

DIFFICULTÉS DE CALCULER LES COTES DES SWAPS DE VOLATILITÉ

Raymond Théoret, Pierre Rostan and Lydie Zabré

Volume 72, Number 2, 2004

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/1092733ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/1092733ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

Faculté des sciences de l'administration, Université Laval

ISSN

1705-7299 (print)

2371-4913 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this document

Théoret, R., Rostan, P. & Zabré, L. (2004). DIFFICULTÉS DE CALCULER LES COTES DES SWAPS DE VOLATILITÉ. *Assurances et gestion des risques / Insurance and Risk Management*, 72(2), 301–320.
<https://doi.org/10.7202/1092733ar>

Article abstract

Volatility swaps and variance swaps are new derivative products in fashion since 1998. This paper presents an analytical solution to compute the quotation of a volatility swap and examine its limits. This analytical solution was found by Javaheri, Wilmott and Haug (2002) and it uses a GARCH (1,1) process to estimate the volatility of the returns of the financial instrument studied. We apply this procedure to estimate the quotations of volatility swaps of differing maturities written on the S&P TSX60 index of the Toronto Stock Exchange. We have written a Visual Basic (Excel) program to compute these quotes. A simulation of the model revealed that it is very sensible to the estimation of its parameters, particularly the speed of adjustment of the instantaneous variance and the degree of kurtosis in the distribution of returns. A too small speed of adjustment or a too high kurtosis might kill the volatility swap. These results being more pronounced for long term swaps, we might question the use of the analytical solution to price long term swaps. In view of the recent advent of volatility swaps, we hope that our contribution on this subject will help the financial analyst to better grasp the computation of a volatility swap quotation.

DIFFICULTÉS DE CALCULER LES COTES DES SWAPS DE VOLATILITÉ

par Raymond Théoret, Pierre Rostan et Lydie Zabré

RÉSUMÉ

Les swaps de volatilité sont des produits dérivés nouveaux, en vogue depuis 1998. Le but de cet article est de fournir une procédure pour déterminer la cote d'un swap de volatilité et d'évaluer ses limites. Pour ce faire, nous nous basons sur une solution analytique développée par Javaheri, Wilmott et Haug (2002), qui fait appel à un processus GARCH (1,1) pour estimer la volatilité des rendements de l'instrument financier étudié. Nous appliquons cette procédure à l'estimation de la cote d'un swap de volatilité écrit sur l'indice S&P TSX60 de la Bourse de Toronto. Nous fournissons un programme écrit en Visual Basic pour évaluer cette cote. Une simulation du modèle révèle que le modèle étudié s'avère très sensible à l'estimation de certains de ses paramètres, notamment la vitesse d'ajustement de la variance instantanée vers son niveau de long terme et le degré de leptocurtisme dans la distribution des rendements. Une estimation trop faible pour la vitesse d'ajustement ou un trop fort degré de leptocurtisme peut tout simplement tuer le swap de volatilité. Ces résultats étant plus prononcés pour les swaps à plus long terme, cela peut remettre en question le recours à la solution analytique de Javaheri, Wilmott et Haug (2002) pour déterminer les cotes de tels swaps. Du fait de l'avènement récent des swaps de volatilité, nous croyons que notre contribution à ce sujet aidera l'analyste financier à mieux cerner la détermination des cotes de tels swaps.

Mots clés : Détermination des prix des options, swap de volatilité, cote, GARCH, Bourse de Toronto.

Les auteurs :

Raymond Théoret est professeur à l'École des sciences de la gestion à l'Université du Québec à Montréal; Pierre Rostan travaille au département de recherche et de développement à la Bourse de Montréal; Lydie Zabré possède une maîtrise en finance appliquée.

Remerciement : Les auteurs tiennent à remercier Alain Coën (UQAM), Jean-Pierre Château (ESC, Rouen), François-Éric Racicot (UQAM) et à Léon Bitton (Bourse de Montréal) pour leurs conseils ou leurs encouragements. Certes, nous demeurons responsables de toute erreur ou omission qui aurait pu se glisser dans cet article.

Volatility swaps and variance swaps are new derivative products in fashion since 1998. This paper presents an analytical solution to compute the quotation of a volatility swap and examine its limits. This analytical solution was found by Javaheri, Wilmott and Haug (2002) and it uses a GARCH (1,1) process to estimate the volatility of the returns of the financial instrument studied. We apply this procedure to estimate the quotations of volatility swaps of differing maturities written on the S&P TSX60 index of the Toronto Stock Exchange. We have written a Visual Basic (Excel) program to compute these quotes. A simulation of the model revealed that it is very sensible to the estimation of its parameters, particularly the speed of adjustment of the instantaneous variance and the degree of kurtosis in the distribution of returns. A too small speed of adjustment or a too high kurtosis might kill the volatility swap. These results being more pronounced for long term swaps, we might question the use of the analytical solution to price long term swaps. In view of the recent advent of volatility swaps, we hope that our contribution on this subject will help the financial analyst to better grasp the computation of a volatility swap quotation.

Keywords: Option pricing, volatility swap, quote, GARCH, Toronto Stock Exchange.

1. INTRODUCTION

Plusieurs articles¹ se sont attaqués à la prévision de la volatilité des variables financières, tels les taux de rendement et les taux de change, mais très peu encore se sont penchés sur des stratégies optimales de placement ou de gestion des risques fondées sur une prévision de la volatilité de telles variables. Certes, plusieurs méthodes sont apparues pour transiger la volatilité réalisée. Pour ce faire, il suffit de prendre certaines positions sur des options, couvertes ou non. Toutefois, jusqu'à tout récemment, les investisseurs ne disposaient d'aucun véhicule qui leur aurait permis de transiger la volatilité directement.

