Éducation et francophonie

Conceptualisation, symbolisation et interactions enseignante/enseignant-élèves dans les apprentissages mathématiques : l'exemple de la généralisation

Conceptualization, symbolization and teacher-student interactions in mathematical education: the example of generalization

Conceptualización, simbolización e interacciones maestros/maestras-alumnos/alumnas en los aprendizajes matemáticos: el ejemplo de la generalización

Joëlle Vlassis and Isabelle Demonty

Volume 47, Number 3, Fall 2019

Les interactions sociales au service des apprentissages mathématiques

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1066515ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1066515ar

See table of contents

Publisher(s)

Association canadienne d'éducation de langue française

ISSN

1916-8659 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Vlassis, J. & Demonty, I. (2019). Conceptualisation, symbolisation et interactions enseignante/enseignant-élèves dans les apprentissages mathématiques : l'exemple de la généralisation. *Éducation et francophonie*, *47*(3), 98–120. https://doi.org/10.7202/1066515ar

Article abstract

Starting from the definition of learning and mathematical objects according to Radford (2008), this article proposes a reflection on the interdependence of mathematical objects, their symbolization, and social interactions in the learning process. It aims to question the way in which these three indissociable components are articulated, and on this basis presents an integrative model of mathematical education. It aims to specifically examine the importance of interactions between the teacher and the students. Although the importance of social interactions has been demonstrated for many years, the interactions that have been studied are mainly those between students (Schubauer-Leoniand Perret-Clermont, 1997, Iiskala, Vauras, Lehtinen and Salonen, 2011). Only recently has the importance of teacher-student interactions been highlighted. In our article, we therefore wish to do a more specific analysis of interactions between teacher and students, in the context of a generalization activity in algebra. We show the importance of quality interventions on the part of the teacher, based on the model of Jacobs et al. (2010, in Callejo and Zapareta, 2016), to bring out mathematical knowledge through social practices in the classroom.

Conceptualisation, symbolisation et interactions enseignante/enseignant-élèves dans les apprentissages mathématiques: l'exemple de la généralisation

Joëlle VLASSIS
Université du Luxembourg, Grand-Duché du Luxembourg

Isabelle DEMONTY
Université de Liège, Belgique

RÉSUMÉ

Partant de la définition de l'apprentissage et des objets mathématiques selon Radford (2008), cet article propose une réflexion sur l'interdépendance des objets mathématiques, leurs symbolisations et les interactions sociales dans le processus d'apprentissage. Il vise à interroger la manière dont s'articulent ces trois composantes indissociables et présente, sur cette base, un modèle intégratif de l'apprentissage des mathématiques. Il vise à examiner en particulier l'importance des interactions entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves. Si l'importance des interactions sociales est démontrée depuis de nombreuses années, ce sont en effet principalement les interactions entre les élèves qui ont été étudiées (Schubauer-Leoni et Perret-Clermont, 1997; Iiskala, Vauras, Lehtinen et Salonen, 2011). Ce n'est qu'assez récemment que l'importance des interactions entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves a été mise en évidence. Dans notre article, nous proposons donc d'analyser plus particulièrement les interactions entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves, dans le contexte d'une activité de généralisation en algèbre. Nous montrons l'importance d'interventions de qualité de la part de l'enseignant, sur la base du modèle de Jacobs *et al.* (2010, dans Callejo et Zapareta, 2016), pour faire émerger les savoirs mathématiques des pratiques sociales de la classe.

ABSTRACT

Conceptualization, symbolization and teacher-student interactions in mathematical education: the example of generalization

Joëlle VLASSIS, University of Luxembourg, Grand Duchy of Luxembourg
Isabelle DEMONTY, University of Liège, Belgium

Starting from the definition of learning and mathematical objects according to Radford (2008), this article proposes a reflection on the interdependence of mathematical objects, their symbolization, and social interactions in the learning process. It aims to question the way in which these three indissociable components are articulated, and on this basis presents an integrative model of mathematical education. It aims to specifically examine the importance of interactions between the teacher and the students. Although the importance of social interactions has been demonstrated for many years, the interactions that have been studied are mainly those between students (Schubauer-Leoniand Perret-Clermont, 1997, Iiskala, Vauras, Lehtinen and Salonen, 2011). Only recently has the importance of teacher-student interactions been highlighted. In our article, we therefore wish to do a more specific analysis of interactions between teacher and students, in the context of a generalization activity in algebra. We show the importance of quality interventions on the part of the teacher, based on the model of Jacobs et al. (2010, in Callejo and Zapareta, 2016), to bring out mathematical knowledge through social practices in the classroom.

RESUMEN

Conceptualización, simbolización e interacciones maestros/ maestras-alumnos/alumnas en los aprendizajes matemáticos : el ejemplo de la generalización

Joëlle VLASSIS, Universidad de Luxemburgo, Gran Ducado de Luxemburgo
Isabelle DEMONTY, Universidad de Lieja, Bélgica

A partir de la definición del aprendizaje y de los objetos matemáticos según Redford (2008), este articulo propone una reflexión sobre la interdependencia de los objetos matemáticos, sus simbolizaciones y las interacciones sociales en el proceso de aprendizaje. Su objetivo es cuestionar la manera en que se articulan estos tres componentes indisociables y sobre esta base presenta un modelo integrativo del aprendizaje de las matemáticas. Busca examinar, particularmente, la importancia de las interacciones entre maestro o maestra y los alumnos/alumnas. Si desde hace mucho tiempo se ha demostrado la importancia de las interacciones sociales, han sido principalmente las interacciones entre alumnos que se han estudiado (Schubauer-Leoni y Oerret-Clermont, 1997, Liskala, Vauras, Lehtinen y Salonen, 2011). La importancia de las interacciones entre maestro o maestra y los alumnos/alumnas, sólo muy recientemente han sido evidenciadas. En nuestro artículo nos proponemos pues analizar en particular las interacciones entre maestro o maestra y los alumnos/alumnas, en el contexto de una actividad de generalización en álgebra. Mostramos la importancia de intervenciones de calidad de la parte del maestro, basándonos en el modelo de Jacobs et al. (2010, en Callejo y Zapareta, 2016), para hacer surgir los saberes matemáticos de las prácticas sociales en la clase.

