

VALEURS EXTRÊMES DES SINISTRES CLIMATIQUES

Daniel Zajdenweber

Volume 69, Number 1, 2001

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/1105356ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/1105356ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0004-6027 (print)

2817-3465 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Zajdenweber, D. (2001). VALEURS EXTRÊMES DES SINISTRES CLIMATIQUES. *Assurances*, 69(1), 33–59. <https://doi.org/10.7202/1105356ar>

Article abstract

Recent climatic catastrophes (windstorms, hurricanes, floods, droughts, freezes, etc) that have struck the developed economies in North America and in Europe, entailed huge losses, some of them amounting to ten billions US\$. The objective of this article is to analyze the statistical distribution of the severity of climatic catastrophes, whatever their origins, while linking it to the probabilistic theory of extreme values. Data published by the *National Oceanic and Atlantic Administration* (NOAA) spanning the last 21 years (1980-2000) on the 48 climatic events that cost at least one billion US\$ in the United States, show that there is a good fit between theory and empirical evidences. The statistical distribution belongs to the Pareto type without expectation. In other words, the average value of climatic losses depends on the value of the largest potential loss, that is the largest economic value exposed to any climatic event.

After a brief recall on the theory of extreme values, this article analyzes the nature of the statistical distribution and estimates its parameters. It describes the consequences of this particular loss distribution on the valuation of "weather catastrophe" insurance policies, and it proposes a kind of "catbond" that could cope with extremely large losses.

VALEURS EXTRÊMES DES SINISTRES CLIMATIQUES

par Daniel Zajdenweber

RÉSUMÉ

Les récentes catastrophes d'origine climatique (tempêtes, ouragans, inondations, sécheresses, gels etc.), qui ont frappé les économies développées d'Amérique du Nord et d'Europe, ont entraîné des dommages considérables, qui se sont élevés parfois à plusieurs dizaines de milliards de US\$. L'objet de l'article est d'analyser la distribution statistique de la sévérité des catastrophes climatiques, toutes origines confondues, en la reliant à la théorie probabiliste des valeurs extrêmes. Les données des 21 dernières années (1980-2000), publiées par la *National Oceanic and Atlantic Administration* (NOAA), montrent qu'en ce qui concerne le territoire des États-Unis, il y a une parfaite adéquation entre la théorie et la distribution empirique des 48 événements ayant coûté chacun au moins un milliard de US\$. La nature de cette distribution appartient au type Pareto sans espérance mathématique. Autrement dit, la valeur moyenne des dommages d'origine climatique dépend surtout de la borne supérieure des sinistres concevables, c'est-à-dire de la valeur économique la plus élevée exposée à un événement climatique quelconque.

Après un rappel sur la théorie des valeurs extrêmes, l'article analyse la nature de la distribution des dommages et estime ses paramètres. Il analyse ensuite les conséquences quant à l'évaluation des contrats d'assurance « catastrophes climatiques ». Il suggère enfin un mode de financement des assurances « catastrophes climatiques ».

Mots clés : Catastrophes climatiques, distribution d'extrêmes, distributions de Fréchet, de Pareto, espérance infinie, estimateur de Hill, obligations catastrophes (catbonds), queues de distribution « épaisses ».

ABSTRACT

Recent climatic catastrophes (windstorms, hurricanes, floods, droughts, freezes, etc) that have struck the developed economies in North America and in Europe, entailed huge losses, some of them amounting to ten billions US\$. The objective of this article is to analyze the statistical distribution of the severity of climatic catastrophes, whatever

L'auteur :

Daniel Zajdenweber est professeur de finance à l'Université de Paris-X, Nanterre.

their origins, while linking it to the probabilistic theory of extreme values. Data published by the National Oceanic and Atlantic Administration (NOAA) spanning the last 21 years (1980-2000) on the 48 climatic events that cost at least one billion US\$ in the United States, show that there is a good fit between theory and empirical evidences. The statistical distribution belongs to the Pareto type without expectation. In other words, the average value of climatic losses depends on the value of the largest potential loss, that is the largest economic value exposed to any climatic event.

After a brief recall on the theory of extreme values, this article analyzes the nature of the statistical distribution and estimates its parameters. It describes the consequences of this particular loss distribution on the valuation of « weather catastrophe » insurance policies, and it proposes a kind of « catbond » that could cope with extremely large losses.

Keywords : *Extreme distributions, catbond, fat tail, Fréchet distribution, Hill estimator, infinite expectation, Pareto distribution, weather catastrophes.*

■ INTRODUCTION

Les catastrophes d'origine climatique (tempêtes, ouragans, inondations, sécheresses et vagues de chaleur, tempêtes de grêle, de neige, gelées, etc.), sont les catastrophes les plus fréquentes, loin devant les catastrophes d'origine tellurique (tremblements de terre, éruptions volcaniques et tsunamis). Rien qu'en 1999, il y a eu, de par le monde, douze catastrophes d'origine climatique qui ont coûté, tous dommages confondus, entre \$ 434 millions (tempête de grêle aux États-Unis, le 13 janvier) et 6,25 milliards de dollars (tempête Lothar en Europe, le 25 décembre), contre seulement deux tremblements de terre, l'un en Turquie, le 17 août, l'autre à Taïwan, le 20 septembre, qui ont coûté respectivement 2,72 milliards de dollars et 1,37 milliard (FFSA, 2000)¹. De même, à l'échelle sensiblement plus petite des États-Unis et du Canada, entre 1980 et 2000, il y a eu 49 catastrophes majeures d'origine climatique qui ont coûté au moins un milliard, 48 aux États-Unis et une au Canada (tempête de glace de janvier 1998) (NOAA, 2000 et Moreau, 1998), alors qu'au cours de la même période, il n'y a eu que deux tremblements de terre catastrophiques, en 1989 et en 1994, tous deux aux États-Unis. Parallèlement à cette prévalence des catastrophes climatiques, on observe dans le monde entier une forte augmentation du montant annuel des dommages naturels assurés indemnisés, toutes origines confondues. Depuis 1970, ils connaissent un taux de croissance annuel moyen de 8% hors inflation (SwissRe, 2000).

L'objectif principal de cet article est d'évaluer les probabilités annuelles des sinistres du type « catastrophe climatique », assurés

ou non, ainsi que leur valeur actuarielle. Autrement dit, l'objectif de cet article est de fournir une méthodologie statistique et probabiliste d'évaluation des risques climatiques relativement peu fréquents, dont les conséquences économiques sont considérables. Les données empiriques proviennent pour l'essentiel des États-Unis, d'une part parce que ce pays est confronté à de nombreux événements climatiques catastrophiques et qu'il dispose de plusieurs sources de données fiables (*NOAA, American Meteorological Society*), d'autre part parce que le marché américain de l'assurance « non-vie » est le plus important au monde (*SwissRe, 2000*). En raison de leur valeur exemplaire, nous commençons par une présentation de ces données empiriques. Puis, dans une deuxième partie, nous exposons les principaux modèles probabilistes des valeurs extrêmes, lesquels, dans une troisième partie, nous permettent d'analyser les distributions de probabilité des dommages catastrophiques. La quatrième partie utilise ces distributions de probabilité pour évaluer les risques climatiques extrêmes. Dans la cinquième partie, enfin, nous proposons une technique de réassurance compatible avec ce type de distributions de probabilité.

■ I. DONNÉES : CATASTROPHES CLIMATIQUES AUX ÉTATS-UNIS (1980-2000)

La recherche des données sur les coûts des catastrophes climatiques se heurte à deux difficultés statistiques majeures : leur rareté et leur non-stationnarité. Il est en effet souvent impossible de reconstituer des séries chronologiques quantitatives de longue durée à la fois précises et fiables. Dans les meilleurs des cas elles ne dépassent pas le siècle, comme par exemple les séries sur les ouragans sur la côte atlantique des États-Unis (*Pielke et Landsea, 1998*), qui remontent de façon exhaustive jusqu'à 1925, puis jusqu'à 1900 mais avec des lacunes. La rareté des données s'explique le plus souvent par l'inexistence d'organismes chargés d'enregistrer les conséquences économiques des catastrophes. Quant aux séries antérieures au vingtième siècle, elles sont presque toujours issues de travaux d'historiens (*Leroy-Ladurie, 1967*). Malheureusement, si les archives historiques sont parfois très documentées sur le nombre de victimes, car elles sont enregistrées dans des actes écrits et font l'objet de témoignages, elles ne sont pas directement exploitables par l'économiste ou l'assureur, car

elles sont souvent qualitatives et difficiles à transposer en valeurs actuelles (que peuvent signifier des expressions comme « hiver rigoureux », « pluies exceptionnelles » ?). Elles peuvent aider les climatologues et les météorologistes à reconstituer des évolutions climatiques de longue durée, ce qui améliore l'évaluation des risques dans le long terme, mais, à cause de la forte variabilité annuelle des phénomènes climatiques (*Nesme-Ribes et Thuillier, 2000; Changnon et al., 1999; Easterling et al., 1999*), pour ne citer que les publications les plus récentes), elles ne peuvent pas contribuer de façon opérationnelle à l'évaluation des risques annuels, qui constituent la base de la plupart des contrats d'assurance « non-vie ».

