

Mortalité prospective en cas de petits échantillons : modélisation à partir d'informations externes en utilisant l'approche de Bongaarts

Frédéric Planchet and Aymric Kamega

Volume 80, Number 2, 2012

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/1091846ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/1091846ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

Faculté des sciences de l'administration, Université Laval

ISSN

1705-7299 (print)

2371-4913 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Planchet, F. & Kamega, A. (2012). Mortalité prospective en cas de petits échantillons : modélisation à partir d'informations externes en utilisant l'approche de Bongaarts. *Assurances et gestion des risques / Insurance and Risk Management*, 80(2), 263–290. <https://doi.org/10.7202/1091846ar>

Article abstract

This study presents a simple method for modeling future mortality of an insured population from external information, in case of insufficient historical data. Thus, with a parametric adjustment, an assumption on the form of changes in the level of mortality (linear or exponential evolution) and an expert opinion on the generational life expectancy at a given age, this work presents the construction of a complete mortality table taking into account future mortality improvement. An example implementation is presented with data of the insured population of sub-Saharan Africa francophone.

**Mortalité prospective en cas de petits
échantillons : modélisation à partir
d'informations externes en utilisant
l'approche de Bongaarts**
par Frédéric Planchet et Aymric Kamega

RÉSUMÉ

Cette étude présente une méthode simple pour modéliser la mortalité d'expérience future à partir d'informations externes, en l'absence de données d'historique suffisantes. Ainsi, avec un ajustement paramétrique, une hypothèse sur la forme de l'évolution du niveau de mortalité (évolution linéaire ou exponentielle) et un avis d'expert sur l'espérance de vie générationnelle à un âge donné, ce travail présente la construction d'une table de mortalité prospective complète. Un exemple de mise en œuvre est présenté avec des données de la population assurée d'Afrique subsaharienne francophone.

Mots clés : Espérance de vie; projection de mortalité; extrapolation par période; extrapolation par avis d'expert; modèle de Bongaarts; risque d'avis d'expert.

Les auteurs :

Frédéric Planchet est professeur à l'ISFA et actuaire associé chez WINTER & Associés. Contact : frederic.planchet@univ-lyon1.fr

Aymric Kamega est docteur en sciences de gestion, maître de conférences associé à l'EURIA et actuaire chez WINTER & Associés. Contact : aymric.kamega@univ-brest.fr.

Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) – 50 avenue Tony Garnier – 69366 Lyon Cedex 07 – France.

EURO-Institut d'Actuariat (EURIA) – 6 avenue le Gorgeu – CS 93837 – 29238 Brest Cedex 3 – France.

WINTER & Associés – 43/47 avenue de la grande armée - 75116 Paris – France.

Remerciements/Thanks :

Version 1.5 du 05/09/2012. Les auteurs remercient les deux relecteurs anonymes dont les commentaires ont permis d'améliorer sensiblement le présent travail./The authors thank the two anonymous reviewers whose comments significantly improved this work.

This study presents a simple method for modeling future mortality of an insured population from external information, in case of insufficient historical data. Thus, with a parametric adjustment, an assumption on the form of changes in the level of mortality (linear or exponential evolution) and an expert opinion on the generational life expectancy at a given age, this work presents the construction of a complete mortality table taking into account future mortality improvement. An example implementation is presented with data of the insured population of sub-Saharan Africa francophone.

Keywords: Life expectancy; mortality projection; extrapolation by period; extrapolation by expert opinion; Bongaarts model; risk of expert opinion.

I. INTRODUCTION

Avec les référentiels Solvabilité 2 (en Europe) et IFRS, les assureurs sont tenus d'évaluer leurs engagements d'assurance à partir d'hypothèses réalistes et fines. En pratique, pour les contrats de rentes viagères, les assureurs sont ainsi appelés à construire des tables de mortalité prenant en compte le niveau actuel et l'évolution attendue de la mortalité de leur population assurée (il s'agit de tables d'expérience prospectives spécifiques à chaque assureur). Cet exercice peut toutefois être complexe car (*cf.* Kamega, 2011) :

- les théories et les tendances que l'on peut observer et anticiper au sein de la population générale ne sont pas directement vérifiées au sein de la population assurée, compte tenu de l'existence d'une sélection à l'entrée qui conduit à disposer d'une population assurée différente de la population générale (et en général présentant des taux de décès inférieurs à ceux de la population générale à tous les âges);
- l'assureur ne peut pas directement inclure l'évolution attendue des différentes causes de décès dans ses analyses et ses anticipations car l'accès à l'information sur les causes de décès est généralement limité pour les populations assurées;
- la construction d'une table d'expérience prospective conduit à déterminer une dérive temporelle, et nécessite à ce titre un recul historique et un volume de données que les assureurs n'ont pas dans leur portefeuille.

Généralement, deux approches sont envisagées pour construire des tables prospectives à partir de données d'expérience : une démarche endogène à partir des seules données du portefeuille ou une démarche exogène utilisant une référence externe de mortalité (*cf.* Planchet et Lelieur, 2007).

Aujourd'hui, la seconde approche est souvent retenue pour pallier les difficultés associés à des échantillons de taille réduite, comme souvent en ce qui concerne les portefeuilles d'expérience, même à l'échelle nationale pour un pays comme la France. En effet, à titre d'exemple pour la construction des tables d'expérience TGH/TGF05, réglementaires en France depuis 2007, les données d'expérience par génération ont été positionnées par rapport aux tables de la population générale française de 1962 à 2000 (sachant que les données d'expérience utilisées pour la construction de ces tables réglementaires comptent 700 000 rentiers et 2 000 000 de lignes et couvrent la période 1993-2005, *cf.* Planchet, 2006).

De manière générale, plus le périmètre des données d'expérience est restreint (faible recul, faible exposition, faible nombre de rentiers, etc.), plus les difficultés pour construire une loi d'expérience prospective sont nombreuses et le recours à des informations externes (positionnement par rapport à des tables de mortalité externes, calibrage de paramètres par avis d'expert, etc.) devient nécessaire.

Dans ce contexte ce travail s'attache à proposer une démarche pour construire, sur la base d'informations externes, des lois d'expérience prospectives à partir de petits échantillons. En pratique, la solution proposée consiste à intégrer des contraintes liées aux avis d'expert dans la modélisation des taux de décès prospectifs.

Cette étude résume dans un premier temps (*cf.* section 2) les étapes du processus du choix du modèle retenu. Dans un second temps (*cf.* section 3), on présente l'ajustement du modèle de Bongaarts, à partir de données statistiques d'une part et à partir de références externes (avis d'expert) d'autre part. La troisième étape (*cf.* section 4) est alors consacrée à la mise en œuvre du modèle pour anticiper la mortalité future de la population étudiée. Des tests de sensibilité y sont également réalisés dans un contexte d'assurance.

L'ensemble des travaux est conduit sur la base d'une population en « groupe fermé », arrêtée à une date d'inventaire, compte tenu du contexte de l'étude (évaluation de l'engagement de l'assureur en termes de rentes viagères).

2. CHOIX DU MODÈLE POUR PROJETER LA MORTALITÉ

Dans cette section, on présente les étapes du processus du choix du modèle compte tenu, entre autres, de ces contraintes sur le nombre de paramètres et sur la prise en compte d'une dimension qualitative.

Ainsi, dans un premier temps on présente les principales problématiques rencontrées dans le cadre d'une projection de la mortalité d'une population assurée (*cf.* sous-section 2.1), puis on présente et justifie le choix du modèle de Bongaarts.

2.1 Réflexions pour la modélisation de la mortalité d'expérience future

Comme indiqué en introduction, l'existence d'une sélection à l'entrée conduit à disposer d'une population assurée différente de la population générale. Ainsi, en pratique l'allongement de la durée de vie au sein de la population générale d'un pays ne se traduit pas automatiquement par un allongement analogue au sein de la population assurée d'un organisme assureur.

Une autre différence significative entre ces deux populations porte sur la profondeur des données disponibles (*cf.* Barrieu et al., 2010) : généralement de 5 à 15 ans d'historique au sein d'une population assurée, contre plusieurs dizaines d'années au sein d'une population générale. C'est notamment pour cette raison que les actuaires modélisent généralement la tendance de la mortalité de la population assurée à partir de la tendance de la mortalité de la population générale, malgré les différences existant entre ces deux populations. Cette approche n'est toutefois pas satisfaisante et c'est dans ce contexte qu'une réflexion s'impose sur la procédure à suivre pour projeter la mortalité d'expérience.

