSKI, 1970). Le bruit coloré de moyenne nulle  $\omega_t$  est généré par une EDS et si, par exemple,  $\omega_t$  est substitué au bruit blanc dans l'équation (20b) donnée pour un réservoir lent, le résultat obtenu est le système couplé suivant :

$$d\omega = -\rho\omega dt + \rho\beta_y dW_y \quad (37a)$$

$$dy = (-\alpha_y \bar{\varepsilon}_y - \alpha_y y)dt - \alpha_y \omega dt + \int_U \alpha_y q u M(dt, du) \quad (37b)$$

où  $\rho > 0$  et :

$$\text{cov}(\omega_0, \omega_\tau) = \frac{\rho\beta_y^2}{2} e^{-\rho\tau} \quad (38)$$

Vouloir relier les paramètres  $\rho$  et  $\beta_y^2$  du bruit gaussien coloré à paramètre continu à son processus cumulé moyen par rapport au temps dans le but d'obtenir les estimations à partir des séries chronologiques d'évapotranspiration observées pose un défi plus grand encore que dans le cas d'un processus blanc. Les résultats peuvent cependant être obtenus en utilisant les méthodes développées par BODO (1985). Soulignons aussi que la même approche est possible avec des systèmes à paramètre discret si l'on veut obtenir un bruit gaussien corrélé à paramètre discret.

Une autre objection apportée à l'emploi de modèles de bruit gaussien est que ceux-ci acceptent théoriquement la possibilité d'une évapotranspiration négative. Toutefois, cette éventualité est négligeable en raison de sa faible probabilité. Un modèle d'évapotranspiration devrait idéalement avoir zéro comme limite inférieure, posséder des moments d'ordre supérieur à deux et être corrélé. On en vient donc tout naturellement à penser à certaines variations d'un modèle de bruit distribué selon une loi gamma. MORAN (1967) a toutefois essayé de déterminer les moments du stockage dans un réservoir linéaire soumis à des intrants non corrélés d'incrémentés distribués selon une loi gamma mais il n'a pas réussi à obtenir des expressions approchées. Par conséquent le processus gaussien coloré constitue actuellement le meilleur modèle disponible.

## INFILTRATION

Dans le modèle à double régime présenté en (20), on a considéré que l'infiltration n'était qu'une fraction constante  $q$  de la pluie incidente. Pour l'étude des effets de la texture du sol sur l'écoulement, le modèle de KOCH (1965), beaucoup plus réaliste, s'avère approprié puisqu'il s'appuie sur plusieurs paramètres physiques du sol. Toutefois, comparativement au réservoir linéaire, la dynamique de l'infiltration  $y$  est assez complexe. On se demande dans ce cas comment définir concrètement un modèle d'infiltration à dynamique linéarisée simple. Supposons qu'on puisse faire appel à  $q$ , une fonction simple du déficit souterrain d'humidité. On peut raisonnablement supposer que le sous-sol possède une capacité maximale limitée de stockage à pleine saturation,  $s_{\max}$  et une capacité minimale limitée,  $s_{\min}$ , correspondant à une valeur extrême du débit d'étiage. Faisons maintenant l'hypothèse que l'emploi des techniques de MORTON (1983) sur plusieurs années pour suivre les pertes d'évapotranspiration et pour obtenir les variations du stockage sur le bassin, ait fourni des estimés plausibles de  $s_{\max}$  et de  $s_{\min}$ . L'ensemble de ces hypothèses permet d'exprimer  $q$  par une fonction simple du déficit de stockage de la zone inférieure, par exemple :

$$q_t = f \left( \frac{s_{\max} - s_t}{s_{\max} - s_{\min}} \right) \quad (39)$$

où  $s_t$  est le stockage de la zone inférieure,  $(s_{\max} - s_t)$  le déficit de stockage,  $(s_{\max} - s_{\min})$  l'intervalle de variation du stockage et  $t$  l'instant qui précède immédiatement une précipitation. Il faut noter que le stockage doit être obligatoirement établi par rapport à un repère arbitraire. Supposons toutefois qu'en ajustant le niveau de ce repère on puisse en établir la valeur de telle sorte que la zone inférieure se comporte à peu près comme un réservoir linéaire. On peut donc poser :

$$s_t = y_t / \alpha_y \quad (40)$$

où  $y_t$  et  $\alpha_y$  représentent le débit du réservoir lent et le coefficient du réservoir. Alors qu'on admet que le stockage souterrain comporte deux composantes de réponse, une rapide et une lente, on a vu précédemment qu'elles étaient physiquement difficiles à séparer et que, généralement, le débit souterrain immédiatement antérieur à une précipitation provenait du régime lent. En substituant (40) dans (39), on obtient la relation générale :