Le second obstacle, la non-stationnarité, renforce le premier, puisque si les séries des dommages d'origine climatique étaient stationnaires au sens statistique du terme (moyennes, variances et structures des covariances indépendantes du temps) il suffirait de quelques séries relativement courtes pour estimer leurs lois et leurs paramètres. Ce n'est malheureusement pas le cas. Les assureurs constatent une augmentation tendancielle des montants des dommages par événement et de leurs valeurs totales annuelles, augmentation couplée, depuis une dizaine d'années, à une augmentation de la fréquence annuelle de certains événements climatiques catastrophiques (*SwissRe, 2000; NOAA, 2000*).

Pour obtenir des séries stationnaires exploitables, il convient donc de les corriger de toutes les tendances susceptibles de les affecter. Après l'inflation, relativement aisée à corriger, la première tendance est la croissance économique. Elle augmente la richesse susceptible d'être sinistrée, tout comme elle augmente le nombre de catastrophes dépassant un seuil conventionnel à partir duquel elles sont enregistrées. De fait, dans cet article, la correction de l'inflation est réalisée *après* franchissement du seuil de un milliard de US\$, en dollar courant.

De plus, la croissance s'accompagnant presque toujours d'une concentration croissante des populations et des richesses dans des agglomérations de plus en plus étendues, souvent situées au bord des cours d'eau menacées de crues ou des côtes exposées aux tempêtes et aux ouragans, la sinistralité par événement ne peut qu'augmenter². Malheureusement, rares sont les séries triplement corrigées de l'inflation, de la croissance de la population et de la croissance des richesses exposées aux risques climatiques.

La dernière tendance affectant les séries de dommages n'est pas économique, mais climatique. C'est l'augmentation apparente

de l'amplitude et de la fréquence de certaines catastrophes climatiques. Le débat sur l'évolution récente des climats est au centre des préoccupations des climatologues (*Nesme-Ribes et Thuillier, 2000; Easterling et al., 1999*), des assureurs, des économistes et des hommes politiques (accords de Rio, élaboration de normes d'émission de gaz à effet de serre, instauration d'écotaxes etc.). Le débat est d'autant plus vif que selon la période de référence et selon la série en cause, on observe une tendance à la hausse ou bien une tendance à la baisse, voire pas de tendance. Ainsi, par exemple, la série chronologique des ouragans sur la côte atlantique des États-Unis depuis 1925, corrigée de l'inflation et de la croissance économique, comté par comté (*Pielke et Landsea, 1998*), peut être considérée comme stationnaire tant en intensité et en fréquence des ouragans, qu'en montant des dommages (*Zajdenweber, 2000*). La série chronologique des catastrophes climatiques aux États-Unis ayant coûté au moins un milliard (*NOAA, 2000*), en revanche, présente des comportements moins simples. Elle montre une très forte augmentation de la fréquence des catastrophes depuis une dizaine d'années, mais elle ne présente pas une tendance aussi marquée sur les montants des dommages par événement depuis 1980, ni d'ailleurs sur les montants des dommages totaux annuels, comme le montre le tableau I³. Il recense toutes les catastrophes d'origine climatique aux États-Unis depuis 1980 ayant coûté au moins un milliard en dollar constant.

Le dommage extrême correspond au pire événement de l'année, dont l'origine est qualifiée par une lettre (voir ci-dessous). Les dommages totaux cumulent tous les dommages d'origine climatique de l'année, quels que soient leurs montants.

T : vague de chaleur/sécheresse

H : ouragan (hurricane)

I : inondation

G : gelée

* : chiffre moyen estimé entre deux évaluations, une haute, une basse.

Le contenu de ce tableau illustre toute la complexité de l'évaluation des risques climatiques extrêmes. Il présente deux tendances opposées. La fréquence des catastrophes égales ou supérieures à un milliard augmente sensiblement depuis 1988 ou 1991; en revanche, les montants des dommages par événement (la sévérité), tout comme les dommages totaux annuels, ne présentent

TABLEAU I

Année	Nombre d'événements	Domage extrême (en milliards US\$)	Domages totaux (en milliards US\$)
1980	1	44,0 (T)	44,0
1981	-	-	-
1982	-	-	-
1983	2	5,4 (H)	9,0
1984	-	-	-
1985	3	2,6 (H)	6,8
1986	1	2,0* (T)	2,0
1987	-	-	-
1988	1	56,0 (T)	56,0
1989	2	12,6 (H)	14,0
1990	1	1,3 (I)	1,3
1991	2	3,3 (I)	5,3
1992	3	32,4 (H)	36,8
1993	4	23,1 (I)	30,3
1994	4	3,3 (G)	6,6
1995	5	6,0* (I)	19,9
1996	4	5,0 (H)	12,0
1997	2	3,7 (I)	4,7
1998	7	7,5* (T)	19,3
1999	4	6,0 (H)	9,4
2000	2	4,0 (T)	6,0
Total	48	218,2	283,4

pas de tendance significative. Comme les séries sont corrigées de l'inflation, mais pas de la croissance économique, il se peut fort bien qu'après correction de la croissance économique, il y ait une légère baisse tendancielle des dommages par événement ainsi que des dommages totaux.

Entre 1980 et 1990, la fréquence moyenne est exactement égale à une catastrophe climatique par an. Comme le montre le tableau II, il y a une concordance quasi parfaite entre les fréquences annuelles empiriques et les fréquences théoriques données par une loi de Poisson de moyenne égale à 1, de densité :

$$\text{Prob}(N=n) = e^{-1}/n! \quad [1]$$

Ceci montre que les catastrophes climatiques sont indépendantes entre elles entre 1980 et 1990.

TABLEAU II		
Nombre annuel	Fréquences théoriques	Fréquences observées
0	0,368	0,363
1	0,368	0,363
2	0,184	0,182
3	0,061	0,091

La légère différence entre les deux valeurs concernant la fréquence des années avec trois catastrophes n'est pas significative. En effet, il aurait fallu disposer d'une série d'au moins 16 années pour que la fréquence théorique puisse correspondre à 1 année entière avec 3 catastrophes.

Depuis 1991, en revanche, le nombre annuel moyen de catastrophes passe brutalement à presque 4 par an ($37/10 = 3,7$), avec deux années exceptionnelles, 1995 avec 5 catastrophes et surtout 1998 avec 7 catastrophes, les années sans catastrophe climatique ayant disparu. Il apparaît impossible d'ajuster de façon satisfaisante une quelconque loi de Poisson sur les fréquences annuelles observées, ce qui, par comparaison avec la période immédiatement précédente, est le signe d'un changement de régime dans la distribution du nombre de catastrophes climatiques.

Ce changement de régime est l'un des phénomènes statistiques marquants qui ont amené les assureurs à chercher à évaluer les conséquences d'un éventuel changement climatique, la croissance économique ne pouvant expliquer à elle seule un pareil changement statistique⁴.

Toutefois, en dépit du changement de fréquence des catastrophes climatiques autres que les ouragans, les montants des dommages ne semblent pas beaucoup affectés. Les dommages annuels moyens passent de 12,1 milliards de dollars, de 1980 à 1990, à 15,0 milliards, de 1991 à 2000, ce qui est compatible avec une croissance économique assez faible d'environ 2% par an, tandis que les dommages extrêmes ne présentent pas une tendance significative vers une hausse de leurs valeurs. Avant 1991, il y a eu 3 catastrophes à deux chiffres (deux vagues de chaleur et un ouragan) contre 2 depuis cette date (un ouragan et une inondation).