Ainsi, cette sous-section présente quelques points d'attention propres à la modélisation de la mortalité future de la population assurée (une présentation plus complète des points d'attention est présentée dans Kamega et Planchet, 2012). Les risques liés à l'incertitude des projections de mortalité ne sont toutefois pas repris en détail ici (pour information, une revue de ces risques est présentée dans Booth et Tickle, 2008 et Kamega et Planchet, 2011b).

Dans un contexte où le volume des données d'expérience de la population assurée est limité, les problématiques liées à l'estimation des paramètres et de la tendance future de la mortalité revêtent une importance particulière dans le choix du modèle.

En effet, d'une part, lors de l'ajustement des paramètres aux données il existe un risque que la valeur estimée diffère de la valeur correspondant au risque sous-jacent. Ce risque est directement lié aux fluctuations d'échantillonnage (*cf.* Kamega et Planchet (2010) et Kamega et Planchet (2011b) pour une présentation du risque d'estimation en présence de fluctuations d'échantillonnage) et est d'autant plus important que la taille de l'échantillon est petite. En conséquence,

dans la présente étude, une attention particulière doit être accordée au nombre de paramètres dans le modèle.

D'autre part, la constitution de la tendance future pour la mortalité doit idéalement être le fruit de la combinaison d'un ajustement statistique aux données passées, et d'un ajustement par avis d'expert pour tenir compte du contexte futur. En effet, les projections de mortalité ne doivent pas se limiter à des approches descriptives, consistant à reproduire les tendances passées, mais à des approches prédictives, consistant à anticiper le futur. À cet effet, la prise en compte d'une dimension quantitative et qualitative est fortement souhaitable pour les projections de mortalité. En pratique toutefois, en présence d'un faible volume de données, la dimension quantitative pour déterminer les tendances futures de la mortalité ne peut pas être intégrée car on ne dispose pas des tendances passées. Les tendances futures de mortalité sont alors complètement déterminées à partir d'une dimension qualitative (à partir d'informations et de contraintes externes). Aussi, dans la présente étude, une attention particulière doit également être accordée à la prise en compte d'une dimension qualitative dans le modèle.

2.2 Approche de Bongaarts

On considère ici le modèle logistique décalé de Bongaarts (2004) défini par :

$$\mu_{x,t} = \frac{\alpha_t e^{\beta x}}{1 + \alpha_t e^{\beta x}} + \gamma_t,$$

où les paramètres α_t et γ_t sont dépendants du temps, et le paramètre β est indépendant du temps (Bongaarts (2004) constatant empiriquement que le paramètre β dépend peu du temps).

Dans cette spécification des taux de décès instantanés, on reconnaît facilement une adaptation du modèle paramétrique proposé par Thatcher (1999) dans laquelle les taux de décès ne sont pas constants au cours du temps¹. On retrouve ainsi la dimension explicative du modèle, dans laquelle Bongaarts (2004) considère que la composante liée au taux instantané de décès environnemental (notée $(\mu_{x,t})_e = \gamma_t$) et celle

liée au vieillissement (notée $(\mu_{x,t})_v = \frac{\alpha_t e^{\beta x}}{1 + \alpha_t e^{\beta x}}$) dépendent du temps.

Pour mémoire, le paramètre γ_t représente généralement l'ajustement de la mortalité pour les jeunes adultes, le paramètre α_t représente le

niveau de mortalité et le paramètre e^β représente l'augmentation du risque de mortalité avec l'âge.

Concernant la composante des taux de décès liée au vieillissement, Bongaarts relève en particulier que l'évolution à la hausse ou à la baisse de la mortalité au cours du temps peut être interprétée comme un décalage d'âge cours du temps. Cette interprétation est possible car il montre que la composante vieillesse de la mortalité à l'âge x pour l'année t est identique à la valeur de la composante à l'âge $x - S_{t_0,t}$ pour

l'année t_0 , soit $(\mu_{x,t})_v = \frac{\alpha_{t_0} e^{\beta(x-S_{t_0,t})}}{1 + \alpha_{t_0} e^{\beta(x-S_{t_0,t})}}$, avec $S_{t_0,t} = -\frac{\ln(\alpha_t/\alpha_{t_0})}{\beta}$. Cette

propriété, qui n'est toutefois pas valable pour les âges proches de 0, est à l'origine de l'expression « modèle logistique décalé ».

Sur la base de ce modèle, Bongaarts (2004) propose une procédure en quatre étapes pour anticiper la mortalité future :

- 1) Calibrer le modèle de Thatcher $\mu_x = \frac{\alpha e^{\beta x}}{1 + \alpha e^{\beta x}} + \gamma$ pour différentes périodes ou années passées t (ajustement statistique). Ce calibrage permet de disposer de séries pour les paramètres α_t , β_t et γ_t .
- 2) Fixer la valeur du paramètre β en considérant la moyenne de β_t , et déterminer à nouveau les séries pour les paramètres α_t et γ_t (les nouvelles séries ne devant différer que légèrement de celles issues de la première étape).
- 3) Extrapoler les paramètres α_t et γ_t obtenus dans l'étape 2 sur la durée de projection souhaitée.
- 4) En déduire une projection des taux de mortalité à partir du modèle de Bongaarts, sur la base du paramètre β et des paramètres extrapolés α_t et γ_t .

Cette approche consiste à ajuster les observations de chaque année à l'aide d'un modèle paramétrique (en l'occurrence ici le modèle de Thatcher), puis à modéliser l'évolution au cours du temps de ces paramètres afin de fournir des projections de la mortalité dans le futur. Cette démarche présente de nombreux atouts au regard, entre autres, des principes et caractéristiques évoquées ci-dessus.

Ainsi, l'approche de Bongaarts :

- permet de ne pas majorer le nombre de paramètres du modèle de Lee-Carter classique : l'information annuelle est condensée dans un petit nombre de paramètres;

- est moins contraignante dans la dimension temporelle que le modèle de Lee-Carter classique, étant donné qu'elle fait intervenir deux paramètres temporels (contre un seul dans Lee-Carter);
- considère que l'amélioration de la mortalité au cours du temps évolue dans le temps (contrairement au modèle de Lee-Carter). En effet, Bongaarts (2004) montre que l'amélioration de la mortalité au cours du temps évolue au fil des années (il considère notamment que cette amélioration est égale au produit du taux d'évolution de la mortalité selon l'âge et de la sensibilité au temps de l'espérance de vie, ces deux composantes évoluant dans le temps);
- accorde une attention particulière à la modélisation de la mortalité aux grands âges;
- fournit une dimension qualitative à la modélisation, d'une part compte tenu de la forme paramétrique du modèle sous-jacent (modèle de Thatcher, avec un paramètre au titre de la mortalité environnementale, un paramètre au titre du niveau de mortalité et un paramètre au titre de l'augmentation du risque de décès avec l'âge), et d'autre part compte tenu de la propriété de « décalage » du modèle de Bongaarts (qui permet d'interpréter l'évolution de la mortalité au cours du temps comme un décalage d'âge).

De surcroît, Bongaarts (2004) précise que son approche est adaptée à des populations pour lesquelles on ne dispose qu'une ou de très peu d'année(s) d'historique, ce qui est souvent le cas dans les pays non industrialisés (les données dans ces pays étant souvent limitées). Dans ce cas, Bongaarts (2004) indique que la projection des paramètres α_t et γ_t se fait alors uniquement à partir d'hypothèses et que son approche devient de fait principalement qualitative.

3. AJUSTEMENT DU MODÈLE BONGAARTS

Après avoir présenté et justifié le choix de l'approche de Bongaarts dans la section précédente, il convient ici d'en effectuer un ajustement. L'ajustement est réalisé à partir des données individuelles d'une part (ajustement statistique, *cf.* 3.1) et à partir d'informations externes d'autre part (ajustement par avis d'expert, *cf.* 3.2).

3.1 Ajustement statistique

La méthode retenue est l'ajustement par (pseudo) maximum de vraisemblance discret (méthode de De Vylder, *cf.* Delwarde et Denuit, 2006 ou Planchet et Thérond, 2011).