Des produits dérivés négociés ayant comme sous-jacent la volatilité d'une variable financière, soit des contrats à terme sur la volatilité, ont percé à jour en 1996 sur la Bourse suédoise. Plus récemment, des contrats à terme basés sur un indice de volatilité implicite ont fait leur entrée sur l'EUREX, la Bourse germano-suisse. Les volumes de transactions sur ces contrats ont été faibles cependant. De son côté, le marché OTC² a lancé des swaps de volatilité, soit un véhicule permettant de transiger directement la volatilité. L'origine de ces instruments remonte à 1998, dans la foulée de la débandade de la firme LTCM³ qui s'est traduite par une escalade de la volatilité implicite des indices boursiers à des niveaux sans précédent.

Dans cet article, nous montrons comment calculer la cote d'un swap de volatilité à l'aide de la solution analytique proposée par

Javaheri, Wilmot et Haug (2002) que nous programmons en langage Visual Basic (Excel). Nous illustrons cette procédure en recourant à un swap mettant en cause un indice boursier canadien, le S&P TSX60.

Nos simulations révèlent que la solution analytique, proposée par Javaheri, Wilmott et Haug (2002) au calcul d'un swap de volatilité, peut devenir très instable si les estimations des paramètres du processus stochastique de la volatilité obtenues à l'aide d'un processus GARCH (1,1) se situent en dehors d'un certain intervalle, bien que cette solution se révèle passablement robuste si les paramètres estimés ne s'écartent pas d'une zone jugée raisonnable. Un niveau trop élevé de leptocurtisme au niveau de la distribution des rendements du TSX60 ou une vitesse d'ajustement trop faible de la volatilité vers son niveau de long terme peut donner lieu à des cotes négatives pour le swap, ce qui équivaut évidemment à tuer le « swap ». Cette instabilité de la solution analytique proposée par Javaheri, Wilmott et Haug (2002) s'amplifie avec la durée du swap, ce qui remet en question la pertinence de cette solution, s'agissant des swaps à plus long terme. Il va sans dire qu'un mauvais calibrage du modèle de tarification des swaps de volatilité peut également se traduire par des erreurs importantes au chapitre de l'évaluation de la cote d'un swap, du fait de la très grande instabilité du modèle dans certains intervalles de ses paramètres.

2. APERÇU DE LA DÉTERMINATION DES PRIX DES COMPOSANTES D'UN SWAP DE VOLATILITÉ

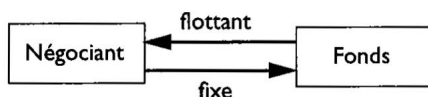
Soit v la variance instantanée du rendement d'une variable financière, disons un indice boursier. Dans l'intervalle $[0, T]$, la variance réalisée du rendement, désignée

$$\text{par } \sigma_R^2, \text{ est égale à : } \sigma_R^2 = \frac{1}{T} \int_{\tau=0}^T v(\tau) d\tau .$$

Un négociant écrit des options d'achat européennes sur cet indice boursier qu'il vend à ses clients. La durée de ces contrats est de T . Or, on sait que le prix d'une option augmente si la variance de son sous-jacent augmente. Il y a alors risque que le négociant accuse des pertes substantielles si les options sont exercées advenant une hausse appréciable de la volatilité.

Pour se prémunir contre cette hausse éventuelle de la variance des rendements de l'indice boursier, le négociant conclut un swap de variance avec un fonds de placement sur l'intervalle $[0, T]$. Fixons cet intervalle à un an. Ce swap est basé sur une variance des rendements fixe pour l'année, que nous désignons par K_{VAR} . Cette variance fixe constitue la cote du swap, que l'on peut également désigner par prix d'exercice. Dans ce swap, le négociant est payeur de la variance fixe et receveur de la variance variable. Sa contrepartie est dans la position opposée, comme l'indique la figure 1.

FIGURE 1



Si, à l'échéance du swap, $\sigma_R^2 > K_{VAR}$, le négociant recevra de sa contrepartie $(\sigma_R^2 - K_{VAR})$ par dollar de valeur nominale. La valeur nominale ou notionnelle du contrat étant de N\$, il recevra donc : $(\sigma_R^2 - K_{VAR})$ N\$. Si par ailleurs $\sigma_R^2 < K_{VAR}$ à l'échéance du swap, il devra payer à sa contrepartie : $(K_{VAR} - \sigma_R^2)$ N\$. Pour la contrepartie qui paie la variance fixe, le swap de variance est véritablement un contrat à terme de gré à gré⁴ qui fixe irrémédiablement la variance des rendements de l'indice boursier au niveau K_{VAR} dans l'intervalle $[0, T]$.

Pour fixer les idées, supposons que la valeur notionnelle du swap soit de 50 000 \$. La variance fixe du swap (K_{VAR}), dont la durée est ici d'un an, est établie à 15 %. Si la variance réalisée du swap s'est établie à 10 % durant la durée du swap, le négociant devra payer au Fonds 250 000 \$⁵. Par ailleurs, si la volatilité réalisée s'est plutôt avérée de 20 % durant l'année, le Fonds devra payer 250 000 \$ au négociant, ce qui le compensera en tout ou en partie pour les pertes qu'il a subies lors de l'exercice des options qu'il a écrites. Le swap de volatilité, qui fait l'objet de cet article, fonctionne sur le même principe que le swap de variance sauf que sa cote est l'écart type des rendements réalisés d'un titre financier et non sa variance, comme c'est le cas pour le swap de variance. Nous verrons dans les prochains paragraphes que la cote d'un swap de volatilité est reliée à celle d'un swap de variance par un ajustement dit de convexité.

