Assurances

Etude sur la table de mortalité

Paul Vallerand

Volume 8, Number 3, 1940

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1102950ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1102950ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0004-6027 (print)
2817-3465 (digital)

Explore this journal

Cite this document

Vallerand, P. (1940). Etude sur la table de mortalité. *Assurances*, *8*(3), 109–118. https://doi.org/10.7202/1102950ar

Assurances

Revue trimestrielle consacrée à l'étude théorique et pratique de l'assurance au Canada

Enregistrée à Montréal comme matière de seconde classe.
Les articles signés n'engagent que leurs auteurs.

Prix au Canada:
L'abonnement: $1.00
Le numéro: 25 cents

Directeur: GÉRARD PARIZEAU

Administration:
Ch. 43
84, rue Notre-Dame ouest
Montréal

8e année — MONTRÉAL, OCTOBRE 1940 — Numéro 3

Etude sur la table de mortalité

par

PAUL VALLERAND, L.S.C., A.A.S.,
Actuaire de l'Alliance Nationale.

Dans deux numéros précédents de cette revue, celui de juillet 1939 et celui de janvier 1940, ont paru de courts aperçus des origines et usages des tables de mortalité. Dans ces deux articles, toute question technique se rapportant à l'essence même de la table de mortalité avait été soigneusement évitée. Aujourd'hui, on me demande justement d'examiner avec vous ce qu'est véritablement une table de mortalité, ce que représentent les différents symboles qui la composent et les applications immédiates qu'on peut en faire.

Cherchons tout d'abord une définition de la table de mortalité aussi simple que possible, afin de pouvoir plus facilement la retenir: la table de mortalité est un instrument qui permet de calculer rapidement à un âge donné les probabilités de vie et les probabilités de mort.

Avant d'en étudier la formation, voyons quelles fonctions ces tables contiennent et étudions un à un les symboles qui servent à désigner ces différentes fonctions.

Le nombre de personnes vivantes. l_x représente le nombre de personnes qui, selon la table, atteint en une année quelconque l'âge de x années exactement. Ce nombre n'est pas calculé directement par énumération d'un groupe de personnes atteignant l'âge x, mais il dérive d'observations préalables, tel que décrit plus loin, de sorte que les valeurs successives de l_x apparaissant dans une table quelconque soient en parfaite relation les unes aux autres.

Afin de ne pas compliquer les choses inutilement, il ne sera question ici que d'une table dérivée des statistiques démographiques d'un pays, autrement dit d'une table basée sur les recensements et les registres d'état civil. La table commencera par un nombre arbitraire de naissances, l_0, survenant en une année du calendrier.

Le suffixe de l, soit x, est ordinairement un nombre entier et on emploie une autre lettre, soit t ou n, pour désigner l'addition d'un nombre d'années soit entier, soit fractionnaire. Ainsi l_{x+t} dénote le nombre de personnes qui atteint en une année l'âge $x + t$ exactement. Ces l_{x+t} personnes peuvent être considérées comme les survivants d'un groupe né en une année, $x + t$ années en arrière; elles sont aussi les survivants des l_{x+t-1} personnes qui ont atteint l'âge $x + t - 1$ l'année dernière, ou des l_{x+t-2} personnes qui ont atteint l'âge $x + t - 2$ il y a deux ans et ainsi de suite.

Le nombre de morts. — Cela nous amène à parler du symbole d_x, lequel représente le nombre qui, parmi les l_x personnes atteignant l'âge x, mourra avant d'atteindre l'âge $x + 1$. Nous voyons donc que $d_x = l_x - l_{x+1}$ d'où $l_{x+1} = l_x - d_x$.

Taux de mortalité. — q_x représente la probabilité qu'une personne âgée exactement de x années va mourir dans les douze mois qui suivent immédiatement son anniversaire de naissance. Ceci est connu sous le nom de taux de mortalité.

Nous avons vu que de l_x personnes qui atteignent l'âge x, d_x meurent avant d'atteindre l'âge $x + 1$; il en découle donc que $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ d'où $d_x = l_x q_x$.

Probabilité de survivre un an. — La probabilité qu'une personne âgée exactement de x années va survivre la période d'un an est représentée par le symbole p_x.

De l_x personnes âgées exactement de x années, l_{x+1} personnes atteignent l'âge $x + 1$; donc $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$.