Soit d_x le nombre de décès observé à l'âge x , parmi R_x individus soumis au risque de décès à cet âge. On considère alors le nombre de décès observé d_x comme une réalisation de variables aléatoires D_x de la loi binomiale de paramètres $(R_x; q_x)$, où q_x correspond à la probabilité annuelle de décès théorique à l'âge x . La vraisemblance associée à la réalisation d'un nombre d_x de décès s'écrit alors $\binom{R_x}{d_x} q_x^{d_x} (1 - q_x)^{R_x - d_x}$,

et on cherche alors à maximiser $\sum_x d_x \ln(q_x) + (R_x - d_x) \ln(1 - q_x)$.

En pratique toutefois, on réalise généralement l'approximation de la loi de \hat{q}_x (estimation des taux de décès basée sur l'échantillon) par une loi normale, et en remplaçant la variance théorique par la variance estimée le problème de maximisation ci-dessus peut être valablement approximé par un problème de minimisation de (cf. Delwarde et Denuit, 2006 ou Planchet et Théron, 2011) :

$$\sum_x \frac{R_x}{\hat{q}_x (1 - \hat{q}_x)} (q_x - \hat{q}_x)^2.$$

Dans ce cas, la méthode de vraisemblance est ramenée, pour chaque année (ou période), à un problème de moindres carrés pondérés dans le cas non linéaire.

3.1.1 Évaluation du taux de décès théorique

Les quantités R_x et \hat{q}_x étant observées (en particulier, \hat{q}_x est déterminé à partir de l'estimation des taux bruts de Hoem, cf. une description de la méthode dans Planchet et Théron, 2011), il reste à déterminer l'expression de q_x (taux de décès théorique) pour résoudre le problème de moindres carrés pondérés. On considère à cet

effet $q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \mu_u du\right) = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \left(\frac{\alpha e^{\beta u}}{1 + \alpha e^{\beta u}} + \gamma\right) du\right)$. En

posant $v_u = 1 + \alpha e^{\beta u}$ et en intégrant par changement de variable (à l'image de ce qui est proposé dans Planchet, 2010), on obtient

$$q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} \frac{v'_u}{\beta v_u} du\right) \exp(-\gamma) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\beta} \int_x^{x+1} \frac{1}{v} dv\right) \exp(-\gamma),$$

et on en déduit :

$$q_x = 1 - \exp(-\gamma) \left(\frac{v_x}{v_{x+1}}\right)^{1/\beta},$$

avec $v_u = 1 + \alpha e^{\beta u}$. C'est à l'aide de cette expression que le problème d'optimisation est résolu.

3.1.2 Détermination des valeurs initiales des paramètres

L'algorithme utilisé pour l'estimation des paramètres ne converge vers la vraie valeur du paramètre qu'à condition de partir d'une valeur initiale assez proche de cette valeur. Une attention particulière doit ainsi être accordée à la détermination de valeurs initiales acceptables.

À cet effet, on s'appuie sur une propriété présentée dans Planchet et Thérond (2011), sous l'hypothèse que les taux suivent une loi de Makeham. Cette hypothèse est acceptable ici étant donné qu'en pratique le calibrage est réalisé sur les âges compris entre 30 et 55 ans (cf. section 4), et que pour ces âges le modèle de Thatcher est assimilable au modèle de Makeham, étant donné que $\alpha e^{\beta x}$ est généralement petit (il s'agit de la première des deux propriétés importantes soulevées par Thatcher (1999) dans son article).

Avec le modèle de Makeham, on a $q_x = 1 - \exp\left(-\int_x^{x+1} (\alpha e^{\beta u} + \gamma) du\right)$, soit au final $q_x = 1 - e^{-\gamma} \left[\exp\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]^{e^{\beta x}(e^{\beta}-1)}$. On observe alors que l'on a $\ln(1 - q_x) = -\gamma + e^{\beta x}(e^{\beta} - 1) \times \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Pour les q_x proches de zéro, on peut faire l'approximation $\ln(1 - q_x) \approx -q_x$ et on a donc $-q_x \approx -\gamma - \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x}(e^{\beta} - 1)$. Il en résulte que $q_{x+1} - q_x \approx \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x}(e^{\beta} - 1)^2$, ce qui conduit à remarquer en prenant le logarithme que :

$$\ln(q_{x+1} - q_x) \approx \ln(e^{\beta}) \times x + \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta} - 1)^2\right).$$

Sous l'hypothèse que sur les âges retenus pour l'ajustement, les taux de mortalité suivent une loi de Makeham, les points $(x, y = \ln(q_{x+1} - q_x))$ sont donc alignés sur une droite de pente β . Il s'agit ainsi de réaliser une régression linéaire classique, par moindres carrés, pour en déduire des valeurs initiales pour les paramètres du modèle de Thatcher : la pente de la droite et l'ordonnée à l'origine permettent de déterminer une estimation de β et α ; et la relation $\gamma = -\ln(1 - q_x) - \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x}(e^{\beta} - 1)$ permet de déterminer une estimation

de γ (en vérifiant que $-\ln(1-q_x) - \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x} (e^\beta - 1)$ dépend faiblement de l'âge x^2).

Dans le cadre de cette étude, on se limite pour les illustrations au test de significativité globale des paramètres. On suppose ici que ce test est réalisé à partir de la statistique du rapport des vraisemblances qui suit une distribution du Khi-deux sous l'hypothèse nulle H_0 (cette statistique compte parmi les plus utilisées dans ce contexte, avec la statistique de Wald, cf. par exemple Klein et Moeschberger (2005) pour une présentation illustrée).

On considère donc $H_0 : \delta = 0$, soit :

$$\chi_L^2(p) = 2 \left[L(\hat{\delta}) - L(0) \right],$$

où δ représente le vecteur des paramètres (α , β et γ ici) et p représente la dimension δ .

3.2 Ajustement par avis d'expert

L'étape 1 de l'approche de Bongaarts préconise de réaliser l'ajustement statistique pour différentes années ou périodes passées. Toutefois, dans le cadre de cette étude on considère des données limitées et insuffisantes pour réaliser l'ajustement statistique pour différentes années (ou périodes). Aussi, on considère ici, dans le cadre de l'étape 1 de l'approche de Bongaarts, un ajustement statistique pour une année (ou période) de référence uniquement. L'étape 2 de l'approche de Bongaarts relative au paramètre β_t est alors immédiate (puisque on a $\beta_t = \beta$). La projection des paramètres γ_t et α_t pour l'étape 3 est ensuite réalisé par avis d'expert. À cet effet, on distingue la projection du paramètre γ_t et celle du paramètre α_t .

3.2.1 Présentation de la méthode d'ajustement par avis d'expert

On présente ici la démarche et les hypothèses retenues pour tenir compte d'avis d'expert pour la projection des paramètres γ_t et α_t , représentant respectivement la mortalité environnementale et le niveau de la mortalité.

Ajustement de la mortalité environnementale

Pour le paramètre γ_t , représentant l'ajustement au titre de la mortalité environnementale (indépendant de l'âge mais concernant principalement les jeunes adultes), il sera supposé qu'il est constant tout au long de la durée de projection. On a ainsi $\gamma_t = \gamma$.

Ajustement du niveau de la mortalité : première approche

Pour le paramètre α_t , représentant le niveau de mortalité, deux approches sont envisagées pour introduire l'avis d'expert.

La première consiste à utiliser les caractéristiques du modèle logistique décalé. Dans ce cas, pour chaque t futur, on déduit les α_t à partir des décalages d'âge $S_{t_0,t}$ fixés par avis d'expert. Cette approche apparaît toutefois faiblement appréhensive, ce qui limite une prise en compte optimale de l'avis d'expert.