Mais la caractéristique essentielle qui ressort du tableau I, c'est la part déterminante prise par les 17 catastrophes extrêmes dans le total des dommages. 77% des dommages totaux proviennent d'environ un tiers de toutes les catastrophes climatiques ayant frappé les États-Unis depuis 1980. Certaines années (1980, 1986, 1988 et 1990), la catastrophe extrême représente même la totalité des dommages dus aux catastrophes climatiques de l'année. Pour les assureurs, cette caractéristique signifie que s'ils peuvent évaluer chaque année la probabilité de la catastrophe extrême, ils peuvent évaluer le dommage total dû aux phénomènes climatiques et fixer par là même la valeur des primes d'assurance « catastrophes climatiques ». Il ne s'agit pas d'une coïncidence statistique. La théorie probabiliste des valeurs extrêmes démontre que, compte tenu de la nature des distributions des catastrophes, il en va toujours ainsi.

■ 2. MODÈLES THÉORIQUES DE VALEURS EXTRÊMES

Les données publiées par la NOAA sur les dommages catastrophiques d'origine climatique, agrégées au niveau national, sont au centre des préoccupations des assureurs et des réassureurs, même si elles ne distinguent pas les dommages totaux des dommages indemnisés qui leur sont toujours inférieurs. Les assureurs peuvent être confrontés chaque année à une accumulation de sinistres dus à une même cause. Il peut s'agir, par exemple, d'une sécheresse qui ruine plusieurs milliers d'agriculteurs dans un ou plusieurs États des États-Unis, d'où des dommages totaux catastrophiques, potentiellement illimités, malgré le fait que les polices individuelles ont un montant maximal limité à la valeur des

biens assurés. Les réassureurs sont amenés à indemniser des traités de réassurance en excédent de dommage (« excess of loss ») dès qu'un événement catastrophique dépassant un seuil prédéterminé se réalise. Dans le cas des données de la NOAA, il peut s'agir du seuil agrégé de un milliard, qui est vraisemblablement supérieur au seuil agrégé d'intervention des sociétés de réassurance. Comme les dommages catastrophiques totaux sont principalement dus à un petit nombre de sinistres climatiques, quand, certaines années, ils ne sont pas dus à un seul sinistre, l'analyse de la distribution des dommages extrêmes annuels est fondamentale.

Ainsi posé, le problème s'analyse formellement comme un problème mathématique résolu par Fréchet (1927), Fisher et Tippett (1928), Gnedenko (1943) et Gumbel (1958), pour ne citer que les mathématiciens fondateurs, dans l'ordre chronologique de leurs publications sur ce problème⁵. Chaque valeur annuelle extrême des dommages peut être assimilée à la valeur maximale observée dans un échantillon de n dommages annuels d'origine climatique, la longueur de la série chronologique déterminant le nombre d'échantillons. Plus généralement, soit n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire. Si on s'intéresse aux m plus grandes valeurs observées avec $m < n$, existe-t-il des distributions limites des valeurs extrêmes lorsque $n \rightarrow \infty$? Lesquelles ? Deux théorèmes fondamentaux sont utiles à l'assureur.

Théorème 1

Soit plusieurs échantillons d'observations indépendantes, tirées dans une même population d'origine, dont les valeurs sont données par une variable aléatoire commune *non bornée*⁶. Si on ne retient que la plus grande valeur de chaque échantillon, alors après normalisation et lorsque le nombre d'échantillons tend vers l'infini, il existe deux types de distribution vers lesquels tend la distribution des plus grandes valeurs, et seulement deux : le type Fréchet et le type Gumbel. Ces deux types de distribution ont des comportements extrêmes très différents. Le type Fréchet se comporte comme une distribution de Pareto pour les grandes valeurs de la variable x :

Soit $F(x)$ la fonction de répartition d'une distribution du type Fréchet, on a :

$$1-F(x) \rightarrow Cx^{-\alpha} \text{ Lorsque } x \rightarrow +\infty. \text{ Avec } \alpha > 0 \text{ et } x > x_0 \quad [2]$$

C est une constante de normalisation, α est l'exposant caractéristique. x_0 est la valeur minimale au-dessous de laquelle il n'y a plus de données ou au-dessous de laquelle la distribution

n'est plus une distribution de Pareto. La pratique la plus générale qualifie ce comportement, en fonction puissance de la variable, de comportement du type Pareto. Nous retiendrons ce qualificatif, qui rappelle les travaux pionniers de cet économiste sur la distribution des plus hauts revenus (1896).

Le type Gumbel se comporte comme une fonction exponentielle :

$1-F(x) \rightarrow \exp(-\lambda x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. λ est une constante de normalisation. [3]

La principale différence entre ces deux types de distribution apparaît dans le comportement de la queue de distribution. Le type Pareto a une queue dite « épaisse ». Autrement dit, les probabilités associées aux dommages décroissent lentement lorsque les dommages augmentent, conférant ainsi à des événements très coûteux une probabilité de réalisation plus élevée que dans le cas exponentiel décroissant, caractéristique d'une queue de distribution fine ou « normale » du type Gumbel.

Cette différence de comportement est aussi caractérisée par le nombre de moments finis.

Lorsque $\alpha \leq 2$, les distributions du type Pareto n'ont pas de variance (elle est infinie). Lorsque $\alpha \leq 1$, elles n'ont pas d'espérance (elle est également infinie), alors que les distributions exponentielles ont toujours leurs moments finis. En conséquence, plus faible est la valeur de α , plus la différence entre les probabilités des valeurs extrêmes des deux types de distribution est grande.

Une transformation élémentaire des fonctions de répartition illustre cette différence fondamentale de comportement de la queue de distribution. Sur un graphique doublement logarithmique, le complément de la fonction de répartition $[1 - F(x)]$ d'une distribution de Pareto est une droite de pente $-\alpha$, alors que dans le cas d'une distribution exponentielle, le graphe présente une concavité tournée vers l'axe des valeurs de x .

La différence de comportement entre ces deux types de distribution de valeurs extrêmes reflète une différence fondamentale dans la nature des phénomènes décrits par ces distributions. Le cas exponentiel correspond à des phénomènes ayant une échelle caractéristique, comme, par exemple, les phénomènes biologiques complexes.

En effet, la plupart des distributions biologiques (tailles, poids, pressions artérielles, nombres de globules sanguins, etc.) ont des

extrêmes du type exponentiel ou Gumbel. La taille d'un être humain est déterminée par un très grand nombre de facteurs biologiques, dont aucun ne peut s'écarter beaucoup d'une norme, sous peine de ne pas être compatible avec la vie. L'écart entre la taille moyenne et la taille extrême est donc relativement faible, même si elle n'est pas négligeable. En relevant les tailles extrêmes dans des échantillons de plus en plus nombreux, la taille maximale augmente de plus en plus lentement jusqu'à une valeur extrême de probabilité très faible, si bien que la distribution limite n'a pas une queue « épaisse ». Par exemple, la probabilité associée à un géant, disons de 2,3m, est si faible qu'on n'en rencontre pratiquement jamais, sauf à effectuer une recherche sur plusieurs millions d'individus, voire plusieurs dizaines de millions.

C'est le contraire dans le cas des distributions du type Pareto. Il n'y a plus d'échelle ni de valeur caractéristique. Il y a invariance d'échelle. Les revenus (Pareto, 1896; Mandelbrot, 1960), les tailles des entreprises (Steindl, 1965), les montants des dommages climatiques ou industriels (Zajdenweber, 1996), les tailles de villes (Zipf, 1949; Mandelbrot, 1965; Gabaix, 1999; Zajdenweber, 2000), les distributions des revenus de l'industrie cinématographique (Chung et Cox, 1994; Zajdenweber, 2000) et bien d'autres distributions rencontrées en économie (Mandelbrot, 1997), sont des distributions qui présentent un caractère paretien marqué, avec une variance infinie et même, parfois, une espérance infinie. En économie, c'est le processus de croissance et de partage inégalitaire des richesses qui est pour l'essentiel à l'origine de cette invariance d'échelle (Zajdenweber, 2000). Dans ces conditions, les valeurs extrêmes très éloignées de la moyenne, quand celle-ci existe, ne sont plus rares et on ne peut pas fixer de façon évidente une valeur extrême supérieure au-delà de laquelle la probabilité d'un événement extrême deviendrait pratiquement négligeable.

Comme nous le verrons dans notre quatrième partie, pour déterminer une valeur actuarielle, il faudra alors recourir à d'autres analyses, en complément des distributions de probabilité.