Comme une personne d'âge x doit ou survivre un an ou mourir durant l'année, on voit que $p_x + q_x = 1$ d'où $p_x = 1 - q_x$.

De la définition de la table de mortalité donnée plus haut il découle que la valeur d'une telle table dépend simplement de sa capacité à nous fournir les rapports nécessaires représentant telles probabilités de vie ou de mort dont nous pouvons avoir besoin. Les nombres apparaissant dans les colonnes de l_x et de d_x n'ont aucune importance par eux-mêmes; ce qui importe, c'est qu'ils soient les uns aux autres dans les proportions voulues permettant ainsi le calcul des probabilités et des fonctions monétaires qui en dépendent. Nous verrons plus loin en quoi consistent ces fonctions monétaires.

Si donc nous possédons la valeur de q_x à chaque âge de 0 à la fin de la table, nous pouvons commencer la table avec un nombre quelconque de naissances, ordinairement un gros chiffre, soit 100,000 ou même 1,000,000, et en multipliant ce nombre par q_0, obtenir $l_0 q_0 = d_0$, le nombre de morts survenant de la naissance à l'âge 1.

Soustrayant d_0 de l_0 on obtient l_1, le nombre de per-
112 sonnes survivant jusqu'à l'âge 1 parmi mettons 100,000 naissances; si on multiplie l_1 par q_1, on obtient d_1. Soustrayant d_1 de l_1, on obtient l_2 et ainsi de suite jusqu'à l'âge ω, où $l_\omega = 0$; ω désignant l'âge limite de la table; c'est-à-dire l'année de vie durant laquelle le dernier survivant meurt.

De ce qui précède, on voit facilement que pour construire une table de mortalité, ce qu'il nous faut c'est toute la série de q_x, de l'âge 0 à l'âge limite de la table.

En pratique, lorsque nous analysons la mortalité de la population d'un pays, nous avons généralement à notre disposition *a*) les chiffres d'un ou de plusieurs recensements, donnant le nombre de personnes vivantes à chaque âge. Dans certains cas, ces nombres ne nous sont donnés que par groupe d'âges, soit le nombre de personnes vivant de 0 à 4 ans, de 5 à 9 ans et ainsi de suite. Ceci demande alors l'emploi d'une méthode de calcul toute particulière.

b) Le nombre des décès survenant à chaque âge durant le cours de chaque année du calendrier, tels que fournis par les registres d'état civil.

Les données d'un ou de plusieurs recensements peuvent être utilisées dans la préparation d'une table de mortalité; toutefois la méthode la plus simple et la seule que nous allons considérer ici, n'utilise qu'un seul recensement, et les décès d'un nombre égal d'années (ordinairement petit) avant et après la date du recensement laquelle est située au milieu de la période.

Les registres d'état civil nous fournissent le nombre de morts dans l'année d'âge x à $x + 1$ survenant au cours d'une année, mais ni eux ni les recensements nous donnent directement le nombre de personnes atteignant l'âge exact de x années parmi lesquelles ces décès surviennent tel que le veut la table de mortalité.

Il nous faudra donc utiliser un symbole que nous n'avons pas encore vu dans cet article soit L_x. Ce symbole diffère de l_x en ce que ce dernier, comme nous l'avons déjà vu, représente le nombre de personnes qui, selon la table, atteint l'âge de x années exactement, alors que L_x représente le nombre de personnes vivant entre les âges x et $x + 1$ tel qu'exprimé dans un recensement. En effet si en aucun temps on vous demande votre âge et que vous dites que vous avez, mettons 30 ans, ceci ne veut pas dire que vous êtes âgé exactement de 30 ans mais bien le plus souvent que vous avez un âge fractionnaire quelconque situé entre 30 et 31 ans. Tout le groupe des personnes qui sont dans votre cas est représenté par le symbole L_{30}.

Ce symbole est utilisé dans le rapport suivant $\frac{d'_x}{L'_x}$ où les symboles sont accentués afin de laisser voir qu'ils ne sont pas ceux qui apparaîtront finalement dans la table de mortalité, mais qu'ils représentent des chiffres provenant directement des statistiques démographiques.

Ce rapport est connu sous le nom de taux central de mortalité et est désigné par m_x.