Ajustement du niveau de la mortalité : seconde approche (présentation)

On se tourne alors vers une seconde approche, qui consiste à utiliser l'espérance de vie générationnelle à une date t future et à un âge pivot x donné, à l'image de ce qui est proposé dans Planchet (2007). Cette notion, notée $e_{x,t}$, est intuitivement plus aisée à intégrer et se calcule par (en en considérant une version discrète simplifiée) :

$$e_{x,t} = \sum_{h>0} \prod_{k=0}^{h-1} (1 - q_{x+k,t+k}),$$

où h et k sont des entiers. En reprenant l'expression des q_x du modèle retenu, on obtient :

$$e_{x,t} = \sum_{h>0} \exp(-\gamma h) \prod_{k=0}^{h-1} \left(\frac{v_{x+k,t+k}}{v_{x+1+k,t+k}} \right)^{1/\beta},$$

avec $v_{u,t} = 1 + \alpha_t e^{\beta u}$. On remarque ici que l'on suppose que la répartition des décès entre x et $x + 1$ s'observe à une même date t : on considère ainsi une évolution en escalier des taux de décès au fil du temps.

Dans le cadre de cette seconde approche, on pose ensuite une expression simple pour projeter α_t , en fonction de t et de deux paramètres a_α et b_α :

- soit $\alpha_t = a_\alpha \times t + b_\alpha$, si l'on anticipe une évolution linéaire du niveau de mortalité,
- ou $\alpha_t = \exp(a_\alpha \times t + b_\alpha)$, si l'on anticipe une évolution exponentielle du niveau de mortalité.

Quelques indications pour faciliter le choix de l'expert entre ces deux expressions pour la projection du niveau de mortalité sont présentées dans le sous-paragraphe suivant.

On en déduit alors facilement une expression de la forme $e_{x,t} = \varphi_{x,t}(a_\alpha, b_\alpha)$ pour l'espérance de vie générationnelle. On se ramène au final à chercher $\theta = (a_\alpha, b_\alpha)$ minimisant l'écart quadratique entre la valeur à dire d'expert pour l'espérance de vie générationnelle (notée $e_{x,t}(\text{expert})$) à un âge pivot x et à une date t) et la prédiction de cette valeur selon l'expression de $e_{x,t}$ ci-dessus. On cherche ainsi à résoudre :

$$\text{Min}_{(a_\alpha, b_\alpha)} \left[\left(e_{x,t}(\text{expert}) - \varphi_{x,t}(a_\alpha, b_\alpha) \right)^2 \right],$$

avec $\varphi_{x,t}(a_\alpha, b_\alpha) = e_{x,t}$.

On note qu'ici l'avis de l'expert s'observe à deux niveaux : d'une part pour le choix de l'expression pour la projection du niveau de moralité a_t (cf. détails dans le sous-paragraphe suivant), et d'autre part pour le choix de l'espérance de vie générationnelle $e_{x,t}(\text{expert})$ (cf. expression à minimiser ci-dessus).

Ajustement du niveau de la mortalité : seconde approche (choix de l'expression pour la projection du niveau de mortalité)

En pratique, l'expression de la projection du niveau de mortalité α_t dépend de la forme attendue pour la courbe d'évolution du paramètre α_t et de la durée de projection, sachant que dans tous les cas on doit raisonnablement s'attendre à une décroissance du paramètre compte tenu du contexte de hausse attendue de l'espérance de vie (cf. introduction).

Pour information, dans le cadre de l'étape 1, Bongaarts (2004) observe une tendance à la baisse pour l'évolution du paramètre α_t de 1950 à 2000 au titre de la population générale féminine de 14 pays industrialisés.

Selon la durée de projection et l'allure attendue pour la prédiction du paramètre α_t , l'expression de la projection du niveau de mortalité peut s'assimiler à une décroissance linéaire ou à une décroissance exponentielle.

D'un côté, si l'on anticipe que la baisse absolue du niveau de mortalité sera constante dans les prochaines années, il convient de retenir une décroissance linéaire. Dans ce cas α_t s'exprime simplement par $\alpha_t = a_\alpha \times t + b_\alpha$, et on dispose alors d'une suite arithmétique de valeur initiale $\alpha_0 = b_\alpha$ et de raison a_α (avec $a_\alpha > 0$). La limite de cette approche est que pour des horizons de projection importants, α_t peut mathématiquement devenir négatif (ce qui n'est pas souhaitable en pratique). Cette approche peut ainsi être envisagée lorsque l'on considère

que la baisse du niveau de mortalité s'effectuera à un rythme régulier (en valeur absolue) dans le futur et que la projection est réalisée sur un horizon mesuré.

D'un autre côté, si l'on anticipe que c'est plutôt la baisse relative du niveau de mortalité qui sera constante dans les prochaines années, il convient de retenir une décroissance exponentielle. En effet, dans ce cas on considère une diminution de α_t proportionnelle à son niveau, et on pose donc $\frac{d\alpha_t}{dt} = a_\alpha \times \alpha_t$ (avec $a_\alpha > 0$), soit $\alpha_t = a_0 \times \exp(a_\alpha \times t)$. Au final, on dispose ainsi d'une suite géométrique de valeur initiale a_0 et de raison $\exp(a_\alpha)$, et en posant $\alpha_0 = \exp(b_\alpha)$, on a $\alpha_t = \exp(a_\alpha \times t + b_\alpha)$. Cette expression présente l'avantage de rendre mathématiquement impossible l'obtention de niveaux de mortalité négatifs. Cette approche peut ainsi être envisagée lorsque l'on considère que la baisse du niveau de mortalité diminuera (en valeur absolue) dans le futur et est parfaitement adaptée aux horizons de projection importants.

3.2.2 Cadre d'utilisation de l'avis d'expert

Le travail présenté ici s'attache à proposer une démarche pour tenir compte d'avis d'expert sur la forme de l'évolution du niveau de mortalité et sur l'espérance de vie générationnelle à un âge pivot donné. Aussi, il semble important de préciser ici que les hypothèses illustratives présentées comme des avis d'expert dans la section 4 ci-après ne correspondent pas à de vrais avis d'expert sur la population considérée. En effet, les « avis d'experts » de la section 4 ont été retenus dans le seul objectif de présenter une application des outils présentés dans les sections 2 et 3 pour modéliser la mortalité prospective en absence de données sur les tendances passées.

Dans ce contexte, il semble utile de rappeler ici quelques précautions classiques liées à l'utilisation d'avis d'expert, en reprenant notamment les précisions formulées par Arbenz et Canestraro (2011) sur la fiabilité des experts et de leurs avis :

- sur le premier point, les auteurs rappellent que la qualité d'un expert s'apprécie entre autres au niveau de sa cohérence dans le temps et de la validation *a posteriori* de ses anticipations;
- sur le second point, les auteurs rappellent que la qualité des avis d'expert s'apprécie entre autres au niveau de sa transparence (toutes les informations utilisées par l'expert doivent être mise à disposition) et de sa neutralité (il ne doit exister aucune incitation pour que l'expert donne un avis différent de sa réelle opinion).

Enfin, dans le cadre de l'utilisation de plusieurs avis d'expert, il convient de rappeler qu'une attention toute particulière doit être accordée à l'agrégation et à la pondération des différents avis des différents experts.

4. APPLICATION : ANTICIPATION DE LA MORTALITÉ D'EXPÉRIENCE FUTURE

Cette section s'attache à mettre en application la démarche proposée ci-dessus pour modéliser la mortalité prospective en présence de données limitées.

En particulier, les applications s'inscrivent dans le cadre de la modélisation de la mortalité prospective en Afrique subsaharienne francophone et s'appuient à ce titre sur les données d'expérience utilisées pour la construction des tables de mortalité réglementaires dans la zone CIMA³ pour les contrats d'assurance en cas de vie et en cas de décès. Ces données ont été collectées en 2009, sont observées sur les années 2003 à 2006 et comptent des troncatures à gauche (relatives aux entrées après le 01/01/2003) et des censures à droite (relatives aux sorties avant le 31/12/2006 pour un motif autre que le décès). Ces données, qui sont exploitables uniquement sur les 30-55 ans, sont présentées en détail dans Planchet et al. (2010).

Dans le cadre de cette étude, on limite l'exploitation de ces données à la population masculine de la Côte d'Ivoire, ce qui permet de répondre à la volonté de tenir compte de l'hétérogénéité au sein de la zone étudiée (zone qui pour mémoire comprend plusieurs pays).

4.1 Résultats de l'ajustement du modèle

Cette sous-section présente les résultats des ajustements statistiques (*cf.* 4.1.1) et par avis d'expert (*cf.* 4.1.2), ainsi qu'une illustration des projections des taux de mortalité (*cf.* 4.1.3).

