L'Actualité économique

La démocratie : oui, mais laquelle?
Democracy: Yes, But Which One?

Michel Truchon

Volume 75, Number 1-2-3, mars–juin–septembre 1999

L'économie publique

URI: https://id.erudit.org/iderudit/602289ar
DOI: https://doi.org/10.7202/602289ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Truchon, M. (1999). La démocratie : oui, mais laquelle? *L'Actualité économique*, *75*(1-2-3), 189–214. https://doi.org/10.7202/602289ar

Article abstract

This paper uses the results of a poll held at Université Laval to illustrate the difficulty in aggregating individual preferences. In this poll, voters were asked to rank four candidates for a position of dean. The paper provides a brief survey of the literature on the theory of social choice, from which it borrows heavily. It first shows how apparently clear results, from the perspective of the plurality rule, may violate the Condorcet principle according to which a candidate who is ranked ahead of another candidate by a majority of voters should also come ahead in the collective ranking. Next, it presents weighted majority procedures, or positional rules, among which the plurality rule and the Borda count. It discusses manipulation of these rules as a function of the weighting scheme. Going back to the Condorcet principle, it is well known that its application to all pairs of candidates may yield a cycle. This is the famous Condorcet paradox. Many procedures have been proposed to break these cycles while retaining the Condorcet principle whenever possible. This paper advocates for the maximum likelihood procedure as the more natural way out of these cycles. Many examples are provided.

L'Actualité économique, Revue d'analyse économique, vol. 75, nos 1-2-3, mars-juin-septembre 1999

LA DÉMOCRATIE : OUI, MAIS LAQUELLE?*

Michel TRUCHON
CRÉFA
et *Département d'économique,*
Université Laval

RÉSUMÉ – Cet article illustre les difficultés inhérentes au processus démocratique à partir des résultats d'une consultation tenue à l'Université Laval, dans le cadre de la nomination d'un doyen. Lors de ce scrutin, les votants devaient en principe ordonner tous les candidats, au nombre de quatre. La compilation des résultats s'avérait donc un exercice d'agrégation des ordres (préférences) individuels en ordre (préférence) collectif. L'article emprunte abondamment à la littérature sur la théorie des choix sociaux et constitue en quelque sorte un survol partiel de cette dernière. Il montre d'abord comment des résultats, en apparence si clairs selon la règle de la pluralité, peuvent venir en contradiction avec le principe de la majorité préconisé par Condorcet. Ce dernier veut qu'un candidat, que la majorité des votants placent avant un autre, se retrouve également avant ce dernier dans l'ordre collectif. L'article présente ensuite les procédures de vote pondéré, les plus connues étant celles de la pluralité et de Borda. Il discute des possibilités de manipulation de ces procédures selon le système de pondération choisi. Pour revenir au principe de Condorcet, son application à toutes les paires de candidats peut malheureusement donner des cycles dans les préférences collectives. C'est le fameux paradoxe de Condorcet. Plusieurs méthodes ont été proposées pour briser ces cycles. L'article présente la méthode dite du maximum de vraisemblance comme celle qui se rapproche davantage de l'esprit du principe de Condorcet. Plusieurs exemples sont fournis tout au long de l'article.

ABSTRACT – *Democracy: Yes, But Which One?* This paper uses the results of a poll held at Université Laval to illustrate the difficulty in aggregating individual preferences. In this poll, voters were asked to rank four candidates for a position of dean. The paper provides a brief survey of the literature on the theory of social choice, from which it borrows heavily. It first shows how apparently clear results, from the perspective of the plurality rule, may violate the Condorcet principle according to which a candidate who is ranked ahead of another candidate by a majority of voters should also come ahead in the collective ranking. Next, it presents weighted majority procedures, or positional rules, among which the

---

* Je remercie Michel Le Breton, Cyril Tejedo et un évaluateur anonyme pour leurs commentaires judicieux sur une version antérieure. Toute erreur éventuelle demeure évidemment ma responsabilité. Je remercie également le Conseil de recherche en sciences humaines du Canada pour son appui financier.

plurality rule and the Borda count. It discusses manipulation of these rules as a function of the weighting scheme. Going back to the Condorcet principle, it is well known that its application to all pairs of candidates may yield a cycle. This is the famous Condorcet paradox. Many procedures have been proposed to break these cycles while retaining the Condorcet principle whenever possible. This paper advocates for the maximum likelihood procedure as the more natural way out of these cycles. Many examples are provided.