Si nous admettons l'hypothèse que les décès de l'âge x à $x + 1$ sont uniformément distribués sur toute cette année d'âge, nous pouvons faire les transformations suivantes:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2} d_x} = \frac{2q_x}{2 - q_x} \quad \text{d'où} \quad q_x = \frac{2m_x}{2 + m_x}.$$

Si donc nous obtenons des recensements et des registres d'état civil les valeurs de m_x à chaque âge, les valeurs de q_x, dont nous avons besoin pour construire la table de mortalité proprement dite, peuvent en être obtenues également pour chaque âge comme nous venons de le voir.

Nous avons déjà vu comment, ayant en mains toutes les valeurs de q_x voulues, nous pouvons construire la table de mortalité.

Il est bon de faire remarquer ici, avant d'aller plus loin, qu'assez souvent les taux de mortalité dérivés des statistiques sont très irréguliers d'un âge à l'autre, ceci étant causé le plus souvent par des erreurs d'âge; il nous faudra alors graduer ces taux afin d'obtenir une progression plus uniforme des taux de mortalité tout en en retenant les caractéristiques les plus importantes. Ce procédé de graduation peut être regardé comme un effort fait dans le but de découvrir la véritable loi de la mortalité cachée sous les résultats grossiers provenant directement des statistiques.

Et maintenant pour terminer voyons en quoi consistent les fonctions monétaires dont il a été question au début, ce qu'elles sont et leur utilité. Retenons en tout premier lieu que ces fonctions, comme nous allons le voir, ne représentent rien de particulier, mais qu'elles ne sont que des instruments indispensables, enfants de la nécessité, qui nous servent dans nos calculs en nous permettant de calculer vite et avec précision.

Deux exemples bien simples serviront à illustrer la provenance et l'utilité de ces fonctions.

Quelle est la valeur d'une rente viagère d'un dollar par année pour une personne âgée de x années, dont le premier versement est dû immédiatement, le second, dans un an et ainsi de suite jusqu'au décès.

Calculons tout d'abord la valeur totale de toutes les annuités payables à toutes les personnes vivantes d'âge x soit l_x personnes, et nous diviserons ensuite le tout par l_x afin d'obtenir la valeur désirée pour chaque individu.

Un dollar payable aujourd'hui à l_x personnes égale l_x dollars.

Un dollar payable dans un an à chacun des survivants égale Vl_{x+1} dollars,[1] ou V représente la valeur présente de un dollar payable dans un an soit $\frac{1}{1+i}$ où i est le taux de l'intérêt exigible.

Un dollar payable dans 2 ans toujours à chacun des survivants à cette date égale V^2l_{x+2} dollars où V^2 représente la valeur présente d'un dollar payable dans deux ans et ainsi de suite.

Nous avons donc comme valeur totale de toutes les rentes, $l_x + Vl_{x+1} + V^2l_{x+2} + V^3l_{x+3} + \text{- - -}$ etc. jusqu'à la fin de la table, ou en d'autres mots, jusqu'au décès du dernier survivant.

Si, maintenant, nous divisons cette somme par l_x, nous obtenons la valeur d'une rente viagère pour une personne d'âge x, soit: $a_x = \dfrac{l_x + Vl_{x+1} + V^2l_{x+2} + V^3l_{x+3} + \text{- - - -}}{l_x}$

Comme vous le devinez facilement, le calcul d'une telle expression fractionnaire présenterait un travail très laborieux et à cause de la multiplicité des opérations prêterait à de nombreuses erreurs.

De la nécessité de travailler vite et bien sont nées les fonctions monétaires dont il est question, lesquelles dérivent directement d'expressions longues et compliquées comme celle qui précède.

Si on multiplie numérateur et dénominateur d'une fraction par une même quantité on ne change pas la valeur de la fraction. Multiplions donc ici numérateur et dénominateur par V à la puissance x soit V^x et nous en obtenons:

---

[1] A cause des difficultés de la composition, on a dû remplacer le symbole v par V. Le lecteur voudra bien en tenir compte. — A.

$$a_x = \frac{V^x l_x + V^{x+1} l_{x+1} + V^{x+2} l_{x+2} + V^{x+3} l_{x+3} + \cdots}{V^x l_x}$$

Nous avons maintenant notre première fonction monétaire soit D_x qui est égale à $V^x l_x$. Remplaçons chaque terme de la fraction par le nouveau symbole correspondant et nous avons

$$a_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots}{D_x}$$

Cette nouvelle expression quoique plus simple que la précédente présente encore une série d'additions laquelle serait trop longue pour le travail de tous les jours. Une seconde fonction monétaire a donc été conçue, N_x laquelle justement égale à chaque âge la somme de tous les D de l'âge donné jusqu'à la fin de la table. Ainsi:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots$$
$$N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots$$
$$N_{x+2} = D_{x+2} + D_{x+3} + D_{x+4} + \cdots$$

etc.