4.1.1 Résultats de l'ajustement statistique

L'ajustement statistique est réalisé au titre des points 1 et 2 de l'approche de Bongaarts. Les statistiques descriptives relatives aux données utilisées sont présentées dans le tableau suivant, pour chaque année d'observation de la population assurée.

TABLEAU I
STATISTIQUES VENTILÉES PAR ANNÉE
(CÔTE D'IVOIRE – HOMME)

Homme Côte d'Ivoire (pop. ass.)	Exposition	Âge moyen	Taux décès moyen	Taux décès moyen (borne inf. à 95 %)	Taux décès moyen (borne sup. à 95 %)
2003	163 755	43,7 ans	0,36 %	0,33 %	0,38 %
2004	161 056	44,0 ans	0,40 %	0,37 %	0,43 %
2005	125 797	44,4 ans	0,43 %	0,40 %	0,47 %
2006	99 048	43,4 ans	0,42 %	0,38 %	0,46 %
2003-2006	549 656	43,9 ans	0,40 %	0,38 %	0,41 %

La faible profondeur des données (quatre années d'historique uniquement) et les fluctuations d'échantillonnage associées à la taille de l'échantillon ne permettent pas d'identifier de tendance dans l'évolution de la mortalité au fil des années. Aussi, dans le cadre de cette étude, on considère une seule période d'observation t (comme le permet Bongaarts, 2004), correspondant à la période 2003-2006.

Pour revenir sur l'approche de Bongaarts, dans une première étape, on réalise l'ajustement des trois paramètres α_t , β_t et γ_t à partir de la méthode présentée ci-dessus en 3.1 (moindres carrés pondérés).

À cet effet, on commence par déterminer des valeurs initiales acceptables, et on réalise donc une régression linéaire simple de $y - \ln(q_{x+1} - q_x)$ sur x , telle que $y = a_y \times x + b_y + \varepsilon_y$. On obtient les estimations suivantes : $\hat{a}_y = 0,06451$ et $\hat{b}_y = -10,68118$ (avec des probabilités de rejeter à tort l'hypothèse H_0 de nullité du paramètre selon le test de Student respectivement égales à 1,8 % et à $9,27.10^{-10}$). À partir de la démarche présentée en 3.1, on en déduit les valeurs initiales suivantes : $\hat{a}_i = 1,89.10^{-7}$, $\hat{\beta}_i = 6,45.10^{-2}$ et $\hat{\gamma}_i = 3,58.10^{-3}$.

À partir de ces valeurs initiales, on procède à la mise en œuvre de l'optimisation pour estimer les paramètres α_t , β_t et γ_t . Les résultats sont présentés dans le tableau suivant. À titre d'information, les résultats des estimations de Bongaarts pour la population générale masculine (moyenne des estimations entre 1950 et 2000, cf. Bongaarts, 2004) sont également présentés pour la France.

TABLEAU 2
AJUSTEMENT STATISTIQUE
(ÉTAPES 1 ET 2 DE BONGAARTS)

Période (t)	Alpha (α_t)	Beta (β_t)	Gamma (γ_t)
Valeur initiale (*)	1,89E-07	6,45E-02	3,58E-03
Côte d'Ivoire exp. 2003-2006	2,05E-04	6,45E-02	-3,07E-05
Bongaarts (France) (**)	4,20E-05	1,01E-01	9,80E-04

(*) Issue des résultats de la régression linéaire simple de y sur x présentée ci-avant.

(**) Moyenne des valeurs moyennes obtenues entre 1950 et 2000 pour la population générale masculine en France (cf. Bongaarts, 2004).

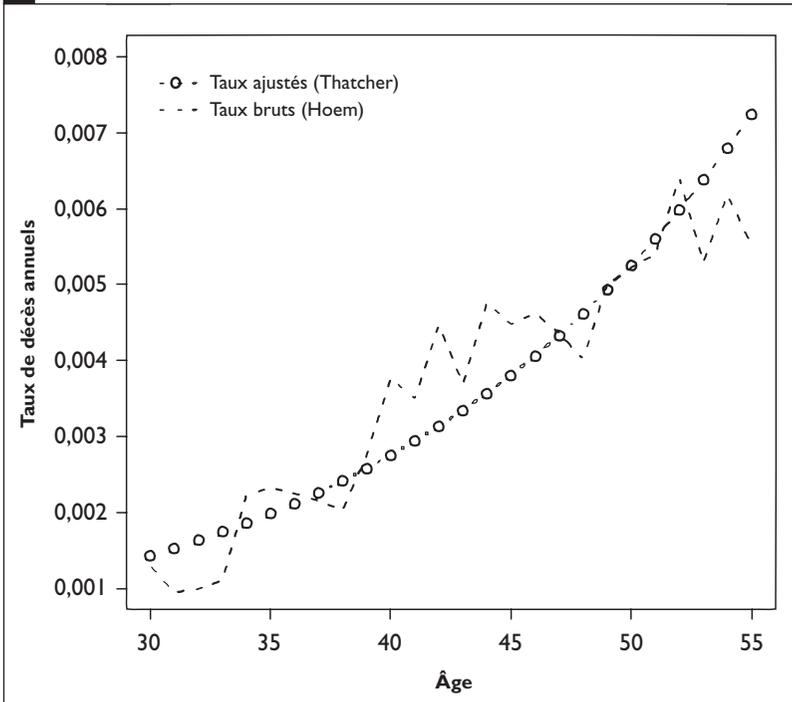
Il ressort de ces résultats que le niveau de mortalité moyen de la population assurée ivoirienne entre 2003 et 2006 est supérieur au niveau de mortalité moyen de la population générale française entre 1950 et 2000. En revanche, dans le cas de la population assurée de la Côte d'Ivoire, l'évolution de la mortalité avec l'âge est plus modérée. Enfin, on note que dans le cas de la population assurée ivoirienne, l'ajustement de la mortalité pour les jeunes adultes correspond à un ajustement à la baisse (à l'image de ce qu'obtient Thatcher (1999) pour les hommes d'Angleterre et du pays de Galles âgés de plus de 30 ans entre 1980 et 1982).

Sur le plan statistique, il apparaît que le modèle est significatif au seuil de 5 % (la valeur du test empirique est supérieure à celle de la table au seuil de 5 % à 3 degrés de liberté).

Pour illustrer l'adéquation de l'ajustement aux taux bruts, la Figure 1 compare les taux bruts et les taux ajustés déduits de l'estimation des paramètres présentés dans le Tableau 2, et le tableau suivant compare les décès observés et les décès modélisés (décès théoriques déduits des taux ajustés).

Au global, il apparaît un écart inférieur à 3 % entre les décès théoriques (modélisés à partir des taux ajustés) et les décès observés. Par tranche d'âges toutefois, il apparaît des écarts plus importants : les décès modélisés pour les 40-44 ans minorent ainsi de plus de 20 % les décès observés.

FIGURE I
TAUX DE DÉCÈS AJUSTÉS ET TAUX DE DÉCÈS BRUTS
(CÔTE D'IVOIRE – H)



4.1.2 Résultats de l'ajustement par avis d'expert

L'ajustement par avis d'expert est relatif à l'étape 3 de l'approche de Bongaarts, dans laquelle les paramètres α_t et γ_t sont projetés pour chaque t futur. En pratique, cette projection est réalisée dans notre étude par avis d'expert.

Concernant la mortalité environnementale γ_t , on considère qu'elle est constante tout au long de la durée de projection. On a ainsi $\hat{\gamma}_t = \hat{\gamma} = -3,07.10^{-5}$.

Concernant le niveau de mortalité α_t , on considère qu'elle évolue dans le temps selon l'expression $\alpha_t = \exp(a_\alpha \times t + b_\alpha)$; on considère ainsi une décroissance exponentielle du niveau de mortalité au fil des années. Pour mémoire, les paramètres $\theta = (a_\alpha, b_\alpha)$ sont obtenus en minimisant l'écart quadratique entre la valeur d'expert de l'espérance de vie générationnelle (notée $e_{x,t}(\text{expert})$ à un âge x et à une date t) et la prédiction de cette valeur (prédiction à partir de l'expression de $e_{x,t} = \varphi_{x,t}(a_\alpha, b_\alpha)$, cf. sous-section 3.2).