INTRODUCTION

Historiquement, les mathématiques se sont développées en étroite relation avec les symbolisations qu'elles utilisent. Depuis les premières traces dénotant des quantités sur les tablettes de pierre jusqu'aux représentations formelles de nombres imaginaires, les activités de symbolisation sont indissociables de l'émergence des objets mathématiques et de leur évolution (Vlassis, Fagnant et Demonty, 2015). Au niveau des apprentissages, depuis la diffusion des travaux de Vygotsky (2003) en éducation mathématique, les approches socioculturelles considèrent que le discours mathématique et ses objets sont mutuellement constitutifs (Font, Godina et Gallardo, 2013). Le terme *discours* est à considérer dans le sens de Kieran (2001) et Sfard (2001) pour désigner toute instance de communication, qu'elle soit verbale ou écrite à l'aide de systèmes symboliques, ou qu'elle prenne place avec d'autres ou soi-même. Ainsi, les symboles formels ou informels, le langage, les représentations ou toute autre trace écrite sont des éléments du discours mathématique. Dans ce contexte, nous envisageons les *symboles* comme tout matériel concret ou toute trace écrite destinés à représenter un élément du discours mathématique.

Dans les classes, la recherche pointe, depuis de nombreuses années, les difficultés que les élèves rencontrent dans l'utilisation des symboles mathématiques formels tant dans l'enseignement primaire que secondaire : le sens de l'égalité, le sens des expressions ou de la lettre, ou encore le signe moins continuent toujours à poser problème aux élèves (Kieran, 1992; Fagnant, 2008; Vlassis, 2010). Ces difficultés ne sont pas sans relation avec des pratiques d'enseignement dont le point de vue implicite sous-jacent consiste à considérer les symboles de manière indépendante des objets ou des opérations qu'ils représentent, et qui considèrent que l'apprentissage des techniques et de leur représentation symbolique doit être acquis de manière décontextualisée, avant la résolution des problèmes qui les mobilisent (Kieran, 2007; Radford, 2008). Cette perspective compromet les apprentissages mathématiques des élèves en dissociant les objets du discours mathématique de leur symbolisation; cela les conduit souvent à considérer les mathématiques comme la manipulation de symboles vides de sens.

Or selon Radford (1998), un symbole ou plus largement un *signe* (au sens de Vygotsky, 2003)[1] n'est jamais une entité pour lui-même; il prend place et fait sens dans un contexte d'activité précis et est produit pour atteindre un objectif donné (Radford, 1998). Cette conception du signe implique que, du point de vue des élèves, le contexte même d'une activité façonnera la production de signes dont les symboles mathématiques en leur donnant un but significatif. Dans ce type d'activité, les élèves sont amenés à communiquer à propos de la tâche en utilisant un ensemble de signes, et plus précisément un langage oral ou écrit, formel ou informel, pour argumenter, justifier ou expliquer un raisonnement. C'est l'ensemble de ce processus de conceptualisation médiatisé par les interactions sociales et par les signes qui se trouve au cœur des apprentissages mathématiques.

Cet article propose une réflexion sur l'interdépendance des objets mathématiques, de leurs symbolisations et des interactions sociales. Il interroge la manière dont s'articulent ces trois composantes indissociables dans les apprentissages mathématiques, et examine en particulier le rôle et l'importance des interactions entre l'enseignant et les élèves. Pour illustrer notre propos, nous prenons l'exemple de l'apprentissage de la généralisation en algèbre élémentaire. Nous décrirons des interactions efficaces d'enseignants pour favoriser le processus de généralisation des élèves et illustrerons nos réflexions par des exemples issus de l'expérimentation d'une activité de généralisation.

---

1. Au sens de Vygosky, les *signes* sont les outils de communication. Les symboles formels ou informels, les gestes, le langage oral ou écrit, les dessins, ou toute autre représentation sont des outils pour communiquer en mathématiques. En ce sens, le signe est donc un élément du « discours » mathématique.

INTERDÉPENDANCE DES OBJETS, DES SYMBOLES ET DES INTERACTIONS SOCIALES DANS LES APPRENTISSAGES MATHÉMATIQUES

Radford (2008) souligne l'ancrage social de l'apprentissage des mathématiques qui, selon lui, ne consiste pas à construire ou (re)construire un élément de savoir, mais plutôt à donner, de manière active et créative, un sens aux objets conceptuels que l'élève trouve dans sa culture. C'est ce qu'il appelle un « processus d'objectivation », c'est-à-dire un processus social de prise de conscience progressive d'un objet culturel, par exemple une figure, une forme ou un nombre dont nous percevons graduellement la généralité, en même temps que nous lui donnons du sens. Autrement dit, apprendre de ce point de vue est compris comme la participation aux pratiques sociales qui rendent cette connaissance accessible.

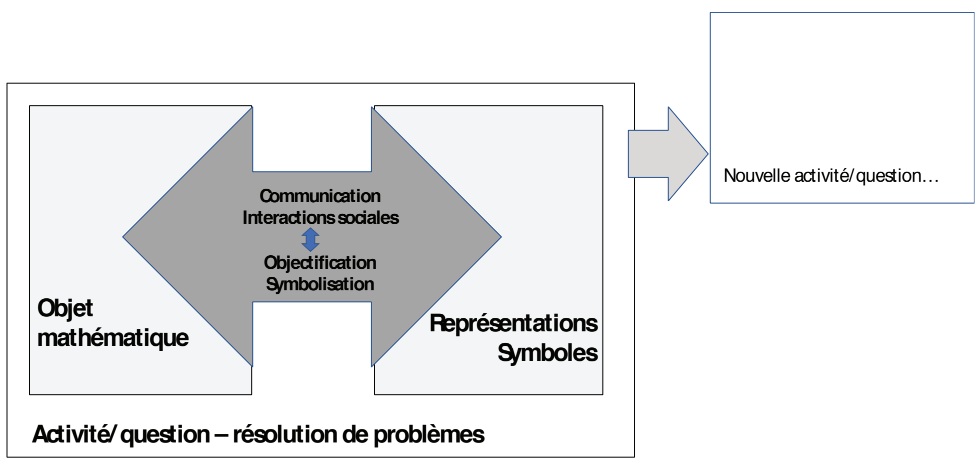
Radford insiste particulièrement sur l'idée que ces objets sont incrustés dans les pratiques sociales médiatisées par des artefacts ou par des signes tels que les symboles. Dans cette perspective, les symboles sont donc d'abord considérés comme des outils de communication. Cette conception est loin de certaines pratiques de classe qui envisagent plutôt les symboles comme des notations formelles qu'il s'agit d'apprendre à utiliser selon des règles précises pour appliquer techniques et procédures. Selon Radford, l'accès aux objets mathématiques n'est en effet possible que par l'activité sociale et médiatisée qui les sollicite. Cette définition de l'apprentissage implique ainsi de considérer trois aspects importants au cœur des apprentissages mathématiques : les objets mathématiques, les outils médiateurs de l'activité (les signes, dont les symboles) et les pratiques sociales. Nous proposons de clarifier la nature des objets mathématiques et d'approfondir leurs relations avec les signes d'une part et les pratiques sociales d'autre part.