$$q_t = f \left[ \frac{s_{\max}}{s_{\max} - s_{\min}} - \frac{y_t}{\alpha_y (s_{\max} - s_{\min})} \right] \quad (41)$$

ce qui suggère que la relation linéarisée simple pour  $q$  pourrait être donnée par :

$$q_t = q_0 - q_1 y_t \quad (42)$$

où  $0 \leq q_t \leq 1$  et  $q_0$  ainsi que  $q_1$  sont des constantes numériques. Même avec les hypothèses aussi idéalistes que nous avons invoquées, on peut

attribuer à cette relation un caractère plausible au sens physique puisqu'il est évident qu'un débit de base important avant une précipitation aurait impliqué un degré préalablement élevé d'humidité et qu'une réponse à l'orage plus forte et rapide en résulterait. De plus, la validité de l'équation (42) peut être examinée directement par les techniques habituelles de séparation de l'hydrogramme d'orage à partir desquelles  $q_t$  et  $y_t$  peuvent être aisément déterminés. Dans ce cas  $q_0$  et  $q_1$  deviennent des quantités physiquement observables.

## UN MODÈLE DYNAMIQUE GROSSIER DE RÉPONSE D'UN BASSIN VERSANT

Nous pouvons modifier l'équation (42) en tenant compte des suggestions qui précèdent concernant l'évapotranspiration afin de formuler théoriquement un modèle stochastique linéaire grossier à double régime de réponse du bassin versant. Ce modèle est décrit par le système d'EDS suivant :

$$dx = -\alpha_x x dt + \int_U \alpha_x (1 - q_0 + q_1 y) u M (dt, du) \quad (43a)$$

$$d\omega = -\rho\omega dt + \rho\beta_y dW_y \quad (43b)$$

$$dy = -\alpha_y (\bar{\varepsilon}_y + \omega + y) dt + \int_U \alpha_y (q_0 - q_1 y) u M (dt, du) \quad (43c)$$

qui peut aussi s'écrire comme un vecteur d'EDS :

$$dx = (a_0 + a_1 x) dt + b_0 dW + \int_U (c_0 + c_1 x) u M (dt, du) \quad (44)$$

où  $a_0$ ,  $c_0$  sont des vecteurs à  $n$  dimensions,  $a_1$ ,  $c_1$  sont des matrices de dimensions  $n \times n$ ,  $x^T = [x, \omega, y]$  et  $n = 3$ . Ce modèle possède plusieurs caractéristiques intéressantes. La relation (43b) génère dans l'évapotranspiration une fluctuation gaussienne colorée de moyenne nulle, située dans le réservoir lent représenté par l'équation (43c). A la suite du remplacement de  $q$  dans les modèles précédents par l'équation (42), les EDS (43a) de la réponse rapide du réservoir ainsi que les EDS (43c) sont devenues bilinéaires dans l'« excitation » de Poisson par rapport au débit  $y$  du réservoir lent. Ceci a pour effet de modifier radicalement les moments des débits du système, surtout ceux du réservoir rapide qui dépendent dorénavant des propriétés de  $y$ . Quoiqu'il en soit la structure du modèle demeure linéaire et les moments

peuvent être déterminés en utilisant la règle standard de différentiation de Itô. De plus, les paramètres de précipitation, d'évapotranspiration et d'infiltration peuvent, du moins en principe, être estimés à partir de quantités physiquement observables. Ce modèle est un des résultats de la recherche effectuée sur les modèles (19) et (20) mais ses propriétés restent encore à préciser.

## CONCLUSION

Les modèles théoriques linéaires stochastiques en temps continu pour la réponse d'un bassin sont formulés en termes de systèmes dynamiques stochastiques linéaires. Ces modèles utilisent le concept élémentaire de réservoir à stockage linéaire comme point de départ pour schématiser le bassin. Des modèles plus généraux peuvent être aisément obtenus en considérant des cascades de réservoirs linéaires placés en série ou en parallèle. Les modèles stochastiques de base (19) et (20) sont obtenus en rendant aléatoires les intrants de la cascade linéaire déterministe de Nash-Dooge, comme de simples systèmes d'équations différentielles linéaires stochastiques. Ce sont en fait les modèles théoriques stochastiques les plus simples qui permettent de représenter l'essence même de la dynamique du système ainsi que ses agents moteurs primaires, la précipitation et l'évapotranspiration. La revue des travaux publiés révèle qu'antérieurement, des variantes de ces modèles linéaires, basées sur certaines hypothèses et ensembles d'intrants particuliers ont été mises au point pour étudier les propriétés distributives de la réponse du bassin et pour simuler celle-ci. Le cadre mathématique fourni par les équations différentielles stochastiques devrait constituer une structure analytique suffisamment large pour formaliser et amplifier les théories de la réponse du bassin reposant sur le concept de linéarité.