Il convient d'ajouter davantage de formalisme dans nos propos concernant les swaps de variance et de volatilité. Réexaminons d'abord

le swap de variance et tournons-nous encore vers la contrepartie qui paie la variance fixe du swap, désignée par K_{VAR} . Comme on vient de le constater, le swap de variance est un contrat à terme de gré à gré dont le prix d'exercice est de K_{VAR} . Pour la contrepartie qui paie la variance fixe, ce swap équivaut à, d'une part, une position en compte dans une option d'achat dont le prix d'exercice est de K_{VAR} et, de l'autre, à une position à découvert dans une option de vente dont le prix d'exercice est également de K_{VAR} . Pour cette contrepartie, la valeur du swap de durée T est donc, par dollar de valeur nominale, de :

$$\text{swap} = E^Q \left[e^{-\int_0^T r(\tau) dt} (\sigma_R^2 - K_{VAR})^+ \right] - E^Q \left[e^{-\int_0^T r(\tau) dt} (K_{VAR} - \sigma_R^2)^+ \right] \quad (1)$$

avec :

$E^Q(\cdot)$: opérateur d'espérance dans un univers neutre au risque;

$r(\tau)$: taux d'intérêt instantané.

À l'échéance du swap, la contrepartie qui paie la variance fixe recevra un flux monétaire de $(\sigma_R^2 - K_{VAR})$ par dollar de valeur nominale si $\sigma_R^2 > K_{VAR}$ et elle paiera $(K_{VAR} - \sigma_R^2)$ par dollar de valeur nominale si $\sigma_R^2 < K_{VAR}$. Dans le premier cas, elle exerce l'option d'achat emmagasinée dans le swap qui est alors en jeu. Dans le second cas, l'option de vente du swap est alors exercée mais, comme ladite contrepartie est à découvert sur cette option, elle doit payer le flux monétaire (*payoff*) correspondant à son exercice. Pour la contrepartie qui paie la variance fixe, ce contrat à terme cristallise donc irrémédiablement la variance du rendement au niveau K_{VAR} , comme c'est là la fonction de tout contrat à terme.

Le prix d'exercice d'un swap de variance est donné par K_{VAR} . Sachant que la valeur d'un swap est nulle à son émission, la juste valeur de K_{VAR} est de⁶ :

$$K_{VAR} = E^Q(\sigma_R^2) . \quad (2)$$

La cote d'un swap de variance correspond à K_{VAR} .

Nous venons d'envisager un swap de variance. Un swap de volatilité est défini, pour sa part, sur l'écart type du rendement du sous-jacent. Toujours pour la contrepartie qui paie la volatilité fixe, la valeur de ce swap est de :

$$\text{swap} = E^Q \left[e^{-\int_0^T r(\tau) dt} (\sigma_R - K_{VOL})^+ \right] - E^Q \left[e^{-\int_0^T r(\tau) dt} (K_{VOL} - \sigma_R)^+ \right] \quad (3)$$

avec :

K_{VOL} : volatilité fixe du swap de volatilité.

À l'instar du swap de variance, le prix d'exercice K_{VOL} est fixé initialement à :

$$K_{VOL} = E^Q(\sigma_R). \quad (4)$$

C'est là la cote d'un swap de volatilité. Nous verrons dans la section suivante que Javaheri, Wilmott et Haug (2002) ont dérivé une solution analytique pour K_{VOL} .

Pour terminer cette section, notons les diverses utilisations du swap de volatilité. Celui-ci peut d'abord servir à spéculer sur la tendance de la volatilité. On peut également recourir au swap de volatilité pour négocier l'écart (*spread*) entre la volatilité réalisée et la volatilité implicite ou encore pour couvrir l'exposition à la volatilité implicite comme c'était le cas pour notre négociant.

3. LA SOLUTION ANALYTIQUE DE JAVAHERI, WILMOTT ET HAUG (2002)

Le modèle de Javaheri, Wilmott et Haug (2002) vise à estimer la cote du swap de volatilité, soit K_{VOL} . Selon l'équation 4, cela revient à évaluer $E^Q(\sigma_R)$. On suppose ici que la variance instantanée du rendement du sous-jacent de l'option, désignée par v , obtempère à un processus stochastique de retour vers la moyenne, c'est-à-dire :

$$dv = \kappa(\theta - v) dt + \gamma v dW \quad (5)$$

avec :

κ : vitesse d'ajustement;

θ : moyenne à long terme de la variance;

dW : processus de Wiener, soit $dW = \varepsilon \sqrt{dt}$, où $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

L'équation (5) est calibrée à partir de l'estimation d'un processus GARCH (1,1) pour la variance du rendement, c'est-à-dire :

$$\hat{v}_t = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}\varepsilon_{t-1}^2 + \hat{\beta}v_{t-1}. \quad (6)$$

Il existe une équivalence entre les coefficients estimés du processus GARCH (1,1) (équation 6) et les paramètres du processus stochastique de retour vers la moyenne (équation 5)⁷. Cette équivalence est la suivante :

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{V}}{dt} \quad (7)$$

$$\text{avec : } \hat{V} = \frac{\hat{c}}{1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta}}$$

$$\hat{\kappa} = \frac{1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta}}{dt} \quad (8)$$

$$\hat{\gamma} = \hat{\alpha} \sqrt{\frac{\hat{\xi} - 1}{dt}} \quad (9)$$

où ξ est le coefficient de leptocurtisme de Pearson.

Pour estimer l'espérance de la variance dans l'équation 2, on se sert de la fonction $F(v, I, T)$, où I désigne la variance des rendements. Cette fonction peut être trouvée en recourant à l'équation rétrospective de Feynman-Kac, dont la forme générale est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} g(v)^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} + f(v) \frac{\partial}{\partial v} + v \frac{\partial}{\partial I} = 0. \quad (10)$$

L'équation de la fonction F peut alors s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \gamma^2 v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial F}{\partial v} + v \frac{\partial F}{\partial I} = 0 \quad (11)$$

avec : $F(v, I, T) = I$.