Pour Radford (2008), les objets mathématiques sont des *fixed patterns* de l'activité réflexive incrustés dans le monde en constante évolution des pratiques sociales médiatisées par les signes et les artefacts. Cette conception des objets mathématiques est assez proche de la définition des concepts de Vygotsky (2003) selon laquelle, sous l'angle psychologique, le concept est un acte de généralisation à n'importe quel stade de son développement. En effet, tant Radford que Vygotsky mettent l'accent sur l'action (*activité* chez Radford, acte chez Vygotsky) et sur une généralisation (*pattern* pour Radford, *généralisation* pour Vygotsky). Tous deux semblent également évoquer qu'un concept ou un objet n'est pas monolithique, mais qu'il est composé de plusieurs niveaux de développement. Selon Radford, l'objet conceptuel est en effet un objet constitué de différentes couches de généralité. Dans cet article, nous considérerons les concepts et les objets mathématiques de manière assez proche. Radford parle par ailleurs d'*objets conceptuels* et n'établit pas de distinction claire entre les deux notions.

Concernant les interactions sociales et les outils médiateurs de la communication, Fonts, Godino et Gallardo (2013) rappellent que les mathématiques sont une activité humaine et que les entités impliquées dans cette activité (c'est-à-dire les objets) émergent des actions et du discours à travers lesquels ils sont exprimés. Le discours est ainsi considéré comme outil médiateur de la communication. Ces auteurs utilisent le terme *émergence* à dessein pour souligner le fait que ces objets émergent des pratiques des individus. Ils ne sont pas considérés comme indépendants des personnes, du langage utilisé pour les décrire ou de leurs représentations. C'est pourquoi, pour Radford (2011), il est incorrect de dire que l'accès aux objets n'est possible que grâce à leurs représentations, comme plusieurs auteurs le soulignaient jusqu'à présent (Duval, 2000; Sfard, 2000; Vlassis, 2010). En effet, dans cette perspective, la composante sociale et communicationnelle est absente des objets mathématiques. Or, pour Radford (2011), l'accès à ces objets n'est pas qu'une question de représentation; bien plus, cet accès n'est possible que par l'activité sociale et médiatisée qui le sollicite.

On pourrait résumer l'interdépendance des objets, des représentations et des interactions sociales à travers le modèle de l'apprentissage en mathématiques présenté dans la figure 1 ci-dessous :

Figure 1. **Modèle de l'apprentissage en mathématiques basé sur les principes de Radford (2008)**



Selon ce modèle, les apprentissages émergeront d'activités orientées vers un but dans lesquelles la communication et les interactions sociales médiatisées par le discours permettent aux élèves de donner du sens aux objets mathématiques en étroite relation avec leurs représentations et les symboles. Ces interactions sociales sont déterminantes dans l'élaboration d'un processus réciproque d'objectivation-symbolisation. Afin de montrer que l'objet n'est pas fixé une fois pour toutes, mais est constitué de plusieurs couches de généralités, de nouvelles activités ou questions seront nécessaires pour permettre aux élèves de progresser vers une abstraction plus grande. Dans cette perspective de l'apprentissage des mathématiques, où les interactions sociales occupent une place essentielle, le rôle de l'enseignant ou de l'enseignante et, donc, des interactions enseignant/enseignante-élèves, devient un objet crucial d'attention. Les sections suivantes développent l'importance de ces interactions et précisent leur rôle et leur nature.

LES INTERACTIONS ENSEIGNANT/ENSEIGNANTE-ÉLÈVES

Le rôle de l'enseignant ou de l'enseignante

Cette progression vers l'abstraction est rarement spontanée même au départ d'une activité pensée selon une trajectoire d'apprentissage, comme dans les situations adidactiques, par exemple (Brousseau et Balachef, 1998). Ainsi, le rôle de l'enseignant ou de l'enseignante est déterminant. Or, dans les situations adidactiques, ce sont souvent les interactions entre les élèves et le milieu qui sont mises en avant, avec l'idée que c'est du milieu que naîtront les connaissances visées par l'enseignant ou l'enseignante. À ce sujet, Schneider et Mercier (2005, p. 2) rappellent les principes suivants :

> Un jeu adidactique met donc en interaction des joueurs et un milieu. Il doit permettre aux élèves (comme joueurs du jeu) de situer leurs stratégies de jeu sans se référer aux attentes supposées du professeur mais, c'est le paradoxe de la dévolution, si le contrat est passé à propos d'un milieu bien choisi, les stratégies des élèves dans leurs interactions avec ce milieu seront les connaissances attendues par le professeur.

Sur la base des réflexions qui précèdent, nous postulons au contraire que ces connaissances ne pourront naître d'un milieu, aussi bien choisi fût-il, sans l'intervention de l'enseignant; de notre point de vue, les interactions enseignant/enseignante-élèves sont incontournables dans la mesure où c'est l'enseignant ou l'enseignante qui « voit » les objets conceptuels en jeu, et non les élèves, ce qui définit une relation asymétrique entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves (Radford, 2008). Il est donc de la responsabilité de l'enseignant ou l'enseignante de structurer les échanges avec les élèves en vue de donner du sens aux objets conceptuels. Gravemeijer *et al.* (2000) définissent à ce sujet un rôle « proactif » pour l'enseignant ou l'enseignante. Cela signifie que ces derniers doivent pouvoir tirer parti des contributions des élèves pour réaliser les finalités du curriculum. Ils guident l'évolution de la classe sans perdre de vue les objectifs mathématiques. Ce processus s'effectue à travers des négociations continuelles entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves, selon un processus de mathématisation progressive dans lequel le symbolisme et le raisonnement des élèves font l'objet d'une négociation explicite. Dans ce type d'approche, l'enseignant ou l'enseignante est le représentant ou la représentante de la culture mathématique et, à ce titre, doit prendre part au discours de la classe, non seulement comme guide lorsque le processus s'éloigne des intentions originales, mais aussi comme participant ou participante, suggérant des solutions possibles, des stratégies, des concepts, des questions et des objections. Il est en effet de la responsabilité de l'enseignant ou de l'enseignante d'introduire dans le discours de nouveaux éléments mathématiques qui n'auraient pu être découverts par les élèves eux-mêmes.

Les activités de classe seront donc envisagées à travers la lunette des processus d'interactions multiples dans lesquelles élèves et enseignant ou enseignante cocontribuent au développement du sens à travers leur discours oral ou écrit et l'activité partagée (Ellis, 2011). L'apprentissage émergera donc de pratiques collectives enracinées dans une communauté et se développera à travers des expériences médiatisées par les interactions sociales, le langage et les artefacts (Ellis, 2011).