**TABLEAU 3
COMPARAISON DES RÉALISATIONS / MODÉLISATIONS DE DÉCÈS**

Homme Côte d'Ivoire (pop. ass.)	Exposition	Décès observés	Décès modélisés	Différences relatives	Décès modélisés (borne inf. à 95 %)	Décès modélisés (borne sup. à 95 %)	Taux décès moyen (décès observés)	Taux décès moyen (décès modélisés)
30-39 ans	144 931	276	294	6,4%	260	327	0,19%	0,20%
40-44 ans	126 517	514	401	-21,9%	362	441	0,41%	0,32%
45-49 ans	149 578	672	650	-3,3%	600	699	0,45%	0,43%
50-55 ans	128 630	726	779	7,4%	725	834	0,56%	0,61%
Total	549 656	2 188	2 124	-2,9%	2 034	2 214	0,40%	0,39%

La projection par avis d'expert du paramètre $\alpha_t = \exp(a_\alpha \times t + b_\alpha)$ est ainsi directement déduite de la valeur d'expert retenue pour l'espérance de vie générationnelle à un âge pivot x et à une date t . Pour faciliter le choix de l'expert, on présente dans le tableau ci-dessous trois références pour l'espérance de vie générationnelle, à l'âge $x = 30$ et à la date $t = t_0 = 0$ (en considérant que la date initiale $t = t_0 = 0$ correspond à l'année 2006) :

- La première est issue de la table d'expérience ajustée en supposant que sur toute la durée de projection le niveau de mortalité α_t est constant. Pour le calcul de l'espérance de vie, on considère par ailleurs que la table issue des taux ajustés se ferme brutalement à 105 ans (sachant pour mémoire que la méthode de fermeture n'a un impact significatif sur le provisionnement que si les individus considérés pour l'évaluation ont un âge très élevé à la date de calcul, cf. par exemple Quashie et Denuit, 2005 ou Planchet et Thérond, 2011).
- La deuxième est issue des tables de la population assurée masculine française (tables prospectives réglementaires TGH 05). Pour mémoire, cette table se ferme à 120 ans.
- La troisième est issue des tables de la population générale masculine française (tables prospectives INED H). Pour information, cette table se ferme à 105 ans.

Ainsi, par exemple, en considérant par avis d'expert que l'espérance de vie générationnelle de la population assurée ivoirienne est raisonnablement inférieure à celle de la population générale française, on peut supposer qu'elle est égale à 53 ans (contre 54 ans pour la population générale française).

TABLEAU 4
RÉFÉRENCES POUR L'ESPÉRANCE DE VIE À 30 ANS
(EN 2006)

Espérance de vie générationnelle (Âge = 30, Date/Année = 2006)	
Côte d'Ivoire (Table du moment sans évolution de l'espérance de vie, population assurée, années 2003-2006) (*)	51,4
TGH 05 (Tables prospectives réglementaires en France, population assurée, générations 1900-2005)	60,6
INED H (Tables prospectives en France, population générale, générations 1897-1996)	54,0

(*) Dans ce cas il ne s'agit pas d'une espérance de vie générationnelle, mais d'une espérance de vie simple, ne prenant donc pas en compte l'évolution de la mortalité.

On cherche alors les valeurs de $\theta = (a_\alpha, b_\alpha)$ permettant de minimiser
$$\left(53 - \sum_{h>0} \exp(-\hat{\gamma}h) \prod_{k=0}^{h-1} \left(\frac{1 + \alpha_{t+k} e^{\hat{\beta}(x+k)}}{1 + \alpha_{t+k} e^{\hat{\beta}(x+1+k)}} \right)^{1/\hat{\beta}} \right)^2$$
, avec $\alpha_t = \exp(a_\alpha \times t + b_\alpha)$. À cet effet, on considère que les valeurs initiales des paramètres $\theta = (a_\alpha, b_\alpha)$ correspondent aux valeurs obtenues à la date initiale $t = t_0 = 0$, soit $(a_\alpha)_i = 0$ et $(b_\alpha)_i = \ln(\hat{\alpha}_0) = -8,49$. On obtient alors les estimations suivantes : $\hat{a}_\alpha = -3,24 \cdot 10^{-3}$ et $\hat{b}_\alpha = -8,49$. L'estimation par avis d'expert du niveau de mortalité à la date t est ainsi $\hat{\alpha}_t = \exp(-3,24 \cdot 10^{-3} \times t - 8,49)$ (pour $t = 0$ en 2006, $t = 1$ en 2007, etc.). Dans ce cas, l'estimation de l'espérance de vie théorique est $\hat{e}_{x,t} = 53,0$ (on retrouve ainsi le « 53 ans » fixé par avis d'expert).

4.1.3 Illustrations des projections

Au final, les taux de décès ajustés à un âge x et à une date t sont notés $q_{x,t} = 1 - \exp(-\hat{\gamma}) \left(\frac{1 + \exp(\hat{a}_\alpha \times t + \hat{b}_\alpha) e^{\hat{\beta}x}}{1 + \exp(\hat{a}_\alpha \times t + \hat{b}_\alpha) e^{\hat{\beta}(x+1)}} \right)^{1/\hat{\beta}}$, et en considérant que $t = 0$ en 2006, on a ainsi $\hat{\gamma} = -3,07 \cdot 10^{-5}$, $\hat{a}_\alpha = -3,24 \cdot 10^{-3}$, $\hat{b}_\alpha = -8,49$ et $\hat{\beta} = 6,45 \cdot 10^{-2}$. Cette expression permet notamment de projeter les taux de décès dans le cadre de l'étape 4 de l'approche de Bongaarts.

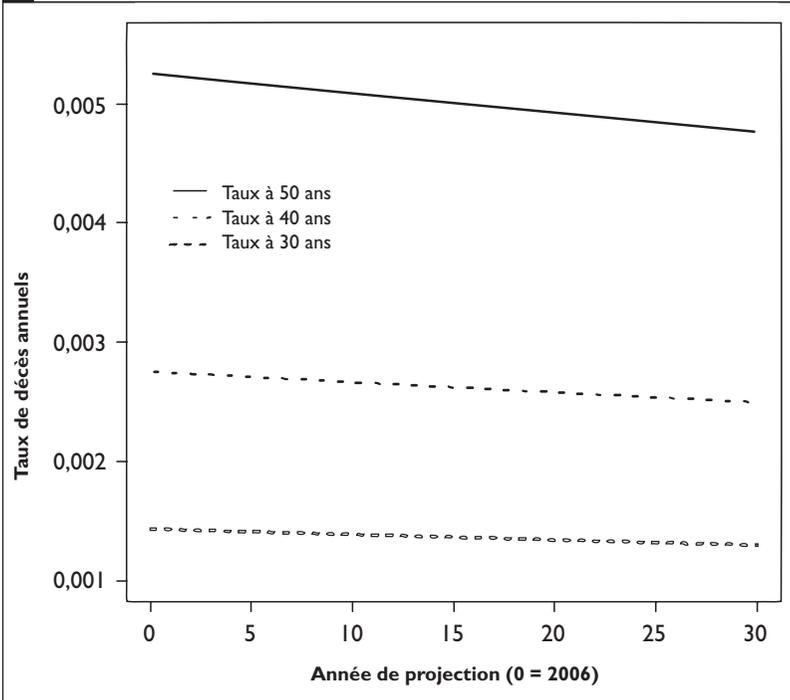
Sur ces bases, le graphique suivant présente l'évolution dans le temps des taux de décès à différents âges (en l'occurrence à 30 ans, 40 ans et 50 ans).

Au fil du temps, il ressort une baisse des taux de décès ajustés cohérente avec l'amélioration anticipée de la mortalité (hausse de l'espérance de vie).

4.2 Sensibilités et mesure du risque d'avis d'expert

Pour mémoire, les résultats des projections présentés dans la sous-section précédente sont issus d'un avis d'expert à plusieurs niveaux : forme de la décroissance du paramètre représentant le niveau de la mortalité α_t (choix d'une décroissance exponentielle), niveau de l'espérance de vie générationnelle à 30 ans (âge pivot) en 2006 (choix de 53 ans), âge de fermeture de la table (choix de 105 ans).