En solutionnant cette équation différentielle, on trouve la valeur de l'espérance de I , qui est égale à K_{VAR} selon l'équation 2, soit la cote du swap de variance. Cette équation est définie en termes des paramètres de l'équation différentielle stochastique de la variance (équation 5) :

$$F(v, I, T) = \theta \left(T - t + \frac{e^{-\kappa(T-t)} - 1}{\kappa} \right) + \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) v + I = K_{VAR} . \quad (12)$$

Nous voulons maintenant évaluer K_{VOL} , ce qui revient à estimer l'espérance neutre au risque de l'écart type des rendements selon l'équation 4. Or, on ne peut calculer K_{VOL} en prenant la racine carré de K_{VAR} car l'on sait que :

$$E(\sqrt{v}) < \sqrt{E(v)}. \quad (13)$$

Pour établir la relation entre les deux espérances apparaissant dans l'équation 13, il faut effectuer l'ajustement de convexité suivant⁸ :

$$E(\sqrt{v}) \cong \sqrt{E(v)} - \frac{\text{Var}(v)}{8E(v)^{3/2}}. \quad (14)$$

Pour estimer K_{VOL} , il faut donc connaître, en plus, la variance de I et non pas simplement son espérance qui est égale à la fonction $F(\cdot)$.

Or,

$$\text{var}(I) = E(I^2) - [E(I)]^2 = G - F^2. \quad (15)$$

Il reste à déterminer la fonction $G(\cdot)$. Javaheri, Wilmott et Haug (2002) lui donnent la forme suivante :

$$G(v, I, T) = f(t) + g(t)v + h(t)v^2 + l(t)I + n(t)vI + I^2. \quad (16)$$

Les composantes de la fonction $G(\cdot)$ sont détaillées dans l'annexe A-2.

En combinant les équations 12, 14 et 15, on obtient la valeur de K_{VOL} , soit la cote (ajustée) du swap de volatilité :

$$K_{\text{VOL}} = \sqrt{F} - \frac{G - F^2}{8(F)^{3/2}} \quad (17)$$

où \sqrt{F} est le prix d'exercice non ajusté⁹ du swap de volatilité et où $\frac{G - F^2}{8(F)^{3/2}}$ est un ajustement dit de convexité.

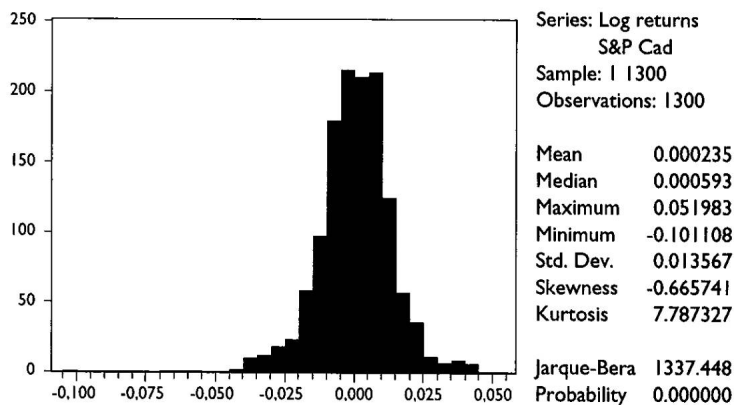
4. UN EXEMPLE NUMÉRIQUE

On désire calculer la cote d'un swap de volatilité basé sur l'indice de la Bourse de Toronto S&P TSX60, swap dont la durée est de 0,91 an. On se situe le 28 février 2002. Apparaît à la figure 2, l'histogramme des rendements journaliers de cet indice pour la période s'étirant de janvier 1997 à février 2002, qui compte en tout 1 300 observations.

Ces rendements sont calculés par la formule : $r_t = \log \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$, P_t désignant la valeur de l'indice à l'instant t . On observe, à la figure 2, un excès de leptocurtisme au chapitre de la distribution des rendements journaliers de l'indice TSX60. Par ailleurs, on remarque, à la figure 3, que la volatilité des rendements incorpore de l'hétéroscédasticité conditionnelle, aux épisodes de forte volatilité succédant à des épisodes

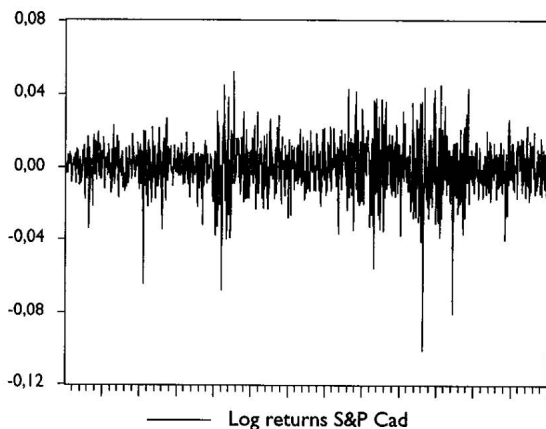
de volatilité plus faible. Une analyse économétrique plus poussée, qui n'est pas détaillée dans cet article, nous a confirmé cette présence d'hétéroscédasticité conditionnelle¹⁰.

FIGURE 2
HISTOGRAMME DES RENDEMENTS JOURNALIERS
DUTSX60
JANVIER 1997-FÉVRIER 2002



Source: EViews.

FIGURE 3
VOLATILITÉ DES RENDEMENTS DU TSX60



Source: EViews.

L'estimation de la variance des rendements du TSX60 par le truchement d'un processus GARCH (1,1) se retrouve au tableau 1.

TABLEAU I
PROCESSUS GARCH (1,1) APPLIQUÉ
AUX RENDEMENTS DU TSX60
JANVIER 1997-FÉVRIER 2003

Dependent Variable: Log returns of S&P 60 Canada Index prices

Method: ML – ARCH

Included observations: 1300

Convergence achieved after 28 iterations

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000617	0.000338	1.824378	0.0681
Variance Equation				
C	2.58E-06	3.91E-07	6.597337	0.0000
ARCH(1)	0.060445	0.007336	8.238968	0.0000
GARCH(1)	0.927264	0.006554	141.4812	0.0000
R-squared	-0.000791	Mean dependent var	0.000235	
Adjusted R-squared	-0.003108	S.D. dependent var	0.013567	
S.E. of regression	0.013588	Akaike info criterion	-5.928474	
Sum squared resid	0.239283	Schwarz criterion	-5.912566	
Log likelihood	3857.508	Durbin-Watson stat	1.886028	

Source: EViews.