L'importance des interactions enseignant/enseignante-élèves dans les activités de classe

Quand on parle d'activités de classe, Radford (2016) établit une distinction entre l'activité planifiée *a priori* et l'activité telle qu'elle se déroule effectivement. Pour lui, une activité ne peut être réduite à sa description sur papier, comme une symphonie ne peut être réduite à sa partition. Pour Radford (2016), l'activité décrite sur le papier est de l'ordre du *général*, mais les objets mathématiques ne deviendront objets de conscience, de perception et de pensée que lorsque ce *général* sera mis en mouvement pour le transformer en quelque chose de visible, de *singulier*. Ce *singulier* est la mise en œuvre du *général* à travers la médiation de l'activité humaine. Ainsi, au départ d'un même *général* (c'est-à-dire la description écrite de l'activité), l'activité qui se déroule dans la classe pourra aboutir à des *singuliers* très différents, selon l'engagement des élèves et des enseignants ou des enseignantes dans les débats, la gestion des accords et des désaccords, etc., selon, finalement, la richesse et la qualité des interactions qui s'établiront au sein de la classe.

Ces réflexions nous conduisent à envisager une trajectoire d'enseignement-apprentissage (Warren et Cooper, 2009) plutôt qu'une trajectoire d'apprentissage uniquement. Selon Warren et Cooper (2009), bien que les deux perspectives aient de nombreux points communs, les principales différences résident dans l'importance qu'elles accordent à l'acte d'enseigner dans le processus d'apprentissage. Du premier point de vue, l'apprentissage consiste en une série de progressions développementales naturelles identifiées dans des modèles empiriques de la pensée et de l'apprentissage des enfants. L'enseignement est secondaire à l'acte d'apprentissage et consiste en la mise en œuvre de tâches pédagogiques destinées à engendrer ce développement, comme dans des situations de type adidactique évoquées précédemment. En revanche, la trajectoire d'enseignement-apprentissage inclut non seulement une trajectoire d'apprentissage qui donne un aperçu du processus d'apprentissage des élèves, mais également, une trajectoire d'enseignement qui décrit comment l'enseignement peut efficacement établir des liens avec le processus d'apprentissage et le stimuler.

Ainsi, pour que le *général* d'une activité aboutisse à un *singulier* « réussi » (c'est-à-dire lorsque les élèves parviennent à donner sens aux objets mathématiques), il est nécessaire d'envisager la qualité des interactions enseignant/enseignante-élèves, au même titre que la préparation et l'analyse *a priori* d'une activité.

Les interactions enseignant/enseignante-élèves dans les activités de généralisation

Si les interactions enseignant/enseignante-élèves sont essentielles pour les apprentissages mathématiques (Ellis, 2011; Piccolo *et al.*, 2008), encore convient-il d'identifier les types d'interaction efficaces. Selon Piccolo *et al.* (2008), puisque le discours de la classe est fréquemment lancé par des questions, une étroite relation entre le questionnement et l'apprentissage peut être supposée. Ces auteurs soulignent que le potentiel pour développer un discours riche et significatif peut se produire quand l'enseignant ou l'enseignante pose des questions relatives au processus de pensée impliqué dans la résolution d'un problème, ou encore quand il engage les élèves à se demander s'il existe une autre manière de résoudre le problème. Les enseignants ou les enseignantes peuvent donc stimuler le développement du savoir à travers la manière de poser des questions ou d'y répondre.

Activités de généralisation, pensée algébrique et difficultés des élèves

Dans cet article, nous concrétisons cette problématique dans le cas des activités de généralisation au départ de motifs (*patterns*) figuratifs (Vlassis, Demonty et Squalli, 2017), et en particulier dans le cas d'une situation, bien connue, du carré bordé (Bednarz, 2005; Coulange et Grugeon, 2008; Demonty et Vlassis, 2018) que nous présentons dans la suite. Dans les activités de généralisation, les élèves sont invités à produire une expression algébrique pour généraliser un processus. Cet environnement est considéré comme potentiellement riche pour développer la pensée algébrique, caractérisée d'une part par un raisonnement analytique consistant à raisonner en partant d'une indéterminée (Radford 2008), et d'autre part par un sens donné à l'égalité et aux opérations (Demonty, 2017).

Cependant, tout en étant une composante cruciale de l'activité mathématique, la généralisation représente parfois un obstacle difficile à surmonter par les élèves et un processus complexe à soutenir efficacement par les enseignants et les enseignantes. En effet, des études ont montré les difficultés des élèves à développer des expressions générales correctes (Ellis, 2011; Radford, 2008; Squalli, 2015). Pour résoudre ce type de situation, les élèves sont en effet confrontés à un certain nombre de défis : ils doivent identifier les invariants adéquats récurrents dans les différents motifs ou, encore, une fois ceux-ci identifiés, les étendre à d'autres cas (extension du domaine de référence) (Dörfler, 1991; Vlassis, Demonty et Squalli, 2017) en vue de généraliser. Les élèves ont besoin d'être guidés à reconnaître ce qui est pertinent dans les situations et à travers elles. Au bout du compte, pour Olive et Caglayan (2007), surmonter ces difficultés requiert, de la part des élèves, un changement important dans leur façon de penser et, pour l'enseignant ou l'enseignante, dans la manière de concevoir des situations pédagogiques accompagnées d'un étayage efficace.

Les interactions enseignant/enseignante-élèves dans les activités de généralisation

Ellis (2011) a mis en évidence un certain nombre d'actions précises et potentiellement efficaces pour soutenir la généralisation. Elle a identifié sept grandes catégories d'intervention. Il s'agit par exemple d'encourager à généraliser sur la base de la mise en relation de plusieurs éléments, de la recherche d'une structure, ou encore d'une extension à d'autres cas (extension du domaine de référence), etc., ou encore d'encourager à justifier et à clarifier, ou d'attirer l'attention sur les relations mathématiques, etc.

Lannin, Barker et Townsend (2006) ont également mis en évidence l'importance des interactions entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves en tant qu'un des facteurs influençant le développement de stratégies de généralisation chez les élèves. Parmi les interactions entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves, ils pointent en particulier les interventions suivantes : demander aux élèves d'examiner si leurs généralisations s'appliquent à tous les cas observés et de justifier pourquoi; encourager les élèves à discuter des avantages et des limites de leurs stratégies; et les inviter à établir des relations entre leurs généralisations et des représentations géométriques.

Dans cette perspective, Callejo et Zapatera (2017) évoquent l'idée de baser ces interactions sur un *professional noticing*, qui renvoie à une observation professionnelle reposant sur la capacité à la fois d'identifier les éléments mathématiques signifiants et d'interpréter la compréhension mathématique des élèves dans une situation donnée. Ces auteurs soutiennent que les enseignants expérimentés peuvent aller au-delà des réactions de routine et réagir de façon plus professionnelle en se basant sur la *pensée mathématique* des élèves.