INTRODUCTION

Dans nos sociétés, le principe de la majorité est généralement bien accepté. Son application ne pose aucune difficulté lorsqu'il s'agit de choisir entre deux candidats ou deux options données. Il en va tout autrement lorsqu'il y a au moins trois candidats ou options. Cette difficulté est connue au moins depuis le 18^{e} siècle alors que deux membres célèbres de l'Académie royale des sciences de France, Borda et Condorcet, disputaient de la problématique.

Le présent article prend prétexte d'une consultation tenue à l'Université Laval, dans le cadre de la nomination d'un doyen, pour illustrer les difficultés inhérentes au processus démocratique. Lors de ce scrutin, les votants devaient en principe ordonner tous les candidats, au nombre de quatre. La compilation des résultats s'avérait donc un exercice d'agrégation des ordres (préférences) individuels en ordre (préférence) collectif. C'est le problème auquel s'est attaqué Arrow (1963). On connaît depuis lors les difficultés inhérentes à ce genre d'exercice. Au cours des dernières décennies, des centaines de chercheurs de disciplines aussi diverses que la science économique, la science politique, la philosophie, les mathématiques et la statistique se sont penchés sur la question. Toutes ces recherches confirment l'absence de méthode idéale pour prendre en compte les opinions des citoyens dans les décisions collectives et encore moins pour agréger les préférences individuelles en préférence collective.

L'article emprunte abondamment à cette littérature sur les choix sociaux et constitue en quelque sorte un survol partiel de cette dernière. Il montre d'abord comment des résultats en apparence si clairs, par rapport à la règle de la pluralité entre autres, peuvent venir en contradiction avec le principe de la majorité préconisé par Condorcet. Ce dernier, qui est présenté de façon formelle dans Truchon (1998a et b), veut qu'un candidat, que la majorité des votants placent de façon cohérente avant un autre, se retrouve également avant ce dernier dans l'ordre collectif. L'application de ce principe exige que la comparaison des candidats se fasse deux à deux, ce qui est évidemment possible si les votants ordonnent tous les candidats sur leur bulletin de vote. C'est ce que Arrow a appelé la condition d'indépendance par rapport aux candidats non pertinents, une condition qui a aussi fait couler beaucoup d'encre.

L'article présente ensuite les procédures de vote pondéré. Ce sont les seules qui peuvent être appliquées aux résultats qui ont été publiés dans le cadre du scrutin qui va nous intéresser. Avec ces procédures, c'est comme si les votants, par le choix du rang qu'ils accordent à un candidat, lui attribuaient un poids. Les candidats sont ensuite ordonnés selon la somme des poids ainsi reçus. Les plus connues de ces procédures sont celles de la pluralité et de Borda. Avec la première, un poids égal à un est attribué aux candidats placés au premier rang par un votant et un poids nul est accordé pour les autres rangs. C'est cette règle qu'on utilise quand on demande aux votants de cocher le nom de leur candidat préféré. Selon la règle de Borda, les candidats obtiennent généralement un poids nul pour un dernier rang, un poids égal à un pour un avant-dernier rang, égal à deux pour l'avant-avant-dernier rang et ainsi de suite. Condorcet a critiqué la méthode proposée par Borda parce qu'elle viole la condition d'indépendance de Arrow, entre autres.