Cette estimation nous permet de calculer les paramètres du modèle de volatilité de Javaheri, Wilmott et Haug (2002), soit :

$$\hat{\alpha} = \text{coefficient ARCH (1,1)} = 0,060445;$$

$$\hat{\beta} = \text{coefficient GARCH (1,1)} = 0,927264;$$

$$= \text{coefficient de leptocurtisme de Pearson}^{11} = 7,787327;$$

$$\hat{\theta} = 0,05289724 \text{ (équation 7);}$$

$$\hat{\kappa} = 3,09733 \text{ (équation 8);}$$

$$\hat{\gamma} = 2,499827486 \text{ (équation 9);}$$

$$\hat{V} = 0,00020991 \text{ (équation 7);}$$

$$\hat{v} = \text{variance instantanée, soit la dernière observation}^{12} \\ \text{du GARCH (1,1)} = 0.0001\%;$$

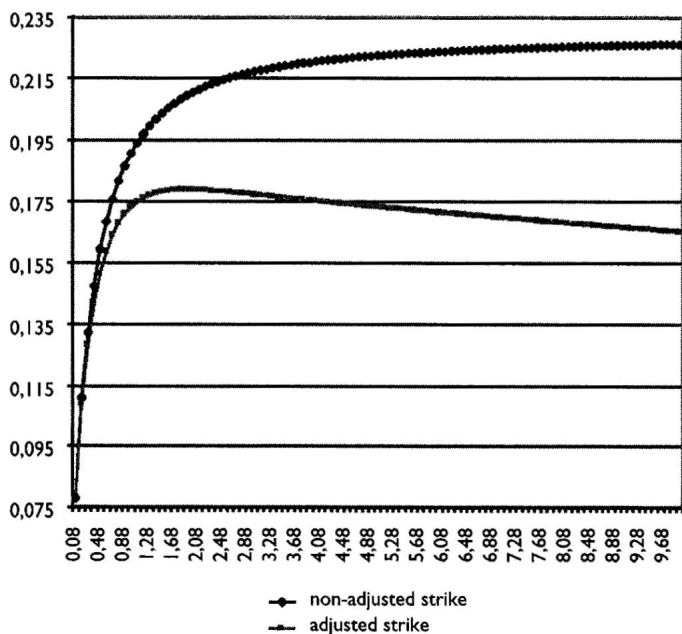
$$dt = 1/252 = 0,003968254;$$

$$I = 0 \text{ à la date d'émission du swap.}$$

En recourant par la suite à la solution analytique proposée par Javaheri, Wilmott et Haug (2002) qui est programmée en Visual Basic à l'annexe A-3, et qui contient, entre autres, les calculs détaillés de notre exemple, on trouve la valeur suivante pour la fonction $F(\cdot)$: $F(v, I, T) = 3,5256 \%$. Puis on calcule la fonction $G(\cdot)$: $G(v, I, T) = 0,2104 \%$. La variance de I , égale à $(G - F^2)$ selon l'équation 15, est égale à $0,0861 \%$. On peut donc évaluer la cote de ce swap (K_{VOL}) en vertu de l'équation 4. La cote non ajustée de ce swap, égale à $\sqrt{F(\cdot)}$, est de $18,7751 \%$. L'ajustement dit de convexité, donné par l'équation 17, est de : $1,6262 \%$. La cote ajustée (K_{VOL}) du swap de 0,91 année est donc de : $18,7751 \% - 1,6262 \% = 17,1489 \%$.

Nous répétons cette procédure pour des échéances de swaps sur le TSX60 allant jusqu'à 10 ans. Les cotes de ces calculs sont colligées à la figure 4.

FIGURE 4
COTES DE SWAPS DE VOLATILITÉ SUR LE TSX60
POUR DIVERSES ÉCHÉANCES
28 FÉVRIER 2002



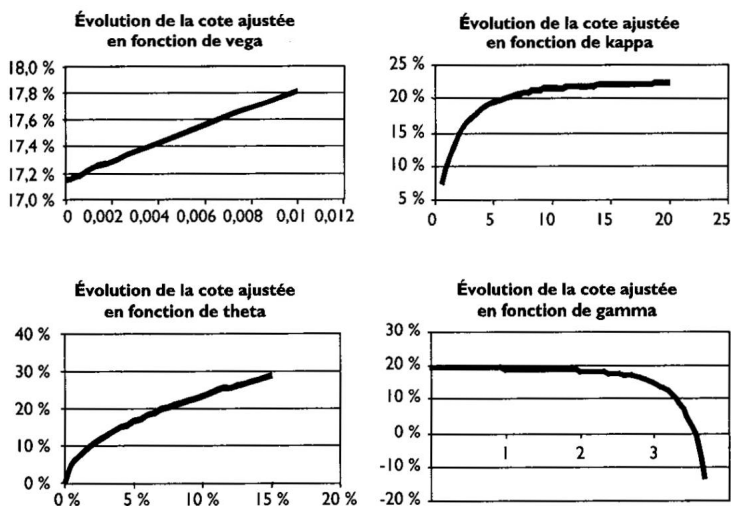
Source: EViews.

On constate à la figure 4 que l'ajustement pour des fins de convexité dépend de la volatilité réalisée. Intuitivement, plus éloignée est l'échéance du swap et plus élevée est la volatilité, plus important sera alors l'ajustement pour des fins de convexité.

Il convient d'examiner la sensibilité de la solution analytique proposée par Javaheri, Wilmott et Haug (2002) à l'estimation de ses paramètres. En effet, une trop grande sensibilité du modèle à ses paramètres est susceptible d'entraîner des erreurs importantes au chapitre du calcul de la cote ajustée du swap, notamment si l'estimation du processus GARCH laisse à désirer. Il est également de bon ton d'examiner l'instabilité que pourraient créer certains paramètres dans ledit modèle.

À la figure 5, on retrouve une simulation de la cote ajustée du swap en fonction de quatre paramètres du modèle : v , κ , θ et γ .