Ainsi, ce *professional noticing* implique d'aller plus loin que les interventions de l'enseignant que nous venons d'évoquer. En effet, s'il convient indiscutablement d'encourager les élèves à généraliser, à justifier, à discuter des avantages et des limites des stratégies, etc., encore convient-il, selon ces auteurs, de baser ces interventions sur l'observation des éléments signifiants du discours des élèves et surtout sur son interprétation. À cette fin, Jacobs *et al.* (2010, dans Callejo et Zapatera, 2016) invitent à s'intéresser à un aspect particulier du *professional noticing*, en l'occurrence la *pensée mathématique* des élèves. Selon ces auteurs, il s'agit plus que d'une simple prise en compte des idées des élèves. Cette capacité se compose en effet de trois compétences interdépendantes : (1) décrire les stratégies utilisées par les élèves; (2) interpréter la compréhension des élèves; et (3) décider comment réagir en fonction de la compréhension des élèves.

Dans la suite, nous illustrons ces propos théoriques à travers les types d'interaction enseignant/enseignante-élèves émergeant d'une activité de généralisation.

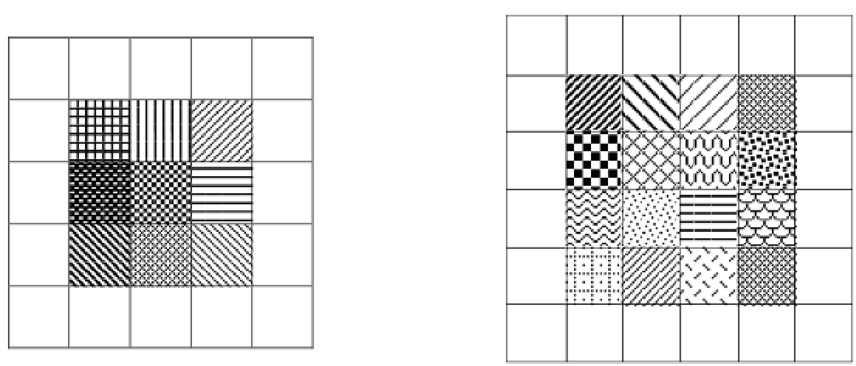
ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

Description de l'activité de généralisation *Antoine fait des mosaïques*

Nous avons expérimenté une activité de généralisation, intitulée *Antoine fait des mosaïques*, sur la base d'une situation bien connue, celle du carré bordé (Bednarz, 2005; Coulange et Grugeon, 2008; Demonty et Vlassis, 2018). Celle-ci se base sur des motifs picturaux, en l'occurrence une mosaïque composée de carrés colorés à l'intérieur avec une bordure de carrés blancs. Des modèles de cette situation sont présentés dans la figure 2. Les objets conceptuels en jeu dans cette activité sont, pour l'essentiel, la formule et la variable, l'égalité et le sens des opérations.

La figure 2 ci-dessous présente deux mosaïques données en exemple aux élèves.

Figure 2. **Deux modèles présentés aux élèves dans *Antoine fait des mosaïques***



Le questionnement consistait à demander aux élèves de trouver un moyen pour déterminer le nombre de carrés blancs en bordure, quel que soit le nombre de carrés colorés. La situation envisageait une progression dans le questionnement : Les élèves étaient d'abord amenés à établir le nombre de carrés blancs en bordure (n = 5 avec n = nombre de carrés colorés sur un côté) à l'aide de matériel concret (petits cubes) (question 1). Les élèves étaient ensuite invités à produire un calcul d'abord pour une petite quantité de carrés (n = 7) (question 2), puis pour une plus grande quantité (n = 32) (question 3). Enfin, les élèves devaient trouver un message général exprimé d'abord en langage ordinaire (question 4), puis mathématique (question 5). Plusieurs formules pouvaient émerger selon différentes visualisations du schéma.

L'activité a été ainsi structurée selon une *chaîne de signification* (Gravemeijer *et al.*, 2000; Presmeg, 2006; Vlassis et Demonty, 2018), c'est-à-dire selon plusieurs étapes de symbolisation en relation avec une évolution de la conceptualisation (objectivation).

Contexte d'implémentation de l'activité

L'activité a été proposée dans deux classes de secondaire technique du Luxembourg, l'une de grade 7 avec 14 élèves et l'autre de grade 8 avec 20 élèves. Cette situation était une première pour les élèves des deux niveaux scolaires. Si les élèves de grade 8 suivaient un cours d'algèbre depuis près d'un an et avaient été initiés dans ce contexte à la résolution des équations et aux techniques algébriques – ils maîtrisaient donc l'algèbre impliquée dans l'activité –, les élèves de la classe de grade 7 n'avaient reçu aucun enseignement de l'algèbre. Pour soutenir les premières actions des élèves, les deux enseignantes avaient mis à leur disposition du matériel concret pour représenter les mosaïques.

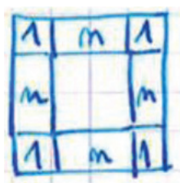
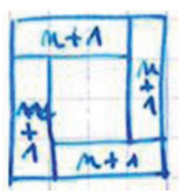
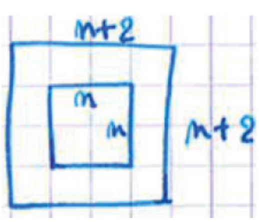
Deux moments ont été planifiés dans les deux classes. Tout d'abord, deux périodes (2 ◊ 50') ont été consacrées au travail en groupes pour répondre aux questions de l'activité, puis deux autres périodes (2 ◊ 50') ont été consacrées à la mise en commun. Nos analyses sont issues des deux premières périodes, où les élèves travaillaient en groupes. Dans chacune des deux classes, les enseignantes passaient dans les groupes et aidaient ceux qui étaient en difficulté. Les enseignantes n'ont donné que très peu de consignes concernant la tâche à réaliser, si ce n'est celles liées à l'organisation. Les élèves des deux classes étaient répartis en groupes de deux ou trois.

Les données ont été collectées sur la base des productions écrites des différents groupes d'élèves et des enregistrements audio ou vidéo des interactions dans les différents groupes.

Les démarches des élèves dans l'activité *Antoine fait des mosaïques*

Afin de comprendre les extraits présentés dans la suite, le tableau 1 présente les 4 types de généralisation produits par l'ensemble des élèves.