Théorème 2

La somme de deux distributions du type Pareto, identiques (de même exposant caractéristique α) et indépendantes, est également une distribution de Pareto d'exposant caractéristique α . Ce théorème, qui caractérise une invariance d'échelle, se généralise à une somme de plusieurs distributions identiques, et à une somme de N distributions du type Pareto positives avec N déterminé par une distribution de Poisson (Feller, 1966). Ce théorème démontre

que si les catastrophes climatiques sont indépendantes entre elles et que si les dommages extrêmes proviennent de la même distribution de probabilité, alors leur somme est également une distribution de Pareto.

Un corollaire de ce théorème est que si la somme de deux distributions du type Pareto, X et Y , identiques et indépendantes, dépasse une certaine valeur x , alors :

$$P(X > x/X + Y > x) \rightarrow 1/2 \text{ lorsque } x \rightarrow \infty. \quad [4]$$

Ce corollaire signifie que lorsque des dommages agrégés sont catastrophiques, la grande valeur des dommages est due à l'une des deux distributions. C'est ce qu'on constate empiriquement. Les dommages totaux d'une année, qui résultent de l'accumulation des dommages dus à un petit nombre d'événements climatiques, excédant chacun un seuil élevé de dommages (un milliard), sont le plus souvent dominés par un seul événement catastrophique, dont les dommages dépassent tous les autres⁷.

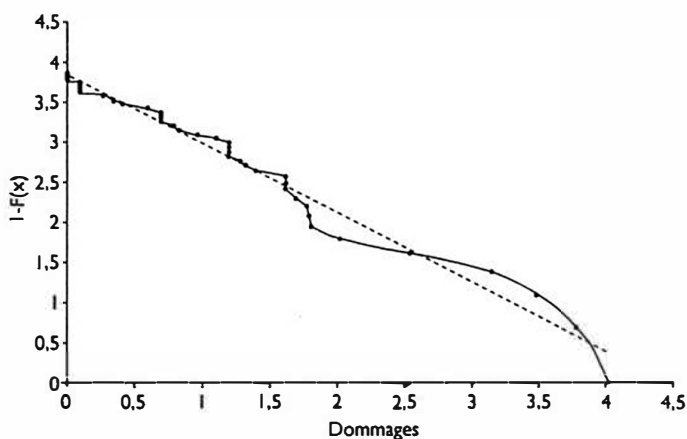
Remarque : Les comportements asymptotiques des distributions du type Pareto et du type exponentiel sont très différents lorsque $\alpha < 2$. Lorsque $\alpha > 2$, la distribution de Pareto a une variance et une espérance, comme la distribution exponentielle. En pratique, lorsque α est très supérieur à 2, par exemple est égal à 3 ou à 4, il est difficile de différencier une distribution empirique du type Pareto d'une distribution exponentielle, à moins de disposer d'un grand nombre d'observations, sans commune mesure avec le nombre d'observations sur les catastrophes climatiques. Le passage d'une distribution exponentielle à une distribution du type Pareto est donc, en pratique, progressif. Dans le cas des données climatiques étudiées, il n'y a pas d'ambiguïté car les distributions des dommages n'ont pas d'espérance ($\alpha \leq 1$).

■ 3. ANALYSE STATISTIQUE DES DOMMAGES

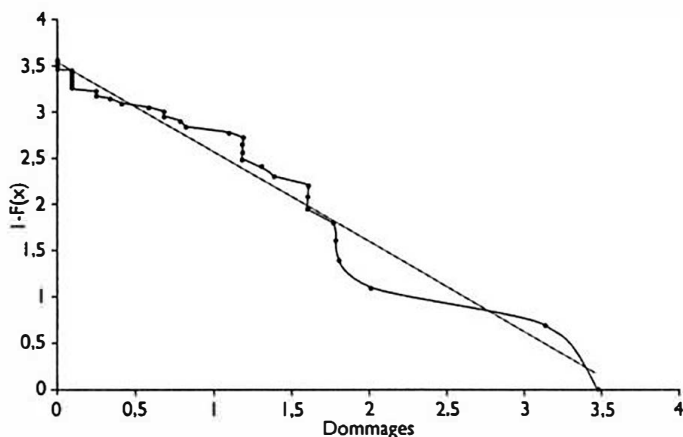
L'analyse statistique commence par une analyse graphique, car sur un graphique doublement logarithmique, les comportements asymptotiques des queues des distributions du type Pareto et du type exponentiel sont très différents. Si, comme c'est le cas, le comportement du type Pareto s'impose, alors il est possible d'estimer la valeur de l'exposant caractéristique α à partir des données contenues dans la queue de distribution. Les graphiques 1 à 4

représentent respectivement les compléments des fonctions de répartition $[1-F(x)]$ de quatre ensembles de données retraitées à partir de la base de données de la NOAA. En abscisse le logarithme des dommages, en ordonnée, le logarithme du nombre de catastrophes ayant coûté au moins le montant des dommages portés en abscisse.

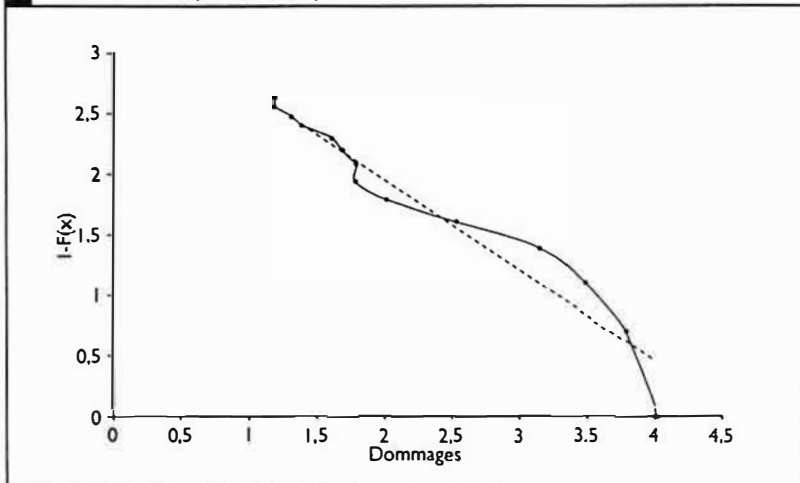
GRAPHIQUE 1
QUEUE DE DISTRIBUTION DES 48 DOMMAGES
CATASTROPHIQUES (1980-2000)



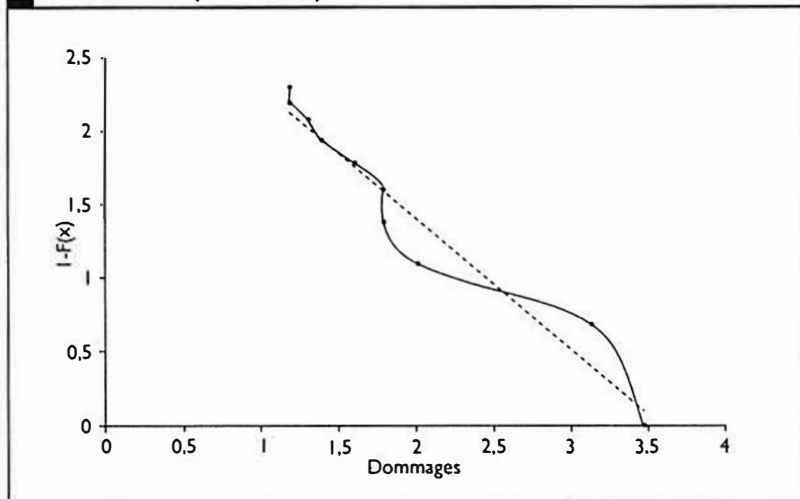
GRAPHIQUE 2
QUEUE DE DISTRIBUTION DES 37 DOMMAGES
CATASTROPHIQUES (1991-2000)



GRAPHIQUE 3
QUEUE DE DISTRIBUTION DES 14 DOMMAGES EXTRÊMES
ANNUELS (1980-2000)



GRAPHIQUE 4
QUEUE DE DISTRIBUTION DES 10 DOMMAGES EXTRÊMES
ANNUELS (1991-2000)



Le graphique n°1 utilise toutes les données de la NOAA. Autrement dit, il suppose que les données ne présentent pas de tendance et qu'elles sont indépendantes entre elles. Nous avons vu que l'hypothèse de stationnarité pouvait être remise en cause, surtout à partir de 1991. C'est pourquoi le graphique n°2 ne

représente que les données limitées à la période 1991-2000. Malgré cela, les deux graphiques sont très semblables. Entre la valeur du deuxième dommage (respectivement : 44 et 23,1 milliards) et le plus petit dommage enregistré (1 milliard dans les deux cas de figure), ils ont le même comportement linéaire, caractéristique d'une distribution de Pareto. Lorsqu'on estime leurs pentes à l'aide d'une régression linéaire entre ces mêmes points, elles ont des valeurs très proches et surtout, elles sont inférieures à -1 ($-0,85$ pour le n°1, $-0,92$ pour le n°2).