FIGURE 5
ÉVOLUTION DE LA COTE AJUSTÉE DU SWAP DE VOLATILITÉ EN FONCTION DE QUATRE PARAMÈTRES :
 v , κ , θ et γ



On note sur cette figure que la cote ajustée n'est pas très sensible à l'estimation de la variance instantanée (v), ce qui est un avantage car il existe des risques importants au chapitre de l'estimation de cette variable, celle-ci étant en effet la dernière observation annualisée

du processus GARCH estimé¹³. S'agissant de κ , soit le coefficient mesurant la vitesse de retour de la variance instantanée vers sa valeur de long terme, on remarque que la solution y est très sensible lorsque le coefficient se situe dans un intervalle compris entre 0 et 5 mais que son incidence devient marginale en dehors de cet intervalle. On risque donc de sous-estimer la cote quand la vitesse d'ajustement de la variance instantanée est lente, du fait des imprécisions qui peuvent se glisser dans l'estimation de ce coefficient à l'intérieur du processus GARCH¹⁴.

La progression de la cote ajustée en fonction de θ révèle que l'estimation de la moyenne à long terme de la variance instantanée exerce une grande incidence sur le calcul de la cote ajustée, la relation entre ces deux variables ayant la même tendance à devenir proportionnelle. Mais plus problématique s'avère la relation entre la cote ajustée et γ , ce dernier coefficient dépendant notamment du niveau du leptocurtisme associé à la distribution des rendements du TSX60 selon l'équation 9. Contrairement aux autres paramètres analysés, la relation entre la cote ajustée et γ s'avère négative puisque ce coefficient exerce une influence prépondérante sur l'ajustement pour des fins de convexité. Jusqu'à un niveau de 2, ce paramètre n'influence guère la solution mais son effet dépressif sur la cote ajustée n'a de cesse de s'intensifier à partir de ce niveau. La simulation révèle que lorsque γ dépasse un certain seuil, soit 3,5 dans notre simulation, la cote ajustée devient même négative¹⁵. Le leptocurtisme de la distribution des rendements, du fait de son influence sur le coefficient d'ajustement pour la convexité, exerce donc une influence des plus importantes sur la solution analytique présentée dans cet article et ce quatrième moment de la distribution des rendements peut devenir problématique pour le modèle s'il s'avère trop élevé.

Nous avons refait ces simulations pour un swap de volatilité à plus long terme, soit un swap de 5 ans. Ces simulations ont révélé que, pour espérer une cote ajustée positive, le coefficient κ devait excéder 3. Le swap à plus long terme s'accommode donc très mal d'une vitesse d'ajustement lente du côté de la variance instantanée. Un coefficient γ au-dessus de 2,5 tue également le swap, la cote ajustée devenant négative lorsque ce coefficient excède cette valeur¹⁶. Dans le cadre de notre exemple, le seuil critique de leptocurtisme à ne pas dépasser se situe à 8. Comme celui-ci est de 7,78 dans notre exemple, nous sommes assez rapprochés de la borne fatale pour le leptocurtisme. Certes, il ne faut pas négliger non plus l'interaction entre les paramètres du modèle, le coefficient γ dépendant également du coefficient α selon l'équation 9.

5. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons montré comment les marchands de variance et de volatilité déterminaient les cotes de leurs swaps, à la faveur de la solution analytique proposée par Javaheri, Wilmott et Haug (2002). Puis nous avons appliqué leur solution à des swaps de volatilité sur le TSX60 pour diverses échéances.

Une simulation du modèle a révélé que celui-ci était très sensible à l'estimation de certains de ses paramètres, notamment la vitesse d'ajustement de la variance instantanée vers son niveau de long terme et le degré de leptocurtisme dans la distribution des rendements. Une estimation trop faible pour la vitesse d'ajustement ou un trop fort degré de leptocurtisme peuvent tuer le swap de volatilité. Ces résultats étant plus prononcés pour les swaps à plus long terme, cela peut remettre en question le recours à la solution analytique de Javaheri, Wilmott et Haug (2002) pour déterminer les cotes de tels swaps.

Références

- Ahn, H. R., K. Arkel, E. Choe, E. Holstad, et P. Wilmott, 1999, « Optimal Static Vega Hedge », MFG working paper, Oxford University .
- Brockhaus, O. et D. Long, 2000, « Volatility Swaps Made Simple », *Risk Magazine*, January.
- Carr, P. et D. Madan, 1998, « Toward a Theory of Volatility Trading », <http://www.math.edu/research/carro/papers/>.
- Copeland, T. et V. Antikarov, 2001, « Real Options: A Practitioner's Guide », Texere, New York.
- Demeterifi, K., E. Derman, M. Kamal, et J. Zou, 1999, « More Than you Ever Wanted to Know About Volatility Swaps », Working paper, Goldman Sachs. <http://www.gs.com/qs/doc/volswaps.pdf>.
- Engle, R. F. et J. Mezrich, 1995, « Grappling with GARCH », *Risk Magazine*, September.
- Engle, R. F. et V.K. Ng, 1993, « Measuring and Testing the Impact of News on Volatility », *Journal of Finance*, 48,1749-1779.
- Gathedral, J., 2000, « Variance Swaps, Case Studies in Financial Modeling Course Notes », NYU Courant Mathematical Institute, Spring.
- James, J. and N. Webber, 2000, « Interest Rate Modelling », John Wiley and Sons, New York.
- Javaheri, A., P. Wilmott et E. G. Haug, 2002, « GARCH and Volatility Swaps », *Wilmott technical article*, January. <http://www.wilmott.com>.
- Ritchken, P., et R. Trevor, 1997, « Pricing Options Under Generalized GARCH and Stochastics Volatility Porcesses », *CMBF Papers*. <http://www.mafc.mq.edu.au/MAFCpapers/papers.htm>.