FIGURE 2
ÉVOLUTION DESTAUX DE DÉCÈS AJUSTÉS
(CÔTE D'IVOIRE – H)



Dans cette sous-section, on apprécie la sensibilité des projections à ces différentes hypothèses. En particulier, le premier paragraphe (cf. 4.2.1) est consacré à l'analyse de la sensibilité des projections de α_t au choix de l'âge pivot utilisé pour l'avis d'expert sur l'espérance de vie générationnelle. Dans le second paragraphe (cf. 4.2.2), on se place dans un contexte d'assurance et on mesure la sensibilité d'une provision d'assurance *best estimate* au risque d'avis d'expert (tant sur le niveau de l'espérance de vie, que sur la forme de la décroissance du niveau de mortalité α_t et sur l'âge de fermeture de la table).

4.2.1 Cohérence des avis d'expert (sensibilité au choix de l'âge pivot)

Pour apprécier la cohérence des avis d'expert, on sollicite un avis d'expert sur l'espérance de vie à différents âges pivots, et on étudie la cohérence des projections du niveau de mortalité α_t qui en découlent. Dans le cadre de cette analyse, on considère que le paramètre représentant le niveau de mortalité suit une décroissance exponentielle.

TABLEAU 5
COMPARAISON DES RÉALISATIONS / MODÉLISATIONS DE DÉCÈS

Avis d'expert sur l'espérance de vie générationnelle 2006 (espérance de vie du moment issue de la table d'expérience)	a	b	alpha (décroissance exponentielle)			
			t = 0	t = 10	t = 20	t = 30
À 30 ans : 53 ans (51,4 ans)	-3,24E-03	-8,49E+00	2,05E-04	1,98E-04	1,92E-04	1,86E-04
À 40 ans : 43 ans (42,3 ans)	-1,88E-03	-8,49E+00	2,05E-04	2,01E-04	1,97E-04	1,94E-04
À 40 ans : 44 ans (42,3 ans)	-4,47E-03	-8,49E+00	2,05E-04	1,96E-04	1,87E-04	1,79E-04
À 50 ans : 34 ans (33,7 ans)	-1,07E-03	-8,49E+00	2,05E-04	2,03E-04	2,00E-04	1,98E-04
À 50 ans : 35 ans (33,7 ans)	-4,69E-03	-8,49E+00	2,05E-04	1,95E-04	1,86E-04	1,78E-04

Il apparaît logiquement que dans l'expression du niveau de mortalité, la sensibilité à l'avis d'expert sur l'espérance de vie s'illustre principalement sur la raison de la suite géométrique, notée $\exp(a_\alpha)$ pour mémoire. La valeur initiale de la suite géométrique, notée $\alpha_0 = \exp(b_\alpha)$, semble quant à elle inchangée dans les différents scénarios.

La cohérence et l'ajustement des différentes opinions d'experts peuvent ainsi être évalués à partir du seul paramètre a_α .

4.2.2 Risque d'avis d'expert sur les provisions

Pour mesurer le risque d'avis d'expert sur les provisions, on considère un régime de rentes en cours de service et une population de rentiers composée d'un seul individu de sexe masculin et âgé de $x_0 = 55$ ans au 31/12/2009 (date initiale de calcul notée i_0 , avec $i_0 = t_0 + 3$ en considérant que $t_0 = 0$ correspond à l'année 2006). La rente annuelle individuelle est supposée égale à 1 ? à la date initiale de calcul (i_0), et est supposée être revalorisée de 2% chaque année. Le régime prévoit le versement de cette rente jusqu'au décès.

En pratique, il s'agit ici de présenter la provision *best estimate* dans plusieurs situations. À cet effet, on considère un scénario central dans lequel l'espérance de vie générationnelle à 30 ans est égale à 53 ans, le niveau de mortalité connaît une décroissance exponentielle et la table d'expérience prospective construite se ferme à 105 ans (hypothèses d'avis d'expert retenues jusqu'alors dans ce travail). Dans les scénarios alternatifs testés, on considère une évolution de ces hypothèses d'avis d'expert.

Dans tous les cas, on évalue des provisions déterministes : on suppose ainsi qu'il n'y a pas d'aléa sur la durée de vie restante des assurés.

La provision *best estimate* est calculée à la date initiale à partir de la relation suivante :

$$L_{i_0} = \sum_{i=1}^{\omega} F(i) \times (1+r_i)^{-i},$$

où r_i représente le taux d'actualisation des flux de l'échéance i (issu de la courbe des taux à la date initiale), ω représente la dernière échéance de versement des flux et $F(i) = (1+2\%)^{i-1} \prod_{u=0}^{i-1} (1 - q_{x_0+u, i_0+u})$ représente les flux probables des prestations à payer en i (à terme échu), avec x_0 l'âge de l'individu à la date initiale i_0 et q_{x_0+u, i_0+u} le taux de décès ajusté issu de la table construite à partir des avis d'expert. La courbe d'actualisation retenue est la courbe de l'Institut des Actuaire⁴ au 31/12/2009.

Une illustration des résultats des calculs de provisions dans les différents scénarios est présentée dans le Tableau 6.

À la lecture de ce tableau, il apparaît plusieurs enseignements. D'une part, on note qu'une évolution d'un an de l'avis d'expert sur l'espérance de vie générationnelle à 30 ans engendre, toutes choses égales par ailleurs, une évolution d'environ 1 % de la provision d'assurance. De même, une évolution quatre ans (soit de plus de 7 %) de l'avis d'expert sur l'espérance de vie générationnelle à 30 ans engendre une évolution de 4 à 5 % de la provision d'assurance (en pratique, l'impact sur la provision est minoré par l'effet actualisation).

D'autre part, il ressort que pour l'évolution du niveau de mortalité, le choix d'une décroissance linéaire aux dépens d'une décroissance exponentielle a un impact limité sur le montant de la provision. En revanche, le choix de la forme de la décroissance semble influencer sur la performance du processus de minimisation permettant de rapprocher l'espérance de vie théorique à celle issue de l'avis d'expert (avec la décroissance exponentielle on converge plus précisément vers l'avis d'expert pour l'espérance de vie).

Enfin, il apparaît que le passage d'une fermeture de 105 ans à 120 ans a, toutes choses égales par ailleurs, également un impact limité sur la provision (à l'image de ce qui était annoncé au paragraphe 4.1.2).

5. SYNTHÈSE ET CONCLUSION

Dans le cadre de régimes de rentes, l'assureur est tenu d'apprécier le niveau actuel et l'évolution attendue de la mortalité spécifique de sa population assurée, compte tenu du contexte de hausse générale de l'espérance de vie (y compris dans les pays en développement, *cf.* Meslé et Vallin, 2007) et d'introduction de nouveaux référentiels justifiant l'évaluation réaliste et fine des risques (par opposition à l'approche prudente souvent retenue). Il doit alors construire des tables d'expérience prospectives.

À cet effet, lorsque le volume de données est restreint, en particulier lorsque l'on dispose de peu d'années d'historique (comme souvent dans les pays en développement), l'utilisation du modèle classique de Lee-Carter n'est pas souhaitable et le recours à des informations externes est nécessaire. La dimension qualitative (avis d'expert) dans les projections prend alors une place importante. Autre conséquence : la présence de données limitées engendre un risque significatif d'estimation des paramètres compte tenu des fluctuations d'échantillonnage

TABLEAU 6
SENSIBILITÉ DE LA PROVISION AUX AVIS D'EXPERT
(CÔTE D'IVOIRE – H)

Avis d'expert sur l'espérance de vie générationnelle à 30 ans en 2006 / forme décroissance niveau mortalité / âge fermeture (estimation espérance de vie générationnelle théorique)	Provision best estimate au 31/12/2009 (homme âgé de 55 ans en 2009)	
	Provision best estimate	Écart relatif avec (1)
52 ans / décroissance exponentielle / fermeture 105 ans (52,00 ans)	20,40	-1,1 %
53 ans / décroissance exponentielle / fermeture 105 ans (53,00 ans) (1)	20,62	0,0 %
53 ans / décroissance linéaire / fermeture 105 ans (53,14 ans)	20,64	0,1 %
53 ans / décroissance exponentielle / fermeture 120 ans (53,00 ans)	20,61	0,0 %
54 ans / décroissance exponentielle / fermeture 105 ans (54,00 ans)	20,85	1,1 %
54 ans / décroissance exponentielle / fermeture 105 ans (57,00 ans)	21,53	4,4 %

(cf. Kamega et Planchet, 2010 et Kamega et Planchet, 2011b). Dans ce cas, une attention particulière doit également être accordée au nombre de paramètres dans le modèle.