Il en va de même avec les graphiques n°3 et n°4 qui représentent les extrêmes annuels entre 1980 et 2000 et entre 1991 et 2000. Le comportement linéaire est semblable entre les plus grands dommages extrêmes et une valeur minimale égale à 3,3 milliards. La régression donne des pentes inférieures à 1, voisines de celles du n°1 et du n°2 : $-0,83$ pour le n°3 et $-0,97$ pour le n°4.

Afin d'améliorer l'estimation des pentes déterminant les valeurs des exposants caractéristiques α , nous avons également utilisé la méthode du « maximum de vraisemblance » de Hill (1975)⁸ :

Soit N dommages, de valeur x_i ($i = 0, N$), ordonnés en croissant à partir de x_0 , valeur du plus faible dommage figurant sur la droite de Pareto. On a :

$$1/\alpha^* = (1/N) \sum \text{Log}x_i - \text{Log}x_0 \quad [5]$$

$$E(1/\alpha^*) = 1/\alpha \quad [6]$$

$$\text{Var}(1/\alpha^*) = N\alpha^2 \quad [7]$$

Lorsque N est suffisamment grand, l'application du théorème central limite montre que la vraie valeur de $1/\alpha$ est contenue dans l'intervalle de confiance centré sur $1/\alpha^*$, d'écart type égal à $1/\sqrt{N}$. Ainsi, l'intervalle de confiance à 95% est-il égal à $1/\alpha^*(1 \pm 2/\sqrt{N})$.

Le tableau III rassemble les estimations de α par la technique de Hill, faites en faisant varier légèrement la valeur de x_0 , et ce sur les données des trois premiers graphiques. En raison du trop faible nombre de données (10), il n'a pas été possible d'obtenir un résultat significatif sur les données du graphique n°4.

Selon les techniques, les périodes et les seuils retenus, les pentes estimées varient entre deux extrêmes (les bornes des intervalles de confiance non comprises) : $0,83$ et $-1,15$. Une fourchette assez large qui recouvre des distributions qui n'ont pas de variance, mais qui ont ou n'ont pas d'espérance, selon la valeur de la pente par rapport à -1 . Une analyse fine des résultats nous

TABLEAU III					
Graphique n°	Période	X0	α^*	N	Intervalle
1	1980-2000	1,0	0,96	48	0,74-1,35
1	D°	1,1	0,91	42	0,69-1,31
1	D°	1,3	0,90	36	0,68-1,35
1	D°	1,4	0,90	34	0,67-1,37
2	1991-2000	1,0	1,15	37	0,87-1,71
2	D°	1,1	0,97	31	0,71-1,51
2	D°	1,3	1,00	25	0,71-1,67
2	D°	1,4	0,96	24	0,68-1,62
3	1980-2000	2,6	0,85	15	0,56-1,76
3	D°	3,3	0,98	14	0,64-2,10

permet de restreindre l'intervalle des valeurs estimées. En effet, nous pouvons exclure les seuils strictement égaux à 1 milliard. Voici pourquoi. Comme $\text{Log}l = 0$, il suffit d'un grand nombre de dommages égaux à ce seuil pour que la valeur de la pente augmente, toutes choses égales par ailleurs, puisque la moyenne des logarithmes diminue lorsque N augmente. Or, de nombreux dommages légèrement inférieurs à 1 milliard sont probablement arrondis à ce chiffre, notamment les récents, survenus après 1991, qui n'ont pas subi la correction importante de l'inflation. Le fait que les 6 dommages strictement égaux à 1 soient tous datés de 1996 à 1999 conforte cette hypothèse. Si on choisit un seuil différent de 1, les pentes ne varient plus beaucoup. Elles restent voisines de $-0,9$, pour toutes les données depuis 1980, tandis qu'elles restent voisines de -1 depuis 1991. Quant aux extrêmes annuels égaux à au moins 3,3 milliards, leurs pentes sont égales à $-0,98$ entre 1980 et 2000 (estimateur de Hill) et à $-0,97$ entre 1991 et 2000 (estimation par régression).

Si nous admettons que l'exposant caractéristique « vrai » est très proche de 1, l'exposant estimé à partir des données des graphiques n°3 ou 4 est en accord avec la théorie probabiliste des valeurs extrêmes, puisqu'elle démontre que dans le type Pareto, l'exposant caractéristique α des distributions des extrêmes annuels est identique à celui de la distribution parente.

Remarques : La prise en compte de la tempête de verglas, qui paralysa le Québec en janvier 1998, ne modifie pas de façon significative les paramètres de la distribution de probabilité des extrêmes. En effet, cette tempête exceptionnelle et catastrophique a coûté, tous dommages confondus, environ 3 milliards de dollars canadiens (Moreau, 1998), soit environ 2 milliards de US\$. Cette valeur, relativement faible par rapport aux autres dommages, ne figure pas sur la queue de distribution des graphiques n°3 et n°4, dont les seuils minimaux sont égaux à 2,6 ou à 3,3 milliards, tandis que son introduction dans l'estimateur de Hill affecte peu son résultat. En voici deux exemples. Ils concernent les graphiques n°1 et n°2. Pour la période 1980-2000, au seuil minimal de 1,1 milliard, l'exposant qui valait 0,91 avec 42 observations passe à 0,92 avec 43 observations. De même, pour la période 1991-2000, toujours au seuil minimal de 1,1 milliard, l'exposant caractéristique passe de 0,97 avec 31 observations à 0,98 avec 32 observations.

Phénomène remarquable au plan statistique, lorsqu'on évalue les risques climatiques catastrophiques pour le monde entier et non plus seulement pour les États-Unis et le Canada, la distribution de probabilité reste inchangée. De fait, les données publiées par la FFSA (2000), reproduites dans le numéro d'octobre 2000 de la revue *Assurances* (p. 427), concernant la seule année 1999, montrent que les 12 événements les plus coûteux cette année-là s'ajustent à une distribution de Pareto, d'exposant caractéristique $\alpha \cong 0,9$ (estimation par régression et avec l'estimateur de Hill).

■ 4. VALEUR ACTUARIELLE DES DOMMAGES EXTRÊMES

Soit $\alpha \leq 1$, l'exposant caractéristique de la distribution X des valeurs extrêmes du type Pareto. Soit M, la valeur maximale des dommages susceptibles de se réaliser, qui peut être la valeur totale des biens exposés à une catastrophe climatique quelconque. Soit m, la valeur minimale des dommages figurant dans la queue de distribution. Puisque M est finie, l'espérance mathématique existe toujours, même lorsque $\alpha \leq 1$. Elle a pour expression (Schmitter et Büttikofer, 1998; Zajdenweber, 1996 :

$$E(X) = (1 - \alpha)^{-1} M^{\alpha} m^{\alpha} (M^{1-\alpha} - m^{1-\alpha}) (M - m)^{-\alpha} \text{ lorsque } \alpha < 1 \quad [8]$$

$$E(X) = Mm (\text{Log}M - \text{Log}m) (M - m)^{-1} \text{ lorsque } \alpha = 1 \quad [9]$$

Soit $E(N)$ le nombre annuel moyen de dommages au moins égaux à m . La valeur actuarielle des dommages totaux annuels $E(T_N)$, servant de base à l'évaluation d'une prime d'assurance du type « excess of loss », est alors égale à

$$E(T_N) = E(N) \cdot E(X). \quad [10]$$

Dans le cas particulier où $\alpha = 1$ et où $m = 1$, compte tenu de ce que $\text{Log} 1 = 0$ et de ce que M est grand, on a la formule simplifiée approximative :

$$E(T_N) \cong E(N) \cdot \text{Log} M. \quad [11]$$

Dans tous les cas de figure avec $\alpha \leq 1$, le choix de la valeur M est stratégique. Or, la plus grande valeur observée dans un échantillon de dommages n'est pas un indicateur suffisant de la valeur de M . Dans une distribution non bornée, M peut toujours dépasser une valeur réalisée dans le passé. De fait, la catastrophe climatique la plus coûteuse jamais observée aux États-Unis a eu lieu en 1926, il s'agissait d'un ouragan. Ses dommages totaux, corrigés de la croissance économique, ont été évalués à 72 milliards (valeur 1995) (*Pielke et Landsea*, 1998), soit beaucoup plus que la catastrophe de 1988. Mais il y a pire. Il a failli se réaliser et il reste une éventualité probable. Il s'agit de l'ouragan *Andrew*. Si, en 1992, il était passé sur le centre de Miami et non pas dans sa grande banlieue, les dommages totaux auraient approché les 100 milliards au lieu des 32,4 constatés (*Kunreuther*, 1997). *Andrew* était un ouragan de la classe 4 sur l'échelle de Saffir-Simpson qui évalue leur force. Si, continuant l'escalade des dangers climatiques, nous extrapolons les dommages qu'il a occasionnés à ceux d'un ouragan de la classe 5, celle de *Camille* en 1969, passant sur le centre de Miami ou d'une autre grande agglomération de Floride, alors nous arrivons à un nouveau record potentiel de 144 milliards (*Zajdenweber*, 2000) !