Nous voulons approximer l'équation suivante :

$$F(x) = x^{1/2}$$

qui est la forme prise par la volatilité. Une expansion de Taylor du second degré de la fonction $F(x)$ autour de x_0 donne :

$$F(x) \cong F(x_0) + F'(x_0) (x - x_0) + \frac{1}{2} F''(x_0) (x - x_0)^2$$

avec :

$$F'(x) = \frac{1}{2x^{1/2}}$$

et :

$$F''(x) = \frac{1}{4x^{3/2}}.$$

Par substitution, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(x) &\cong x_0^{1/2} + \frac{x - x_0}{2x_0^{1/2}} - \frac{1}{8} \frac{(x - x_0)^2}{x_0^{3/2}} \\ &\cong \frac{x + x_0}{2x_0^{1/2}} - \frac{(x - x_0)^2}{8x_0^{3/2}} \end{aligned}$$

Pour $x = v$ et $x_0 = E[v]$, on a :

$$\sqrt{v} \cong \frac{(v + E[V])}{2\sqrt{E[v]}} - \frac{(v - E[v])^2}{8E[v]^{3/2}}.$$

En prenant l'espérance des deux côtés de cette équation, on a :

$$E[\sqrt{v}] \cong \frac{E[v] + E[v]}{2\sqrt{E[v]}} - \frac{E[(v - E[v])^2]}{8E[v]^{3/2}}.$$

Finalement,

$$E(\sqrt{v}) \cong \sqrt{E(v)} - \frac{\text{Var}(v)}{8E(v)^{3/2}}$$

soit l'équation 14.

$$\begin{aligned}
 f(t) = & \theta^2(T-t)^2 - \frac{4\theta^2(\gamma^2 - \kappa)}{\kappa(\gamma^2 - 2\kappa)} \left(T-t + \frac{e^{-\kappa(T-t)} - 1}{\kappa} \right) \\
 & - \frac{4\theta^2\kappa^2}{(\gamma^2 - \kappa)^2(\gamma^2 - 2\kappa)} \left(\frac{1 - e^{(\gamma^2 - 2\kappa)(T-t)}}{(\gamma^2 - 2\kappa)} + \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \right) \\
 & - \frac{2\theta^2(\gamma^2 + \kappa)}{\gamma^2 - \kappa} \left(e^{-\kappa(T-t)} \frac{T-t}{2} \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} (e^{-\kappa(T-t)} - 1) \right)
 \end{aligned}$$

$$l(t) = 2\theta \left(T-t + \frac{e^{-\kappa(T-t)} - 1}{\kappa} \right)$$

$$n(t) = \frac{2}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)})$$

$$h(t) = \frac{2}{\kappa(\gamma^2 - 2\kappa)} (e^{(\gamma^2 - 2\kappa)(T-t)} - 1)$$

$$- \frac{2}{\kappa(\gamma^2 - \kappa)} (e^{(\gamma^2 - 2\kappa)(T-t)} - e^{-\kappa(T-t)})$$

$$\begin{aligned}
 g(t) = & \frac{2\theta}{\kappa} (T-t) - \frac{4\theta(\gamma^2 - \kappa)}{\kappa^2(\gamma^2 - 2\kappa)} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\
 & + \frac{4\theta\kappa}{(\gamma^2 - \kappa)^2(\gamma^2 - 2\kappa)} (e^{(\gamma^2 - 2\kappa)(T-t)} - e^{\kappa(T-t)}) \\
 & + \frac{2\theta(\gamma^2 + \kappa)}{\kappa(\gamma^2 - \kappa)} (T-t) e^{-\kappa(T-t)}
 \end{aligned}$$

ANNEXE A-3**PROGRAMME VISUAL BASIC (EXCEL) POUR
ÉVALUER LA COTE D'UN SWAP DE VOLATILITÉ**

' **F(v, I, t)**

Public Function FvIt(v, I, T, t1, kappa, theta)

FvIt = (theta * (T - t1 + (Exp(-kappa * (T - t1)) - 1) / kappa) -
+ 1 / kappa * (1 - Exp(-kappa * (T - t1))) * v + I) / T

End Function

' **G(v, I, t)**

Public Function GvIt(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma)

GvIt = (ft(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma) +
gt(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma) *
v + ht(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma) * v ^ 2 +
lt(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma) * I +
nt(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma) * v * I + I ^ 2) / T ^ 2

End Function

Public Function ft(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma)

ft = theta ^ 2 * (T - t1) ^ 2 - 4 * theta ^ 2 * (gamma ^ 2
- kappa) / (kappa * (gamma ^ 2 - 2 * kappa)) -
* (T - t1 + (Exp(-kappa * (T - t1)) - 1) / kappa) -
- 4 * theta ^ 2 * kappa ^ 2 / ((gamma ^ 2 - kappa) ^ 2
* (gamma ^ 2 - 2 * kappa)) -
* ((1 - Exp((gamma ^ 2 - 2 * kappa) * (T - t1))) / (gamma
^ 2 - 2 * kappa) + (1 - Exp(-kappa * (T - t1))) / kappa) -
- 2 * theta ^ 2 * (gamma ^ 2 + kappa) / (gamma ^ 2 - kappa) -
* (Exp(-kappa * (T - t1)) * (T - t1) / kappa + 1 / kappa ^ 2
* (Exp(-kappa * (T - t1)) - 1))

End Function

Public Function gt(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma)

gt = 2 * theta / kappa * (T - t1) - 4 * theta * (gamma ^ 2
- kappa) / (kappa ^ 2 * (gamma ^ 2 - 2 * kappa))
* (1 - Exp(-kappa * (T - t1))) -
+ 4 * theta * kappa / ((gamma ^ 2 - kappa) ^ 2 * (gamma
^ 2 - 2 * kappa)) -

ANNEXE A-3 (suite)

* (Exp((gamma ^ 2 - 2 * kappa) * (T - t1)) - Exp(-kappa * (T - t1))) _
+ 2 * theta * (gamma ^ 2 + kappa) / (kappa * (gamma ^ 2 - kappa)) * (T - t1) * Exp(-kappa * (T - t1))