Les possibilités de manipulation des scrutins sont connues depuis longtemps. Déjà, au 18^{e} siècle, Laplace (1812) soulignait les possibilités de manipuler la règle de Borda. C'est cependant quelque vingt ans après que Arrow ait publié la première édition de son célèbre ouvrage qu'on a commencé à se pencher de façon systématique sur la possibilité de manipulation des scrutins. Le premier résultat général en ce sens est dû à Gibbard (1973). Ce problème semble venir s'ajouter à celui qu'avait soulevé Arrow avec son célèbre théorème d'impossibilité mais, en fait, Satterthwaite (1975) montre que les deux problèmes sont intimement reliés. Saari (1990) fait une étude exhaustive des possibilités de manipulation des procédures de vote pondéré selon le système de pondération choisi. Le présent article fera ressortir les faits saillants de ses résultats. On verra également que les possibilités de manipulation étaient amplifiées dans le scrutin qui nous intéresse par le fait qu'on a permis aux votants de s'abstenir de donner un rang à certains candidats et d'en placer d'autres *ex aequo.*

Malheureusement, l'application du principe de Condorcet à toutes les paires de candidats ne donne pas nécessairement un ordre cohérent des candidats. Il peut donner des cycles dans les préférences collectives : un candidat A peut être préféré à B par une majorité de votants, B peut être préféré à C par une autre majorité et C peut être préféré à A par une troisième majorité. Condorcet lui-même avait illustré cette possibilité, qu'on appelle d'ailleurs souvent le paradoxe de Condorcet. Le fameux théorème de Arrow est venu en quelque sorte confirmer cette possibilité presque deux siècles plus tard. Selon ce théorème, pour obtenir des préférences collectives transitives dans tous les cas, tout en respectant le vœu unanime des votants s'il y a lieu, il faut donner le pouvoir d'ordonner les candidats à une seule personne, un dictateur. Le théorème de Gibbard-Satterthwaite affirme que c'est aussi la seule façon d'éviter la manipulation. On peut se passer d'un dictateur si on est prêt à se contenter de l'*acyclicité* des préférences collectives mais, dans ce cas, il faut tout de même que la règle d'agrégation accorde un pouvoir de veto à des votants ou sous-groupes de votants. Ce pouvoir de veto est analysé par Le Breton et Truchon (1995), entre autres.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour briser les cycles, tout en respectant le principe de Condorcet dans la mesure du possible. L'article présente celle dite du maximum de vraisemblance. C'est Young (1988) qui la suggère comme une extension naturelle de l'approche de Condorcet. Young (1995) s'en fait un ardent défenseur. On lui donne souvent le nom de Kemeny (1959) parce qu'elle repose, de fait, sur une notion de distance qu'il a proposée. Cette procédure est illustrée à l'aide d'un exemple, comme plusieurs autres points discutés dans l'article.

Le plan de l'article est le suivant. La première section résume les résultats et les circonstances du scrutin qui a servi de prétexte au présent article. La section 2 confronte la règle de la pluralité à l'application du principe de la majorité préconisée par Condorcet. La section 3 décrit les procédures de vote pondéré et montre comment le résultat d'un scrutin peut différer considérablement selon le système de poids choisi. Elle expose également les critiques de la règle de Borda par Condorcet. Ces dernières reposent essentiellement sur la violation de la condition d'indépendance de Arrow. La section 4 discute des conséquences des abstentions et des *ex aequo* sur l'applicabilité d'une procédure donnée. Ces conséquences s'étendent également aux possibilités de manipulation, qui font l'objet de la section 5. La section 6 décrit et illustre la procédure du maximum de vraisemblance telle que préconisée par Condorcet et généralisée par Young. La section 7 discute des propriétés de cette dernière procédure. En guise de conclusion, la dernière section résume l'article et offre quelques remarques supplémentaires.

1. LE SCRUTIN TENU À L'UNIVERSITÉ LAVAL

À l'Université Laval, les doyens sont nommés par le Conseil de l'Université, sur proposition d'un comité de sélection formé à cette fin. Cependant, les membres d'une faculté peuvent demander la tenue d'un scrutin pour leur permettre d'exprimer leurs vues sur le choix de la personne. Il y a un certain temps, le bulletin du Syndicat des professeurs de l'Université Laval a publié les résultats d'une telle consultation. Ces derniers sont reproduits dans le tableau 1 en omettant les noms véritables.