Tableau 1. **Les 4 types de généralisation produits par les élèves dans l'activité *Antoine fait des mosaïques***

		Description	Formule
1		Prendre quatre fois le nombre de carrés de couleur sur un côté et ajouter les quatre carrés des coins.	$4n + 4$*
2		Prendre quatre fois le nombre de carrés de couleur sur un côté plus un.	$4(n + 1)$
3		Prendre deux fois le nombre de carrés de couleur sur un côté plus deux. Au nombre obtenu, ajouter deux fois le nombre de carrés de couleur sur un côté.	$2(n + 2) + 2n$
4		Différence des aires : calculer l'aire du grand carré en prenant le carré du nombre de carrés de couleur sur un côté plus deux. Calculer l'aire du petit carré coloré en prenant le carré du nombre de carrés de couleur sur un côté, puis soustraire ce résultat du précédent.	$(n + 2)^2 - n^2$

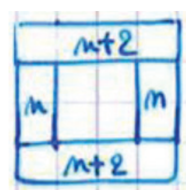
De nombreux groupes ont rencontré des difficultés pour produire ces généralisations, notamment dans l'identification des *invariants* adéquats, ou encore dans *l'extension du domaine de référence* (Squalli, 2015; Vlassis, Demonty et Squalli, 2017). Pour les élèves de grade 7, cette situation était également l'occasion d'apprendre à exprimer la généralisation algébriquement à l'aide d'une formule. La section ci-dessous présente deux extraits des interactions enseignant/enseignante-élèves et les commentent à la lumière des éléments théoriques évoqués plus haut. Ces extraits ont été choisis parce qu'ils étaient emblématiques des difficultés rencontrées par les élèves des deux classes et du type d'intervention de l'enseignante.

ANALYSE DES INTERACTIONS ENSEIGNANT/ENSEIGNANTE-ÉLÈVES OBSERVÉES DANS L'ACTIVITÉ DE GÉNÉRALISATION *ANTOINE FAIT DES MOSAÏQUES*

Voici deux exemples qui illustrent à la fois les difficultés évoquées précédemment, mais aussi les interventions de l'enseignante pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés.

• Exemple 1 (dans la classe de grade 8)

L'exemple 1 est basé sur la démarche de type 2 (voir tableau 1) :



Les élèves de ce groupe (grade 8) éprouvent d'importantes difficultés à trouver les invariants adéquats de la figure pour répondre à la question 2 (avec 7 carrés colorés de côté). Leur solution consiste à compter les carrés blancs sur un côté (correspondant à $n + 2$ sur le dessin ci-dessus) et à multiplier par 4, comme pour faire le périmètre. Ils obtiennent 36 (9 × 4) qui est une réponse erronée puisque les carrés des coins sont comptés deux fois. Les élèves ne pensent pas à valider leur solution par le comptage (encore possible à cette question). La figure 3 présente les interactions entre les élèves (E) et l'enseignante (P).

Figure 3. **Retranscription d'une interaction entre l'enseignant et un groupe d'élèves (Grade 8)**

1	E1	On a fait 36, Madame.
2	P	Mais les 36, vous les aviez calculés, si j'ai bien compris, parce que vous aviez 9, 9 et encore 9 et encore 9. Mais avec les 5 si on comptait 7 + 7 + 7 + 7, ça faisait 28, et vous aviez pourtant compté 24. [P. montre sur le modèle avec les carrés autocollants réalisés à la question 1 (5 carrés colorés)]. Qu'est-ce qui se passe ?
3	E3	On a compté les carrés [E3 montre les côtés du carré de 5].
4	P	Vous aviez compté, ça c'est juste. Vous arriviez à 24, ça s'est bon. Mais si on fait 7 x 4, on a 28. Alors, je me demande pourquoi on a 28 quand on fait 7 x 4, alors que dans la réalité, quand on compte, on a 24 carrés blancs.
5		[pause 8 secondes]
6	E3	Là il y a quelque chose qui cloche…
7	E2	On a compté 9 … euh…
8	P	Allez où sont les 9 ? Vous avez 9 [P. montre un côté], et là vous avez 9 [P. montre le côté opposé]. On va barrer ce qui est déjà compté. Qu'est-ce qui reste encore à compter ? [P. barre les carrés des deux côtés]
9	E1	Les deux-là [E1 montre les côtés opposés non barrés]
10	P	Ca fait combien?
11	E1	Là ça fait 1, 2, 3, 4… [E1 montre un côté non barré mais compte le carré du coin qui est pourtant déjà barré]
12	P	Tu l'as déjà compté celui-là […]
13	E1	Alors on fait 9 fois 4
14	P	C'est pareil … on va regarder à nouveau ce qui est compté: 9 et 9 ça on a déjà compté [P. barre à nouveau les côtés du carré]. Qu'est-ce qui reste à compter ?
15	E1	Ca … [E1 montre à nouveau un côté non pris en considération dans le comptage mais en pointant à nouveau un des coins déjà comptés]
16	P	Ça vous l'avez déjà compté …
17	E2	… C'est 7
18	P	Oui, vous comprenez ? Vous aviez déjà compté ça. [C'est seulement à partir de là que les élèves ont pu produire le calcul correct 9 + 9 + 7 + 7]

Cet extrait montre les difficultés pour l'enseignante de faire comprendre aux élèves leur erreur, élèves qui ne voyaient pas pourquoi leur calcul était incorrect. Il faudra plusieurs interventions de l'enseignante pour que les élèves parviennent à rédiger le calcul correct. Les interventions efficaces ont consisté à attirer l'attention sur les relations mathématiques (représentations) (Ellis, 2011). Plus particulièrement, connecter aux représentations géométriques (Lannin *et al.*, 2006) (lignes 2, 4, 8 et 14) et encourager à justifier (Ellis, 2011) ont permis aux élèves de progresser (lignes 2 et 4).

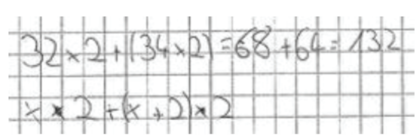
• Exemple 2 (dans la classe de grade 7)

L'exemple 2 est basé sur la même démarche que l'extrait de la figure 3. La figure 4 présente les interactions entre les élèves (E) et l'enseignante (P). Dans ce cas, l'enseignante intervient au moment de la généralisation en langage mathématique (question 5). Comme les élèves sont en grade 7, ils sont perplexes face à la question. L'enseignante guide la réflexion à partir de l'opération produite pour répondre à la question 3 (pour 32 carrés colorés de côté).