End Function

Public Function ht(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma)

ht = 2 / (kappa * (gamma ^ 2 - 2 * kappa)) * (Exp((gamma ^ 2 - 2 * kappa) * (T - t1)) - 1) _
- 2 / (kappa * (gamma ^ 2 - kappa)) * (Exp((gamma ^ 2 - 2 * kappa) * (T - t1)) - Exp(-kappa * (T - t1)))

End Function

Public Function lt(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma)

lt = 2 * theta * (T - t1 + (Exp(-kappa * (T - t1)) - 1) / kappa)

End Function

Public Function nt(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma)

nt = 2 / kappa * (1 - Exp(-kappa * (T - t1)))

End Function

Public Function VarI(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma As Double)

VarI = GvIt(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma) - FvIt(v, I, T, t1, kappa, theta) * _

FvIt(v, I, T, t1, kappa, theta)

End Function

Public Function convexity_adjustment(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma As Double)

convexity_adjustment = VarI(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma) / _
(8 * FvIt(v, I, T, t1, kappa, theta) ^ 1.5)

End Function

ANNEXE A-3 (suite)

Public Function nonadjusted_strike(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma As Double)

'calcul de la cote non ajustée

$\text{nonadjusted_strike} = \text{FvIt}(v, I, T, t1, \text{kappa}, \text{theta}) ^ 0.5$

End Function

Public Function adjusted_strike(v, I, T, t1, kappa, theta, gamma As Double)

'calcul de la cote ajustée

$\text{adjusted_strike} = \text{nonadjusted_strike}(v, I, T, t1, \text{kappa}, \text{theta}, \text{gamma}) - _$

$\text{convexity_adjustment}(v, I, T, t1, \text{kappa}, \text{theta}, \text{gamma})$

End Function

Voici les calculs des composantes de la solution analytique de Javaheri, Wilmott et Haug (2002) pour le cas analysé dans la section 4 :

	A	B	C	D	E
1	Input			Output	
2	v	0,000001		F	3,5250 %
3	I	0		G	0,2104 %
4	T	0,91		ft	0,1742 %
5	t1	0		gt	3,6984 %
6	kappa	3,09733		ht	39,9356 %
7	theta	0,05289724		lt	6,4155 %
8	gamma	2,499827486		nt	60,7174 %
9				VARI	0,0861 %
10				ajustement convexité	1,6262 %
11				cote non ajustée	18,7751 %
12				cote ajustée	17,1488 %

Notes

1. Voir, par exemple : Carr, P. et D. Madan (1998).

2. *Over the counter*.

3. *Long Term Capital Management*.

4. Soit un *forward contract* en anglais.

5. Soit $\sigma_R^2 - K_{VAR} \times N = (10 - 15) \times 50000 = (250000)\$$.

6. Le prix d'exercice d'un swap de variance doit être comparé à celui du prix initial d'un contrat à terme sur une action, ne serait-ce que par analogie. Pour ce contrat à terme : $F = E^Q(S_T)$, où F est le prix à terme et S_T , le prix de l'action à l'échéance du contrat à terme. L'analogie avec le swap de variance est immédiate.

7. Il existe plusieurs références s'agissant de l'équivalence entre un processus GARCH (1,1) et un processus stochastique. En plus de l'article de Javaheri, Wilmott et Haug (2002), qui fait figure de pilier du nôtre, notons : James et Webber (2000), chap. 18.

8. Pour des détails supplémentaires sur cette approximation, voir Brockhaus et Long (2000). L'annexe A-1 donne les aspects formels de cette approximation.

9. Ou cote non ajustée.

10. Demeterfi, K. et al. nous rappellent que pour calculer la volatilité réalisée, les aspects suivants doivent être pris en compte : i) la source et la fréquence d'observation du prix de l'action ou de l'indice, ici les cotes journalières du TSX60; ii) le facteur d'annualisation pour passer d'une volatilité horaire ou journalière à une volatilité annuelle. Dans notre cas, l'année comporte 252 jours ouvrables, de telle sorte que le facteur d'annualisation est de 252 pour passer d'une variance journalière à une variance annuelle; iii) la technique de calcul de la variance des rendements, notamment au niveau de la moyenne des rendements. Considère-t-on la moyenne échantillonnale des rendements ou suppose-t-on que cette moyenne est nulle?

11. Calculé à la figure 2.

12. Annualisée.

13. Certes, la variance instantanée initiale (*seed value*) joue davantage quand la vitesse d'ajustement de la variance vers son niveau de long terme est faible. Son influence sur la solution analytique s'efface progressivement au fur et à mesure que sa vitesse d'ajustement augmente.

14. Un autre facteur doit être considéré ici. Théoriquement, plus la vitesse d'ajustement des éléments d'une série temporelle quelconque vers sa moyenne de long terme est faible, moins le degré d'autocorrélation négative entre les éléments de cette série est important. L'autocorrélation peut même devenir positive si la vitesse d'ajustement est trop faible, ce qui semble beaucoup perturber le modèle de Javaheri, Wilmott et Haug (2002) qui suppose un processus de retour vers la moyenne pour la variance instantanée des rendements. S'agissant de la relation théorique entre l'autocorrélation et le paramètre de vitesse d'ajustement d'une série temporelle, on consultera, entre autres : Copeland et Antikarov (2001), chap.9, 253-255.

15. Par exemple, en fixant γ à 4 dans notre exemple d'un swap de volatilité sur le TSX60 de 0,91 an et en retenant les valeurs estimées pour les autres paramètres, la cote non ajustée s'établit alors à 18,77 % et le coefficient d'ajustement pour la convexité grimpe à 112,6 %. La cote ajustée, à hauteur de -93,83 %, devient donc fortement négative.

16. Que les swaps à plus long terme réagissent davantage au coefficient γ est tout à fait normal, puisque nous avons vu que l'ajustement pour la convexité augmente avec la durée du swap de volatilité.