La logique sous-jacente aux développements mathématiques reflète les progrès récents de l'hydrologie physique, notamment ceux qui ont permis d'enregistrer de façon indépendante les pertes dues à l'évapotranspiration, ainsi que les découvertes des hydrogéologues relatives à la génération des débits. Ces progrès dans l'enregistrement de l'évapotranspiration ont jeté la base du traitement de la composante de l'évapotranspiration et, par l'intermédiaire des relevés de la variation du stockage du bassin, ont conduit à la relation (42) proposée pour l'infiltration. Les conséquences de l'emploi des techniques proposées par Morton sont encore à peine explorées. Ces méthodes devraient faire l'objet d'une application beaucoup plus large. Quant à la génération des débits, on a délaissé, de nos jours, la distinction entre régimes de réponse superficielle et souterraine au profit de régimes rapides et lents qui ne doivent plus nécessairement être séparables en fonction de l'interface physique surface/souterrain. Cette nouvelle approche théorique qui s'appuie sur une vision grossière de la dynamique du système, conserve la structure analytique des travaux antérieurs.

Notre conclusion propose deux suggestions issues des difficultés rencontrées au cours de nos recherches. La première a trait à la nécessité de

réviser la terminologie qui s'avère imprécise. On trouve souvent en effet des termes comme « ruissellement direct » et « débit de base », cavalièrement appliqués aux composantes du débit, sans qu'on se soit soucié, de façon évidente, d'identifier et de préciser l'origine des eaux ou le mécanisme de leur transfert. Ce sont des hydrogéologues qui ont pris les devants à ce sujet (voir SKLASH *et al.*, 1976, et SKLASH et FAVOLDEN, 1979, pour les tentatives de classification terminologique relative à la génération du ruissellement). Il est temps d'introduire des concepts modernes sur la génération du ruissellement en hydrologie de surface, de dénoncer le jargon imprécis et, en conséquence, de lui substituer des termes précis. En deuxième lieu, nous constatons que les efforts de synthèse des résultats d'études hydrogéologiques, géomorphologiques, mathématiques ou de simulation sont contrecarrés par des vues partielles du processus précipitation-débit et par les difficultés éprouvées pour établir des parallèles entre bassins. Une meilleure coordination des efforts de recherche entraînerait un réel progrès de l'hydrologie par synergie, ce que les efforts individuels ne peuvent réaliser isolément.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AMOROCHO, J., 1961. Predicting storm runoff on a small experimental watersheds, Discussion, *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Eng.*, 87(HY2) : 185-191.
- ANIS A.A., LLOYD E.H. and SALEEM S.D., 1979. The linear reservoir with Markovian Inflows, *Water Resour. Res.*, 15 (6) : 1623-1627.
- ANDO Y., MUSIAKE K. and TAKAHASI Y., 1983. Modeling of hydrologic processes in a small natural hillslope basin, based on the synthesis of partial hydrological relationships, *J. Hydrol.*, 64 : 311-337.
- BERNIER J., 1970. Inventaire des modèles de processus stochastiques à la description des débits journaliers des rivières, *Rev. Inst. Int. Statist.*, 38 (1) : 49-61.
- BEVEN K.J. and KIRKBY M.J., 1979. A physically based, variable contributing area model of basin hydrology, *Hydrol. Sci. Bull.*, 24 (1) : 43-69.
- BEVEN K.J., KIRKBY M.J., SCHOFIELD N. and TAGG A.F., 1984. Testing a physically-based flood forecasting model (TOPMODEL) for three U.K. catchments, *J. Hydrol.*, 69 : 119-143.
- BODO B.A., 1985. Linear Stochastic Conceptual Catchment Response Models, Ph.D. thesis, Univ. of Waterloo, Waterloo, Ont.
- BODO B.A. and UNNY T.E., 1987. On the outputs of stochasticized Nash-Dooge linear reservoir cascade, stochastic hydrology (Ed. I.B. McNeill and G.J. Humphrey), *Advances in Statistical Science, Vol. IV*, Reidel Publishing Co., Boston.
- BODO B.A., THOMPSON M.E. and UNNY T.E., 1987. *Stochastic Differential Equations, Stochastic Hydrology and Hydraulics, Vol. 1(2)* : 81-100.
- CHOW V.T., 1964. Runoff - Sec 14. In : *Handbook of applied hydrology* (V.T. Chow, Ed.), McGraw - Hill, New York.
- COX D.R. and MILLER B.D., 1965. *The Theory of Stochastic Processes*, Methuen, London.
- DOOGE J.C.I., 1959. A general theory of the unit hydrograph, *J. Geophys. Res.*, 64 (2) : 241-256.
- DOOGE J.C.I., 1977. Problems and methods of rainfall-runoff modeling, In : *Mathematical Models for Surface Water Hydrology*, T.A. Ciriani, U. Maione, and J.R. Wallis Eds, 71-108, Wiley, New-York.
- EAGLESON P.S., 1971. The stochastic kinematic wave, In : *Systems approach to hydrology*, 202-222. *Water Resour. Publ.*, Ft. Collins, Col.
- EAGLESON P.S., 1972. Dynamics of flood, *Water Resour. Res.*, 8 (4) : 878-897, 1972.
- FOUFOULA-GEORGIU E. and LETENMAIER D.P., 1985. Continuous versus dis-