Le tableau IV rassemble les différentes évaluations des dommages d'origine climatique avec $M = 100$, une valeur « raisonnable », puisqu'elle correspond à un événement connu, un ouragan de la classe 4, frappant une grande ville comme Miami, dont la population et les richesses sont précisément évaluées. Les valeurs retenues de l'exposant caractéristique α sont les plus proches de celles obtenues par régression ou par l'estimateur de Hill : $\alpha = 1$; $\alpha = 0,9$ et $\alpha = 0,85$. Enfin, à titre d'exemple, nous avons retenu deux valeurs minimales : $m = 1$ et $m = 6$ correspondant depuis 1991 à des événements se produisant en moyenne 3,7 fois par an pour $m = 1$, et une année sur deux pour $m = 6$.

TABLEAU IV			
Seuil m	$\alpha = 1$	$\alpha = 0,9$	$\alpha = 0,85$
1	17,2	21,8	24,8
6	8,9	10,3	11,1

Chacune des 6 cases contient le produit $E(N).E(X)$. C'est le dommage total espéré par année.

Au-delà du seuil m choisi, le risque total annuel augmente lorsque α diminue. En effet, la queue de distribution est d'autant plus « épaisse » que α est plus petit. Le risque total annuel, en revanche, diminue lorsque le seuil s'élève, à cause de la plus faible fréquence des événements très coûteux.

Remarquons que, si nous posons $M = 100$, l'exposant $\alpha = 0,9$ est celui qui conduit à la meilleure évaluation rétrospective des dommages *totaux* sur la période 1980-2000. En effet, de 1980 à 1990, le dommage annuel moyen estimé est égal à 5,9 (= 21,8/3,7, puisque avant 1991 il n'y a eu qu'un seul événement catastrophique par an en moyenne), soit 64,9 en 11 ans, tandis que depuis 1991 il est égal à 21,8 par an. D'où des dommages totaux, estimés sur la période 1980-2000, égaux à $64,9 + 218 = 282,9$, un chiffre presque égal au total réalisé (283,4). Sachant que la comparaison des queues de distribution, celle depuis 1980 et celle depuis 1991, montre que la forme de ces queues est restée du type Pareto, tandis que leurs exposants caractéristiques ont peu varié, nous pouvons admettre que les paramètres permettant d'évaluer les valeurs moyennes des dommages annuels, au-delà d'un seuil de 1 milliard par événement, sont actuellement : $M = 100$ milliards, $\alpha = 0,9$ et $N = 3,7$ par an. Si, à cause de la croissance économique, il fallait réévaluer la valeur maximale M ou bien si, à cause de l'évolution du climat, il fallait modifier $E(N)$, dans un sens ou dans l'autre, les changements seraient très simples à effectuer.

Le paramètre susceptible de varier le plus au cours du temps, c'est la fréquence moyenne $E(N)$, qui a varié entre 1 et 3,7 de 1980 à 2000. Elle dépend, en effet, de la variabilité des climats et des cycles éventuels, comme par exemple le cycle chaotique baptisé « El Niño-La Niña », qui serait à l'origine de l'augmentation de la fréquence des catastrophes climatiques depuis une dizaine d'années (Kandel, 1998). Le calcul complet de la valeur actuarielle des dommages doit intégrer la variance de N , ce qui augmente la valeur des primes.

Soit X , la distribution des dommages par événement, comprise entre m et M .

Soit N , la variable aléatoire du nombre annuel de catastrophes climatiques excédant le seuil minimal m .

Soit T_N , le dommage annuel total. On a (*Feller*, 1966) :

$$\text{Var}(T_N) = E(N) \cdot \text{Var}(X) + [E(X)]^2 \cdot \text{Var}(N). \quad [12]$$

Cas particuliers : Lorsque la variable aléatoire N est une distribution de Poisson, on a :

$$E(N) = \text{Var}(N), \quad [13]$$

$$\text{d'où} : \text{Var}(T_N) = E(N) (\text{Var}(X) + [E(X)]^2). \quad [14]$$

Si, de plus, on a une distribution de Pareto avec $\alpha = 1$ et avec $m = 1$, on a, (*Zajdenweber* [1996]) :

$$\text{Var}(X) = M [1 - M(\text{Log}M)^2(M-1)^{-2}]. \quad [15]$$

Compte tenu de l'approximation [11] ci-dessus, lorsque M est grand :

$$E(X) \cong \text{Log}M \quad [16]$$

$$\text{Var}(X) \cong M - (\text{Log}M)^2, \quad [17]$$

$$\text{soit} : \text{Var}(T_N) \cong E(N) [M - (\text{Log}M)^2 + (\text{Log}M)^2] \cong E(N) \cdot M. \quad [18]$$

Si, enfin, on a $E(N) = 1$, comme dans le cas des données de la NOAA avant 1991, alors la formule de la variance des dommages totaux annuels se simplifie encore un peu plus :

$$\text{Var}(T_N) \cong M. \quad [19]$$

Ce cas particulier illustre la sensibilité de la valeur actuarielle à l'évaluation du plus grand dommage potentiel assurable. L'espérance y est égale à $\text{Log}M$, tandis que la variance y est égale à M .

■ 5. RÉASSURANCE ET VALEURS EXTRÊMES

En principe, s'il y a un consensus entre les réassureurs sur la valeur du sinistre maximal M , il ne devrait pas y avoir d'obstacle à une gestion équilibrée des traités de réassurance en excédent de sinistre. En effet, une valeur actuarielle peut être estimée avec sa variance, d'où une estimation « standard » des primes des traités de

réassurance « catastrophes naturelles », comme dans n'importe quel traité couvrant des risques dont la distribution de probabilité comporte une espérance et une variance finies. L'ensemble des risques assurés peut alors être couvert par le marché mondial de la réassurance. En cas de sinistre dépassant le seuil minimal (le « point d'attachement »), les sociétés de réassurance indemnisent les cédantes, à due concurrence de leur participation dans le traité de réassurance. Comme les différentes catastrophes climatiques, dans le monde entier, peuvent être considérées, en première analyse, comme indépendantes entre elles, il suffit qu'un nombre suffisamment grand de sociétés de réassurances se répartissent les différents risques entre elles pour que, par application de la loi forte des grands nombres, il y ait convergence du résultat moyen vers le résultat espéré.

Ce scénario théorique rencontre, en fait, deux difficultés majeures qui l'empêchent de se réaliser et restreignent donc l'action des sociétés de réassurance. La première difficulté tient à l'existence d'un consensus sur la valeur de M . En son absence, il peut y avoir autant de primes actuarielles possibles que de sociétés de réassurance, d'où un risque de sous-tarification des traités de réassurance. En effet, le jeu de la concurrence favorise les sociétés à faibles primes, c'est-à-dire celles qui sous-évaluent M . En cas de sinistre catastrophique, ces sociétés de réassurance peuvent être mises en grande difficulté, voire faire faillite. Autrement dit, les catastrophes climatiques risquent de ne plus être assurables, faute d'un système de réassurance fiable.