Ces fonctions ont été calculées pour différentes tables et différents taux d'intérêts; nous n'avons qu'à choisir celles qui conviennent le mieux à nos calculs. Et alors le calcul d'une rente viagère pour une personne d'âge x se limite à une seule division soit $a_x = \frac{N_x}{D_x}$.

Il existe une autre fonction se rapportant au calcul de rente, mais qui est peu usitée; c'est S_x laquelle égale à chaque âge la somme de tous les N de l'âge donné jusqu'à la fin de la table. Ainsi:

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots$$
$$S_{x+1} = N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \cdots$$
$$S_{x+2} = N_{x+2} + N_{x+3} + N_{x+4} + \cdots$$

etc.

Finalement afin d'arriver aux fonctions ayant trait à l'assurance, étudions la valeur d'une assurance d'un dollar payable à la fin de l'année dans laquelle survient le décès pour une personne d'âge x, soit A_x.

Procédons comme dans l'exemple précédent, c'est-à-dire établissons le coût d'une telle assurance pour toutes les l_x personnes âgées de x années, et ensuite nous diviserons le coût total par l_x afin d'obtenir le coût par tête.

Parmi les l_x personnes vivantes âgées de x années, d_x mourront avant d'atteindre leur prochain anniversaire. Si nous payons un dollar en regard de chaque décès nous paierons donc la somme de d_x dollars et ce dans un an d'aujourd'hui. La valeur présente de ces réclamations est donc Vd_x où V a la valeur que nous lui connaissons déjà.

De même d_{x+1} personnes mourront durant la deuxième année et la valeur présente des versements effectués en regard de ces décès est V^2d_{x+1}. Egalement la valeur présente des versements effectués à la fin de la troisième année est V^3d_{x+2}, et ainsi de suite.

Additionnant toutes ces valeurs présentes nous obtenons le coût total actuel d'une assurance de un dollar payable au décès de chacune des l_x personnes, soit

$$Vd_x + V^2d_{x+1} + V^3d_{x+2} + \text{- - - -}.$$

Divisons le tout par l_x et nous aurons:

$$A_x = \frac{Vd_x + V^2d_{x+1} + V^3d_{x+2} + \text{- - - -}}{l_x}.$$

Ici encore ce calcul était beaucoup trop onéreux et nous avons eu recours à la même transformation, soit de multiplier numérateur et dénominateur par V^x pour obtenir

$$A_x = \frac{V^{x+1}d_x + V^{x+2}d_{x+1} + V^{x+3}d_{x+2} + \cdots}{V^x l_x}$$

$$= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots}{D_x}$$

où $C_x = V^{x+1}d_x$, $C_{x+1} = V^{x+2}d_{x+1}$, etc. et finalement

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \text{ où } M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots$$

Ici comme précédemment des opérations fort laborieuses et compliquées se résument en définitive en une simple division.

Nous utilisons aussi quelquefois une dernière fonction se rapportant au calcul d'assurance, dans certains cas où la somme assurée varie d'une année à l'autre, et c'est R_x laquelle est égale à chaque âge à la somme de tous les M de l'âge donné jusqu'à la fin de la table. Ainsi:

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots$$
$$R_{x+1} = M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + \cdots$$
$$R_{x+2} = M_{x+2} + M_{x+3} + M_{x+4} + \cdots$$

etc.

Dans certaines tables de mortalité, les plus complètes, vous trouverez quelquefois certains symboles que nous n'avons pas vus ici, tels μ_x, T_x, e_x. Nous vous en faisons grâce car ils demanderaient de longues explications et sont en définitive très peu usités.

*

J'ose espérer que la lecture de cet article aura fait disparaître dans l'esprit de ceux qu'il aura intéressés la notion beaucoup trop répandue et facilement acceptée que toutes ces choses sont trop techniques pour le profane. Si cet article a réussi à éveiller la curiosité, il aura atteint son but.