Dans ce contexte, l'approche proposée par Bongaarts (2004), qui consiste à utiliser le modèle de Thatcher (1999) et à faire évoluer les paramètres au cours du temps, se révèle utile pour répondre à ces contraintes. Aussi, dans cette étude, le modèle de Bongaarts est utilisé pour projeter la mortalité d'expérience. À cet effet, dans un premier temps, les trois paramètres du modèle sont estimés à la date initiale par ajustement statistique. Dans un second temps, en termes de projection, deux des trois paramètres (ceux relatif à la mortalité environnementale et à l'augmentation de la mortalité avec l'âge) sont supposés constants au cours du temps, et les valeurs futures du troisième paramètre sont déduites de l'avis d'expert retenu pour l'espérance de vie générationnelle.

La solution proposée dans ce travail permet alors de disposer d'un outil simple pour projeter la mortalité d'expérience en l'absence de données d'historique suffisantes (quatre ans dans l'exemple numérique de la présente étude). Seul un avis d'expert sur le niveau de

l'espérance de vie générationnelle (et dans une moindre sur la forme de la décroissance du niveau de mortalité et sur l'âge de fermeture de la table) est nécessaire.

En complément, une appréciation du risque lié au choix de l'avis d'expert est réalisée dans ce travail. Pour un engagement viager à 55 ans, il apparaît alors qu'un écart d'un an dans le choix de l'espérance de vie conduit à un écart d'environ 1 % sur la provision, et qu'un écart de 4 ans conduit à un écart de 4 à 5 %. Les impacts de la forme de l'évolution de la mortalité (forme linéaire ou exponentielle) ou du choix de l'âge de fermeture de la table apparaissent secondaires.

Il convient toutefois de noter que certaines problématiques susceptibles de faire l'objet de développements importants n'ont pas été traitées dans le présent travail. Ainsi, aucune projection de la mortalité par cause n'a été réalisée alors qu'une telle analyse pourrait être utile, notamment dans le contexte des données africaines utilisées ici compte tenu de l'impact potentiel du VIH/Sida dans la mortalité. Par ailleurs, ni l'interdépendance entre les paramètres, ni celle entre les âges, ni celle entre les périodes n'ont été étudiées, alors qu'elles sont confirmées par plusieurs études (cf. par exemple Booth et Tickle, 2008 et Loisel et Serant, 2007). Enfin, hormis le risque systématique d'avis d'expert, les mesures d'incertitudes (risque systématique d'estimation, risque systématique de modèle, risque mutualisable) n'ont pas été développées ici, alors qu'elles présentent un intérêt particulier dans le contexte de données limitées (cf. par exemple Booth et Tickle, 2008 et Kamega et Planchet, 2011b).

Références

- Arbenz P., Canestraro D. (2011) « Estimating copulas for insurance from scarce observations, expert opinion and prior information: a Bayesian approach », *Forthcoming in "ASTIN Bulletin" (preprint)*.
- Barrieu P., Bensusan H., El Karoui N., Hillairet C., Loisel S., Ravanelli C., Salhi Y. (2010) « Understanding, Modelling and Managing Longevity Risk: Key Issues and Main Challenges », *Scandinavian Actuarial Journal*.
- Bongaarts J. (2004) « Long-Range Trends in Adult Mortality: Models and Projections Methods », *Population Council, WP192*.
- Booth H., Tickle L. (2008) « Mortality modeling and forecasting: A review of methods », *The Australian Demographic and Social Research Institute, WP3*.
- Brouhns N., Denuit M. (2002a) « Risque de longévité et rentes viagères – I. Évolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours », *Belgian Actuarial Bulletin, Vol. 2, No 1*.
- Brouhns N., Denuit M., Vermunt J. K. (2002) « A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables », *Insurance: Mathematics and Economics, No. 31*.

- Delwarde A., Denuit M. (2006) « Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives », *Economica*.
- Droesbeke J.-J., Fichet B., Tassi P. (1989) (éditeurs) « Analyse statistique des durées de vie », *Economica*.
- Kamega A. (2006) *Impact de la sursuicidité en Bretagne sur les garanties temporaires décès*, Mémoire d'actuariat, EURIA.
- Kamega A. (2011) *Quelle anticipation de l'espérance de vie dans les portefeuilles d'assurance ?*, Chaire transitions démographiques, transitions économiques, Intervention du 27/01/2011.
- Kamega A., Planchet F. (2010), « Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience », *Cahiers de recherche de l'ISFA, WP2136*.
- Kamega A., Planchet F. (2011a), « Analyse et comparaison des populations générale et assurée en Afrique subsaharienne francophone pour anticiper la mortalité future », *Cahiers de recherche de l'ISFA, WP2138*.
- Kamega A., Planchet F. (2011b), « Construction de tables de mortalité prospectives sur un groupe restreint : mesure du risque d'estimation », *Cahiers de recherche de l'ISFA, WP2140*.
- Kamega A., Planchet F. (2011c), « Hétérogénéité : mesure du risque d'estimation dans le cas d'une modélisation intégrant des facteurs observables », *Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 11, No 21*.
- Kamega A., Planchet F. (2012), « Actuariat et assurance vie en Afrique subsaharienne francophone – Outils d'analyse de la mortalité », *Seddita*.
- Klein J. P., Moeschberger M. L. (2005) « Survival Analysis – Techniques for Censored and Truncated Data », *Springer, 2nd edition*.
- Loisel S., Serant D. (2007), « In the core of longevity risk: hidden dependence in stochastic mortality models and cut-offs in prices of longevity swaps », *Cahiers de recherche de l'ISFA, WP2044*.
- Meslé F., Vallin J. (2007) « De la transition épidémiologique à la transition sanitaire », *Médecine Tropicale, No 67*.
- Planchet F. (2006), « Tables de mortalité d'expérience pour les portefeuilles de rentiers – (Tables TGH 05 et TGF 05) – Notice de présentation », *Institut des Actuaires*.
- Planchet F. (2007), « Prospective models of mortality with forced drift – Application to the longevity risk for life annuities », *Proceedings of the 11th IME Congress*.
- Planchet F. (2010) *Modèles de durée – Tables de mortalité*, Support de cours 2010-2011, Version 2.11 (novembre 2010).
- Planchet F., Kamega A., Ziguélé M. (2010), « Confection des tables de mortalité réglementaires pour la zone CIMA », *CIMA/WINTER & Associés (confidentiel)*.
- Planchet F., Lelieur V. (2007) « Utilisation des méthodes de Lee-Carter et log-Poisson pour l'ajustement de tables de mortalité dans le cas de petits échantillons », *Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 7, No 14*.
- Planchet F., Théron P. (2011) « Modélisation statistique des phénomènes de durée - Applications actuarielles », *Economica*.
- Quashie A., Denuit M. (2005) « Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges », *Institut des Sciences Actuarielles et Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, WP*.
- Thatcher A. R. (1999) « The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age », *Journal of the Royal Statistical Society, 162*.

Notes

1. Pour mémoire, le modèle de Thatcher correspond lui-même à une adaptation du modèle classique de Makeham, ajusté pour corriger la surestimation des taux de décès conditionnels aux âges élevés observés en pratique.

2. En pratique, on pourra considérer la moyenne pour tous les âges x de l'ajustement.

3. Hors Guinée-Bissau et Guinée équatoriale. Il s'agit ainsi de la zone couvrant les pays membres de la CIMA (Conférence Interafricaine sur les Marchés de l'Assurance) suivants : Bénin, Burkina Faso, Côte d'Ivoire, Mali, Niger, Sénégal et Togo, ainsi que Cameroun, Centrafrique, Congo, Gabon et Tchad.

4. Courbe disponible sur le site de l'Institut des Actuaire :
http://www.institutdesactuaire.com/gene/link.php?doc_link=../docs/2010003190313_IA20091231.xls.