Figure 4. **Retranscription d'une interaction entre l'enseignant et un groupe d'élèves (Grade 7)**

1	P	Et si j'avais mis 180, quel calcul est-ce qu'on devrait faire ?
2	E2	180 fois 2 plus 182 fois 2
3	P	Et maintenant, si on veut une formule qui fonctionne avec n'importe quel nombre de carrés de couleur, comment trouver une formule qui va marcher dans tous les cas ?
4	E2	… avec des phrases ?
5	E1	… on peut aussi faire des calculs ici pour expliquer …
6	P	Vous n'êtes pas loin de trouver la formule parce que là le calcul il est juste, il faut juste remplacer le 32 et le 34 par quelque chose qui fait que ça marche tout le temps … si je prenais le 200, on va appliquer la formule, si je prenais 500 ça marcherait aussi
7	E2	Alors on fait *x* fois 2
8	P	Oui … très bien *x* fois 2…
9	E1	Ah oui … *x* fois 2 et après …
10	E2	… oui … plus
11	P	Tu continues la formule, très bien …
12	E1	… plus *x* fois 4, euh fois 2 aussi
13	E2	*x* fois non … plus 4
14	P	Non le 34, il a quel lien avec le 32 ?
15	E2	plus 2… alors plus *x* plus 2
16	P	Bien
17	E2	… fois 2
18	E1	Ok , $x \cdot 2$ plus … [E3 écrit la formule juste en-dessous du calcul, après avoir changé les symboles « fois » par un point]

Au bout du compte, sur la base de ces réflexions, les élèves produisent la formule rédigée juste en dessous du calcul, comme présenté ci-dessous :



Guidés par l'enseignante, les élèves parviennent à rédiger une formule. Notons que les élèves hésitent pour exprimer le nombre de carrés blancs sur le grand côté et correspondant, dans leur calcul, au nombre 34 (lignes 12 et 13). Pour les amener à produire $x + 2$, l'enseignante attire leur attention sur le lien entre les nombres 32 et 34 (ligne 14). Cette fois, ce sont surtout les encouragements à généraliser sur la base d'une extension à d'autres cas (Ellis, 2011) qui semblent avoir été efficaces (lignes 1, 3, 6), ainsi que le fait d'attirer l'attention sur les relations mathématiques (Ellis, 2011) (ligne 14).

DISCUSSION

Ces exemples témoignent, d'une part, que le processus de généralisation n'est pas spontané chez les élèves malgré une activité envisagée selon une trajectoire d'apprentissage structurée sur la base d'une chaîne de significations, et, d'autre part, que les interventions de l'enseignant sont incontournables pour amener les élèves à surmonter les obstacles rencontrés. Cependant, on peut s'interroger sur l'efficacité des interventions de l'enseignant, pourtant cohérentes avec les théories d'Ellis (2011) et de Lannin *et al.* (2006), surtout dans l'exemple 1. Est-ce que les élèves ont compris leur erreur? Les dernières interactions rapportées dans cet extrait ne témoignent pas clairement de cette compréhension, même si les élèves rédigent le calcul correct. Dans cet exemple, la difficulté des élèves semble résider dans un glissement de foyer dans l'analyse du dessin (Vlassis, Demonty et Squalli, 2017). Sans s'en rendre compte, ceux-ci sont passés en réalité du dénombrement de carrés en tant qu'unités d'aire, au dénombrement des carrés comme unités de longueur, en l'occurrence des côtés externes des petits carrés dont la somme correspond au périmètre de la mosaïque. Dans cette perspective, les côtés externes des carrés placés aux quatre coins sont bien au nombre de deux. Les interventions de l'enseignante ne pointent pas cette confusion, ce qui peut justifier la difficulté des élèves à comprendre leur erreur. Ce qui manque dans ces interventions, c'est la considération de la pensée mathématique des élèves selon la perspective de Jacobs *et al.* (2010, dans Callejo et Zapatera, 2016), et en particulier la capacité à interpréter la compréhension des élèves. Dans l'exemple 2, les élèves semblent avoir plus facilement surmonté la difficulté posée par la production de la formule et en particulier par l'expression $x + 2$ pour désigner le grand côté au départ du petit côté (x). À ce stade, de nombreux élèves produisent souvent deux inconnues, une pour le grand côté et une pour le petit côté. Cette difficulté, assez répandue, correspond à ce que Duval (2002) appelle « redésignation fonctionnelle », laquelle concerne la nécessité, notamment dans les problèmes impliquant les équations, de choisir une lettre qui permettra de désigner non pas une, mais plusieurs quantités indéterminées de l'énoncé. L'intervention de l'enseignante intègre davantage la pensée mathématique des élèves dans la mesure où elle pointe directement l'origine de la difficulté (« Le 34, il a quel lien avec le 32? »). Les élèves paraissent comprendre rapidement, et l'obstacle semble plus aisément surmontable que dans l'exemple 1. Il faudra sans doute plusieurs situations et interventions de l'enseignante pour amener les élèves à véritablement assimiler cette redésignation fonctionnelle.

CONCLUSIONS

Notre article visait à approfondir, en partant des travaux de Radford, le processus d'apprentissage des mathématiques. Il a proposé un modèle présentant une articulation entre trois composantes consubstantielles à l'apprentissage que sont les symboles, les objets mathématiques et les interactions sociales. L'importance des interactions entre l'enseignant et les élèves a été précisée et illustrée dans le contexte d'une activité de généralisation. Les exemples ont montré qu'il ne suffit pas à un enseignant de stimuler la réflexion des élèves en les encourageant à justifier leurs stratégies, à établir des mises en relation ou encore à partager leurs idées, mais qu'il convient également de développer un *professional noticing* impliquant de s'intéresser à la pensée mathématique des élèves selon le modèle de Jacobs *et al.* (2010, dans Callejo et Zapareto, 2016). Cet article ne présente pas réellement de données empiriques pour étayer son propos, il s'agit davantage d'une réflexion théorique, mais nos analyses montrent qu'il s'agit là d'une problématique cruciale pour les apprentissages des élèves, et qu'il conviendrait d'approfondir davantage. Les analyses témoignent de l'importance des interactions enseignant/enseignante-élèves, parfois sous-estimées, comme dans le cas des situations adidactiques. Pour Radford (2008), l'émergence, lors des interactions enseignant/enseignante-élèves, des objets mathématiques, comme, par exemple, la formule pour généraliser un phénomène, représente plus qu'un échange de points de vue. Dans le cas des deux exemples présentés plus haut, les élèves sont parvenus, même de manière encore imparfaite (surtout dans l'exemple 1), à surmonter les obstacles dans le cadre d'une interaction conjointe entre l'élève et l'enseignant ou l'enseignante. Ce type de relation présente une profonde valeur épistémique. Il s'agit en effet d'un processus complexe et dialectique dans lequel le processus d'apprentissage est étroitement imbriqué dans celui d'enseignement. Ceci permet de souligner l'importance de définir des trajectoires d'enseignement-apprentissage, plutôt que d'apprentissage seulement, ainsi que nous l'avons développé précédemment.