L'autre difficulté susceptible de restreindre l'intervention des sociétés de réassurance, c'est leur capacité financière. Les montants des réclamations sont potentiellement considérables, elles peuvent s'élever à plusieurs dizaines de milliards de US\$, comme nous l'avons vu. Même si les risques assurés n'atteignent pas 50% du montant total des dommages, comme dans le cas de l'ouragan *Andrew* en 1992, dont les réclamations dépassèrent 15 milliards de dollars US, les montants en jeu peuvent faire disparaître des pans entiers de l'industrie de la réassurance ou, en tout cas, peuvent conduire les réassureurs à ne plus couvrir les risques climatiques. Cette insuffisance de capacité a amené les assureurs et les financiers à imaginer de nouvelles techniques pour couvrir les risques catastrophiques, climatiques, telluriques ou industriels (voir à cet égard la synthèse récente de M. Sirois, 2000). L'une d'elle nous paraît plus pertinente, d'une part parce qu'elle peut combler l'insuffisance de capacité et, d'autre part, parce qu'elle permet d'imposer un consensus sur la valeur du dommage maximal M . Il

s'agit de la technique de l'obligation catastrophe (« catbond ») récemment mise en place par différents intermédiaires financiers. Un intermédiaire financier « ad hoc » émet un emprunt obligataire assorti d'une clause optionnelle de remboursement partiel, voire d'absence totale de remboursement, en cas de réalisation d'un événement climatique catastrophique dont les réclamations dépassent une valeur contractuelle (le point d'attachement). Les intérêts servis aux prêteurs qui souscrivent à ce type d'émission sont supérieurs au taux du marché, la différence compensant le risque de remboursement partiel ou nul, supporté par les souscripteurs. Cette technique présente l'avantage de donner à l'intermédiaire financier « ad hoc » le choix de la valeur maximale M qui détermine avec le point d'attachement le montant de l'emprunt et évite ainsi la concurrence entre réassureurs qui les poussent à sous-évaluer M . Par exemple, dans le cas des catastrophes climatiques aux États-Unis depuis 1991, si nous reprenons les calculs du tableau n°4 et si nous admettons, pour simplifier l'exposé, que les dommages sont intégralement assurés, le montant total de l'emprunt susceptible de couvrir tout événement climatique dont les réclamations annuelles dépassent 6 milliards avec $\alpha = 0,9$ et avec $M = 100$ milliards, est égal à 10,3 milliards par an. De fait, depuis 1991, l'application de cette technique de l'obligation catastrophe aurait permis de lever 10,3 milliards chaque année, soit un peu plus de 100 milliards en dix ans, et de verser 45 milliards de réclamations aux victimes des catastrophes en 1992, 1993 et 1998 qui coûtèrent plus de 6 milliards chacune. Dans la mesure où les capacités financières des souscripteurs sont largement supérieures à 10,3 milliards par an, et dans la mesure où les intérêts servis compensent le risque de remboursement partiel, voire de non-remboursement, la formule de l'obligation catastrophe n'a rien de mystérieux. Elle s'apparente à l'émission d'une obligation à haut risque et à haut rendement (« junk bond »).

Mais, avantage important, la rentabilité espérée d'une pareille obligation n'est pas corrélée aux fluctuations boursières, d'où un intérêt certain pour tous les investisseurs cherchant à diversifier leurs portefeuilles. Dans ces conditions, les catastrophes climatiques dans un pays ou même dans le monde entier peuvent être assurables. Chaque souscripteur devient assureur à due concurrence de son investissement. S'il y a plusieurs milliers de souscripteurs, qui peuvent être des particuliers, des gérants de SICAV, des fonds de pension, voire, pourquoi pas, des assureurs cherchant à améliorer la rentabilité espérée de leurs placements, le risque climatique est divisé en parts suffisamment faibles pour ne

plus représenter un risque de catastrophe financière pour chacun des souscripteurs. Réciproquement, en cas de catastrophe climatique dépassant le point d'attachement, les assureurs ou réassureurs, partie prenante à l'émission de l'obligation catastrophe par l'entremise de l'intermédiaire « ad hoc », ont la certitude que leurs engagements maximaux ne dépasseront pas la valeur de ce point d'attachement (6 milliards dans notre exemple).

■ CONCLUSION

L'analyse statistique des données, publiées par la NOAA, sur les dommages d'origine climatique aux États-Unis depuis 1980, qui ont atteint ou excédé 1 milliard (non compris les morts et les blessés), montre que la distribution de probabilité des dommages extrêmes appartient au type Pareto sans espérance mathématique. Son exposant caractéristique est légèrement inférieur à 1. Pour les assureurs, les conséquences de ce fait statistique sont doublement importantes. D'une part les risques qu'ils assument sont beaucoup plus grands que dans le cas exponentiel. D'autre part, la valeur agrégée des primes des polices couvrant un territoire comme les États-Unis ne peut pas être calculée sans poser au préalable la valeur du dommage maximal susceptible de se réaliser au cours d'une année, quelque part sur ce territoire des États-Unis. Un préalable difficile à réaliser, puisqu'il repose sur une évaluation des plus grands dommages potentiels, donc sur une délicate évaluation des richesses, entraînés par la réalisation d'événements catastrophiques exceptionnels, comme par exemple un ouragan traversant le centre de Miami avec une force 4 (*Andrew*), voire avec une force 5 (*Camille*), le degré le plus élevé sur l'échelle de Saffir-Simpson.

Toutefois, dès lors que ce préalable est franchi, le calcul de la prime actuarielle totale agrégée est des plus simples. Elle est d'autant plus élevée que la queue de distribution est plus « épaisse », mais elle décroît d'autant plus que le seuil d'intervention des contrats de réassurance (le point d'attachement) en excédent de dommages (« excess of loss ») est plus élevé.

Ainsi, dans le cas de l'ouragan de force 4 sur Miami, si le sinistre extrême s'élève à 100 milliards, la prime actuarielle annuelle, correspondant au seuil de 1 milliard par événement, serait égale à 21,8 milliards, tandis que la prime annuelle correspondant au seuil de 6 milliards serait égale à 10,3 milliards.

Le calcul de la prime actuarielle fait également ressortir que la principale incertitude dans le court terme n'est pas économique mais climatique. Il s'agit de la fréquence annuelle des catastrophes climatiques. Va-t-elle se stabiliser autour de la valeur élevée observée depuis une décennie (3,7) ? Ou bien va-t-elle revenir à la valeur relativement faible antérieure (1) ?

À moins que la variance de cette fréquence soit si grande, que ces grands écarts soient stationnaires au sens statistique ? L'économiste ne peut pas répondre aux deux premières questions. Mais dans le dernier cas de figure, il peut intégrer la variance de N dans le calcul de la prime, qui ne peut qu'augmenter avec cette variance.

L'analyse des valeurs extrêmes appliquée aux dommages climatiques illustre toutes les difficultés rencontrées par les décideurs, assureurs, réassureurs et assurés. Ils doivent prendre une décision en ne disposant que de peu de données, souvent entachées de tendances qui masquent les vrais paramètres des distributions des risques. Heureusement, la théorie des valeurs extrêmes leur simplifie singulièrement la tâche : elle démontre qu'il n'y a que deux distributions pertinentes dans le contexte de l'assurance. Grâce à cette théorie, même en ne disposant que des queues de distribution, dont la recension est facilitée par leur caractère spectaculaire et sous réserve de disposer d'un consensus sur l'évaluation du plus grand dommage potentiel, un diagnostic peut être posé et des primes peuvent être calculées. Dans ces conditions, l'industrie de l'assurance et de la réassurance, complétée par des produits financiers dérivés, comme par exemple les obligations catastrophes (« catbonds »), peut continuer de couvrir les assurés contre des dommages extrêmes.

□ Bibliographie

- Beirlant Jan, Petra Vynckier et Jozef L. Teugels (1996), « Tail Estimation, Pareto Quantile Plots, and Regression Diagnostics. » *Journal of the American Statistical Association* 91, n°436, p. 1659-1667.
- Changnon Stanley A., K.E.Kunkel et Roger A.Pielke (1999), « Temporal Fluctuations in Weather and Climate Extremes that Cause Economic and Human Health Impacts : A Review. » *Bulletin of the American Meteorological Society* 80, n°6, p. 1077-1098.
- Chung Kee H. et Raymond A.K.Cox (1994), « A Stochastic Model of Superstardom : An Application of the Yule Distribution. » *The Review of Economics and Statistics* 4, LXXVI, p. 771-775.