- cret point process models for daily rainfall occurrences, Paper presented at the Spring Meeting of the American Geophysical Union, Baltimore.
- FREEZE R.A., 1974. Streamflow generation, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 12 : 627-647.
- FREEZE R.A., 1980. A stochastic-conceptual analysis of rainfall-runoff processes on a hillslope, *Water Resour. Res.*, 16(2) : 391-408.
- FREEZE R.A. and CHERRY J.A., 1979. *Groundwater*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- GILHAM R.W., 1984. The capillary fringe and its effect on water-table response, *J. Hydrol.*, 67 : 307-324.
- GUPTA V.K. and WAYMIRE E., 1983. On the formulation of an analytical approach to hydrologic response and similarity at the basin scale, *J. Hydrol.*, 65 : 95-123.
- GUPTA V.K., WAYMIRE E. and WANG T.C., 1980. A representation of an instantaneous unit hydrograph from geomorphology, *Water Resour. Res.*, 16 (5) : 855-862.
- HEBSON C. and WOOD E.F., 1982. A derived flood frequency distribution using Horton order ratios, *Water Resour. Res.*, 18 (5) : 1509-1518.
- HORTON R.E., 1933. The role of infiltration in the hydrologic cycle, *Trans. Am. Geophys. Union*, 14 : 446-460.
- JAZWINSKI A.H., 1970. *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York.
- KAVVAS M.L., and DELLEUR J.W., 1975. *The Stochastic and Chronologic Structure of Rainfall Sequences - Application to Indiana*, Tech. Rep. No. 57, Purdue Univ., Water Resour. Res. Center, West Lafayette, Ind.
- KLEMES V., 1973. Watershed as semiinfinite storage reservoir, *J. Irrig Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, 99(IR4) : 477-491.
- KLEMES V., 1974. Probability distribution of outflow from a linear reservoir, *J. Hydrol.*, 21 : 305-314.
- KLEMES V., 1978. *Physically based stochastic hydrologic analysis*, In : *Advances in Hydroscience*, Vol. 11, V.T. Chow Ed., 285-356, Academic Press, New York.
- KLEMES V., KLEMES I. and GLYNN J.E., 1985. Discrete-time linear cascade under time averaging, *J. Hydrol.*, 77 : 107-123.
- KOCH R.W., 1985. A stochastic streamflow model based on physical principles, *Water Resour. Res.*, 21(4) : 545-553.
- MINSHALL N.E., 1960. Predicting storm runoff on small experimental watersheds, *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, 86 (HY8) : 17-38.
- MORAN P.A.P., 1967. Dams in series with continuous release, *J. Appl. Prob.*, 4 : 380-388.
- MORTON F.I., 1983. Operational estimates of areal evapotranspiration and their significance to the science and practice of hydrology, *J. Hydrol.*, 66 : 1-76.
- NASH J.E., 1957. The form of the instantaneous unit hydrograph, In : *General assembly of Toronto, Vol. III, IASH Publ. No. 45* : 114-119.
- NEWBURY R.W., CHERRY J.A. and COX R.A., 1969. Groundwater-streamflow systems in Wilson Creek experimental watershed, *Can. J. Earth Sci.*, 6 : 613-623.
- NGUGEN V.T.V. and ROUSSELLE J., 1981. A stochastic model for the time distribution of hourly rainfall depth, *Water Resour. Res.*, 17 (2) : 399-409.
- O'CONNOR K.M., 1976. A discrete linear cascade model for hydrology, *J. Hydrol.*, 29 : 203-242.
- PINDER G.F. and JONES J.F., 1969. Determination of ground-water component of peak discharge, *Water Resour. Res.*, 5 : 438-445.
- QUIMPO R.G., 1971. Structural relation between parametric and stochastic hydrology models, In : *Mathematical Models in Hydrology*, Vol. I, IASH Publ. No. 100 : 151-157.
- QUIMPO R.G., 1973. Link between stochastic and parametric hydrology, *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, 99(HY3) : 461-470.
- RESTREPO-POSADA P.J. and EAGLESON P.S., 1982. Identification of independent rainstorms, *J. Hydrol.*, 55 : 303-319.
- RODRIGUEZ-ITURBE I. and VALDES J.B., 1979. The geomorphic structure of hydrologic response, *Water Resour. Res.*, 15 (6) : 1409-1420.
- RODRIGUEZ-ITURBE I., GONZALEZ M. and BRAS R.L., 1982. A geomorphoclimatic theory of the instantaneous unit hydrograph, *Water Resour. Res.*, 18 (4) : 877-886.