Ces constats conduisent à envisager des programmes de développement professionnel qui iraient au-delà de la diffusion d'environnements significatifs, ou encore de connaissances, pour un enseignement ciblée sur la pensée mathématique des élèves (Demonty, 2017). Ces composantes à elles seules sont nécessaires, mais pas suffisantes. Il conviendrait de les intégrer dans un modèle de développement professionnel qui ciblerait en particulier la capacité des enseignants et des enseignantes à développer des interactions efficaces avec les élèves (Ellis, 2011), le tout selon un processus dynamique où alterneraient des moments de réflexions et d'essais dans les classes, ciblés en particulier sur les interactions enseignant/enseignante-élèves.

Références bibliographiques

BEDNARZ, N. (2005). Parler les mathématiques. *Vie pédagogique*, *136*, 20-23.

BROUSSEAU, G. et BALACHEFF, N. (1998). *Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La pensée sauvage.

CALLEJO, M. L. et ZAPATERA, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(4), 309-333.

COULANGE, L. et GRUGEON, B. (2008). Pratiques enseignantes et transmissions de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, 78, 5-23.

DEMONTY, I. (2017). *Regard croisé sur le développement de la pensée algébrique : entre raisonnements des élèves et connaissances des enseignants* (Thèse de doctorat). Université de Liège.

DEMONTY, I. et VLASSIS, J. (2018). *Développer l'articulation arithmétique entre le primaire et le secondaire*. Bruxelles : Van In-De Boeck.

DÖRFLER, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. Dans A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen et J. Van Dormolen (dir.), *Mathematical knowledge : its growth through teaching* (p. 63-85). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

DUVAL, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. Dans T. Nakahara et M. Koyama (dir.), *Proceedings of the Twenty-fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 55-69). Hiroshima: University of Hiroshima.

ELLIS, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(4), 308-345.

FAGNANT, A. (2008). Résoudre et symboliser des problèmes additifs et soustractifs. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte et J. Grégoire (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques?* (p. 131-150). Bruxelles : De Boeck.

FONT, V., GODINO, J. D. et GALLARDO, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97-124.

GRAVEMEIJER, K., COBB, P., BOWERS, J. et WHITENACK, J. (2000). Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education. Dans P. Cobb, E. Yackel et K McClain (dir.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (p. 225-274). Mahwah : Lawrence Erlbaum Associates.

KIERAN, C. (2007). Learning and teaching algebra in the middle school through college levels. Dans F. K. Lester Jr (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 707-762). É.-U. : National council of teachers of mathematics.

KIERAN, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(13), 187-228.

KIERAN, C. (1992). The learning and the teaching of school algebra. Dans D. Grouws (dir.), *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New York : Mac Millan.

LANNIN, J., BARKER, D. et TOWNSEND, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3-28.

IISKALA, T., VAURAS, M., LEHTINEN, E. et SALONEN, P. (2011). Socially shared metacognition of dyads of pupils in collaborative mathematical problem-solving processes. *Learning and instruction*, *21*(3), 379-393.

Ministère de la Communauté française de Belgique (1999). *Socles de compétences : enseignement fondamental et premier degré de l'Enseignement secondaire.* Bruxelles : Auteur.

Ministère de l'Éducation nationale (2011). *Plan d'études de l'école fondamentale.* Grand Duché du Luxembourg : Auteur.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2006). *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 6e année.* Toronto : Ministère de l'Éducation.

OLIVE, J. et CAĞLAYAN, G. (2007). From arithmetic reasoning to algebraic reasoning: Problems of representation and interpretation of systems of linear equations in a middle school classroom. Dans Lamberg, T. et Wiest, L. R. (dir.), *Proceedings of the 29th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations* (p. 194-197). Stateline (Lake Tahoe) : University of Nevada.

PRESMEG, N. (2006). Semiotics and the "connections" standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 163-182.

PICCOLO, D. L., HARBAUGH, A. P., CARTER, T. A., CAPRARO, M. M. et CAPRARO, R. M. (2008). Quality of Instruction: Examining Discourse in Middle School Mathematics Instruction. *Journal of Advanced Academics*, *19*(3), 376-410.

RADFORD, L. (2016). Mathematics and Mathematics classroom activity through the lens of a metaphor. Dans M. Iori (dir.), *La Matematica e la sua Didattica/ Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore* (p. 439-446). Bologna : Pitagora Editrice.

RADFORD, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. *Éléments*, *1*, 1-27.

RADFORD, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. Dans L. Radford, G. Schubring et F. Seeger (dir.), *Semiotics in mathematics education : epistemology, history, classroom, and culture* (p. 215-234). Rotterdam : Sense Publishers.

RADFORD, L. (1998). On signs and representations, a cultural account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *1*, 277-302.

SCHNEIDER, M. et MERCIER, A. (2005). *Situation adidactique, situation didactique, situation-problème : circulation de concepts entre théorie didactique et idéologies pour l'enseignement*. Association francophone internationale de recherche scientifique en éducation, Bordeaux, France.

SFARD, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1-3), 13-57.

SFARD, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being – Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. Dans P. Cobb, E. Yackel et K. McClain (dir.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (p. 37-98). Mahwah : Lawrence Erlbaum Associates.

SQUALLI, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. *Actes de l'Espace Mathématique Francophone*. Alger : Université des sciences et de la technologie Houari-Boumédiène. Repéré à **http://emf2015.usthb.dz/actes.php**

SCHUBAUER-LEONI, M. L. et PERRET-CLERMONT, A. N. (1997). Social interactions and mathematics learning. Dans T. Nunes et P. Bryant (dir.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (vol. 11, p. 265-283). Hove: Psychology Press.

VLASSIS, J. (2010). *Sens et symboles en mathématiques : étude de l'utilisation du signe « moins » dans les réductions polynomiales et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue*. Berne : Peter Lang.

VLASSIS, J. et DEMONTY, I. (2018). Symbolisation and objectivation through social interactions for meaningful learning of mathematics. Dans E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg et L. Sumpter (dir.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, p. 371-378). Umea: University of Umea.

VLASSIS, J., DEMONTY, I. et SQUALLI, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *20*(3), 131-155.

VLASSIS, J., FAGNANT, A. et DEMONTY, I. (2015). Symboliser et conceptualiser, une dialectique intrinsèque aux mathématiques et à leur apprentissage. Dans M. Crahay et M. Dutrevis (dir.), *Psychologie des apprentissages scolaires* (2e éd., p. 221-255). Bruxelles : De Boeck.

VYGOSTSKY, L. (2003). *Pensée et langage*. Paris : La Dispute.

WARREN, E. et COOPER, T. (2009). Developing mathematics understanding and abstraction: The case of equivalence in the elementary years. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 76-95.