- Easterling David R., Gerald A.Meehl, Camille Parmesan, Stanley A.Changnon, Thomas R.Karl, Linda O.Mearns (2000) « Climate Extremes : Observations, Modeling and Impacts.» *Science*, Sept 22, p. 2068-2074.
- Embrechts Paul, Claudia Klüppelberg et Thomas Mikosh (1997), Modeling Extremal Events, Berlin, Heidelberg, Springer.
- Fédération Française des Sociétés d'Assurance (FFSA) (2000), *L'Assurance Française en 1999*. Paris.
- Feller William (1966), An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol.II, New York, Wiley and Sons.
- Fisher R.A. et L.H.C.Tippett (1928), « Limiting Form of the Frequency Distribution of the Largest and Smallest Member of a Sample.», *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 24, p. 180-190.
- Fréchet Maurice (1927), « Sur la Loi de Probabilité de l'Ecart Maximum. » *Ann.Soc. Polonaise de Mathématiques (Cracovie)*, 6, p. 93.
- Gabaix Xavier (1999), « Zipf's Law and Cities : An Explanation.» *The Quarterly Journal of Economics*, Août, p. 739-767.
- Gnedenko B.V. (1943), « Sur la Distribution Limite du Terme Maximum d'une Série Aléatoire.» *Ann.Math.* 44, p. 423-453.
- Gumbel E.J. (1958), Statistics of Extremes, New York, Columbia University Press.
- Hill Bruce M. (1975), « A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution.» *Annals of Statistics* 3, p. 1163-1174.
- Kandel Robert (1998), Les Eaux du Ciel, Paris, Hachette, Coll. Sciences.
- Kunreuther Howard (1997), « Rethinking Society's Management of Catastrophic Risks.» *The Geneva Papers on Risk and Insurance* 83, p. 154-176.
- Le Roy Ladurie Emmanuel (1967), Histoire du Climat depuis l'An Mil, Paris, Flammarion.
- Mandelbrot Benoît B. (1960), « The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income.» *International Economic Review* 1, p. 79-106. Repris dans B.B.Mandelbrot (1997).
- Mandelbrot Benoît B. (1965), « Very Long-Tailed Probability Distributions and the Empirical Distribution of City Sizes.», dans Mathematical Explanations in Behavioral Sciences, F.Massarik et P.Ratoosh eds., Homewood, Irwin, p. 322-332.
- Mandelbrot Benoît B. (1997), Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity and Concentration, New York, Springer.
- Moreau Rémi (1998), « Ombres et Lumières », *Assurances* 66, 1, p. 40-64.
- Nesme-Ribes Elisabeth et Gérard Thuillier (2000), Histoire Solaire et Climatique, Paris, Belin, coll. Pour la Science.
- National Oceanic and Atlantic Administration (2000), « Billion Dollars U.S. Weather Disasters, 1980-2000», *Site Web*, 21 décembre.
- Pareto Vilfredo (1896), Cours d'Economie Politique, Genève, Droz.

- Pielke Roger A. Jr et Christopher W.Landsea (1998), « Normalized Hurricane Damages», *Weather and Forecasting* 13, p. 621-631.
- Ross Tom et Neal Lott (2000), « A Climatology of Recent Weather and Climate Events» *National Climatic Data Center (NOAA)*, octobre.
- Schmitter Hans et Peter Bütikofer (1998), « Estimating Property Excess of Loss Premiums by Means of the Pareto Model.» *Swiss Reinsurance Company*.
- Sirois Mathieu (2000), « Gérer les risques de catastrophes : avantages et inconvénients des outils traditionnels et modernes. » *Assurances* 68, 3, p. 367-400.
- Steindl Josef (1965), Random Processes and the Growth of Firms, Londres, Griffin.
- Swiss Reinsurance Company (SwissRe) (2000), *Site web*.
- Zajdenweber Daniel (1996), « Extreme values in Business Interruption Insurance », *The Journal of Risk and Insurance* 63, 1, p.95-110.
- Zajdenweber Daniel (2000), « Fréquence, Amplitude et Coût des Catastrophes Naturelles.» *Risques* 42, p. 75-79.
- Zajdenweber Daniel (2000), Economie des Extrêmes, Paris, Flammarion, Coll. Nouvelle Bibliothèque Scientifique.
- Zipf George K. (1949), Human Behavior and the Principle of Least Effort, Cambridge Mass., Addison-Wesley.

Notes

¹ Pour alléger la présentation de l'article, toutes les sommes sont en US\$, corrigées de l'inflation (valeur 1999 pour les données correspondant à cette année-là, valeur 1998 pour toutes les autres).

² À cette tendance longue, il convient d'ajouter l'augmentation du nombre d'événements portés à la connaissance du public grâce à la multiplication des médias et des satellites d'observation météo, ce qui biaise l'estimation des fréquences des événements climatiques.

³ Il a été construit à partir des données du rapport de Tom Ross et Neal Lott (*National Climatic Data Center* de la NOAA[2000]).

⁴ Tom Ross et Neal Lott[2000] fixent la date du changement de fréquence à 1988, car elle inaugure une séquence ininterrompue de 13 années avec au moins une catastrophe par an. C'est également l'année la plus catastrophique de la série. Nous préférons conserver l'année 1991 comme année du changement, et ce pour deux raisons. D'une part à cause de la qualité de l'ajustement de la loi de Poisson entre 1980 et 1990, d'autre part à cause du changement abrupt dans la fréquence des inondations à partir de 1991. En effet, l'analyse détaillée des 48 catastrophes climatiques révèle qu'entre 1980 et 1990, sur 11 catastrophes, il y a eu 4 vagues de chaleur ou sécheresses, 4 ouragans, 2 gelées et une seule inondation. Entre 1991 et 2000, sur 37 catastrophes il y a eu 11 inondations, 10 ouragans, 9 vagues de chaleur, 4 tornades ou tempêtes, 2 gelées et une tempête de grêle. Rappelons qu'en ce qui concerne les ouragans (hurricanes), l'analyse statistique (Zajdenweber, 2000), faite à partir des données élaborées par Pielke et Landsea (1998), montre que depuis 1925 la fréquence annuelle des ouragans qui ont frappé la côte atlantique des États-Unis est restée remarquablement constante : 1,6 par an, avec une distribution de Poisson du nombre annuel d'ouragans compris entre 0 et 6.

⁵ L'ouvrage de référence le plus complet sur le calcul des probabilités et les statistiques appliquées aux valeurs extrêmes est le récent traité de *Embrechts, Klüppelberg et Mikosh* (1997). Il rassemble et expose tous les théorèmes et de nombreuses applications, publiés depuis les travaux des fondateurs cités.

⁶ Comme la seule limite supérieure aux dommages agrégés est la valeur totale des biens susceptibles d'être détruits ou endommagés, elle peut être assimilée à l'infini. C'est pourquoi nous ne traitons pas le cas borné, pour lequel la distribution limite est la distribution dite de Weibull. Elle tend à se confondre avec la borne lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini.

⁷ Ce corollaire a été remarqué par B.Mandelbrot. W.Feller (1966) le propose aux étudiants comme exercice d'application sur les distributions d'extrêmes.

⁸ L'estimateur de Hill, tout comme l'utilisation du complément de la fonction de répartition sur un graphique double-log, ne sont pas des techniques sans faiblesses. La régression sur les données transformées dépend de façon critique du choix de la plus grande valeur figurant sur la droite, qui est souvent éloignée de cette droite faute d'observations en nombre suffisamment grand, tandis que l'estimateur de Hill est très sensible au choix de la plus petite valeur de x_0 . Comme la formule de cet estimateur le montre, l'erreur à craindre peut être grande, car la moyenne des logarithmes est corrigée par le terme de faible valeur $\text{Log}x_0$, lequel figure au dénominateur de l'estimateur de α . En cas d'erreur, c'est-à-dire lorsque x_0 n'est pas sur la droite de Pareto, l'estimateur de Hill est biaisé. En général, il conduit à des valeurs de α trop faibles par rapport à la réalité. Toutefois, lorsque $\alpha \cong 1$, comme c'est le cas dans les données de la NOAA, le comportement du type Pareto de la queue de distribution est suffisamment explicite, pour permettre le bon choix de la valeur de x_0 pertinente. (Voir un autre exemple de distribution de dommages avec $\alpha = 1$ dans *Zajdenweber*, 1996). Pour éviter ces faiblesses, les statisticiens ont mis au point d'autres techniques plus efficaces, fondées sur les quantiles et non pas seulement sur les valeurs observées (*Beirlant, Vynckier et Teugels*, 1996). Malheureusement, compte tenu du petit nombre de données disponibles, ces méthodes ne sont pas applicables.