- SHERMAN L.K., 1932. Stream flow from rainfall by unit-graph method, *Eng. News-Rec.*, 108 : 501-505.
- SKLASH M.G. and FARVOLDEN R.N., 1979. The role of groundwater in storm runoff, *J. Hydrol.*, 43 : 45-65.
- SKLASH M.G., FARVOLDEN R.N. and FRITZ P., 1976. A conceptual model of watershed response to rainfall, developed through the use of oxygen-18 as a natural tracer, *Can. J. Earth Sci.*, 13 : 271-283.
- SMITH J.A. and KARR A.F., 1983. A point process model of summer season rainfall occurrences, *Water Resour. Res.*, 19 (1) : 95-103.
- SMITH R.E. and HEBBERT R.H.B., 1983. Mathematical simulation of interdependent surface and subsurface hydrologic response, *Water Resour. Res.*, 19 (4) : 987-1001.
- SMITH R.E. and SCHREIBER H.A., 1974. Point processes of seasonal thunderstorm rainfall, 2. Rainfall depth probabilities, *Water Resour. Res.*, 10 (3) : 418-423.
- TODOROVIC P. and WOOLHISER D.A., 1975. A stochastic model of n-day precipitation, *J. Appl. Meteor.*, 14 (1) : 17-24.
- TODOROVIC P. and WOOLHISER D.A., 1985. A shot noise model of streamflow, manuscript currently under review for publication in *Water Resour. Res.*
- TODOROVIC P., and YEVJEVICH V., 1969. Stochastic process of precipitation, *Hydrol. Paper No. 35*, Col. State Univ., Ft. Collins, Col.
- UNNY T.E., 1984. Numerical integration of stochastic differential equations in catchment modeling, *Water Resour. Res.*, 20 (3) : 360-368.
- UNNY T.E. and KARMESHU, 1983. Stochastic nature of outputs from conceptual reservoir model cascades, *J. Hydrol.*, 68 : 161-180.
- WANG T.C., GUPTA V.K. and WAYMIRE E., 1981. A geomorphologic synthesis of non-linearity in surface runoff, *Water Resour. Res.*, 17 (3) : 545-554.
- WEISS G., 1973A. Shot noise models for synthetic generation of multisite daily streamflow data, In : *Design of Water Resources Projects with Inadequate Data*, IASH Publ. No. 108 : 457-467.
- WEISS G., 1973b. Filtered Poisson Processes as Models for Daily Streamflow Data, Ph.D. thesis, Imperial College, London.
- WEISS G., 1977. Shot noise models for the generation of synthetic streamflow data, *Water Resour. Res.*, 13 (1) : 101-108.
- ZOCH R.T., 1934. On the relationship between rainfall and streamflow, *Mon. Weath. Rev.*, 62 (9) : 315-322.
- ZOCH R.T., 1936. On the relationship between rainfall and streamflow - II, *Mon. Weath. Rev.*, 64 (4) : 105-121.
- ZOCH R.T., 1937. On the relationship between rainfall and streamflow - III, *Mon. Weath. Rev.*, 65 (4) : 135-147.