TABLEAU 1

LES RÉSULTATS D'UN SCRUTIN À L'UNIVERSITÉ LAVAL

	Répartition des rangs					Total
Candidat	1er rang	2^{e} rang	3^{e} rang	4^{e} rang	Abs.	
A	44	22	10	12	19	107
B	37	17	18	30	5	107
C	14	18	26	37	12	107
D	12	15	15	47	18	107
Total	107	72	69	126	54	428

L'article commençait par la phrase : « Une procédure de nomination n'a pas à être démocratique! » Après la présentation du tableau, les auteurs ajoutaient : « la recommandation que le comité devait émettre jeudi le 1er juin semblait claire du moins pour les professeurs/e/s. Certains professeurs/e/s faisaient même circuler une pétition le mercredi 31 mai qui demandait qu'un deuxième tour de scrutin soit effectué auprès des professeurs/e/s. Il fallait bien s'assurer d'une vraie démocratie. »

Au vu des difficultés inhérentes au processus démocratique mentionnées en introduction, ce qui est apparu si clair pour les auteurs de l'article ne l'est peut-être pas du tout. Il faut se méfier des soi-disant évidences, aussi bien dans les processus de décisions collectives que dans toute autre question scientifique. C'est ce que nous verrons dans les pages suivantes.

D'ailleurs, si tout était si clair, pourquoi les professeurs auraient-ils demandé un deuxième tour de scrutin? Car, fait intéressant à souligner, on n'avait pas demandé aux votants de cocher uniquement le nom de leur candidat favori, comme dans beaucoup d'élections. Au contraire, les votants devaient en principe donner un rang à tous les candidats. Ils pouvaient même indiquer, d'une certaine façon, l'intensité de leurs préférences ou tenter de manipuler les résultats, en plaçant leur candidat favori au premier rang et les trois autres au quatrième rang ou en utilisant toute autre combinaison et même s'abstenir de donner un rang à certains candidats.

Les votants se sont amplement prévalus de toutes ces possibilités. Ainsi, les 107 votants, dont les bulletins n'ont pas été annulés, ont accordé seulement 72 deuxièmes rangs et 69 troisièmes rangs. Par contre, ils ont accordé 126 quatrièmes rangs et se sont abstenus d'accorder un rang à certains candidats 54 fois au total.

Dans les circonstances, un deuxième scrutin n'aurait pas amené d'information supplémentaire. Toute l'information souhaitable était déjà disponible, en supposant que les votants n'aient pas changé d'idée entre temps. Malheureusement, les résultats qu'on nous a fournis sont une statistique insuffisante de l'information contenue sur les bulletins de vote. Ils ne permettent pas une analyse complète de la volonté des votants.

2. LA RÈGLE DE LA PLURALITÉ ET LE PRINCIPE DE CONDORCET

Comme le candidat A a été placé au premier rang par plus de votants que n'importe quel autre candidat, on peut imaginer que c'est lui qu'on avait en tête quand on parlait de « recommandation claire ». S'en remettre d'emblée à un tel choix reviendrait cependant à utiliser la règle de la pluralité. Si on avait voulu appliquer cette règle, il aurait suffi de demander aux votants de cocher le nom de leur candidat préféré. Dans la mesure où on leur a demandé de se donner la peine d'ordonner les candidats, l'utilisation *ex post* de la règle de la pluralité serait pour le moins paradoxale.

De plus, il est bien connu que cette règle peut mener à l'élection du candidat jugé le pire par une majorité de votants. Un candidat minoritaire peut en effet se faufiler entre deux candidats que la majorité lui préfère. Borda et Condorcet s'étaient tous les deux objectés à la règle de la pluralité pour cette raison.

Condorcet a illustré les défauts de cette procédure avec l'exemple reproduit dans le tableau 2. Ce dernier définit une configuration de bulletins de vote, que l'on appelle *profil de votes* en théorie des choix sociaux. Chaque colonne correspond à une façon de marquer un bulletin de vote ou encore à un type de préférence entre les candidats A, B et C. Les nombres 1, 2, ou 3 sont les rangs accordés aux candidats sur les bulletins de vote. En tête de chaque colonne, apparaît le nombre de votants qui ont rempli leur bulletin de vote de la façon indiquée. Ainsi, la première colonne indique que 23 votants accordent le premier rang au candidat A, le deuxième à C et le troisième à B.

TABLEAU 2

UN PROFIL DE VOTES DÛ À CONDORCET

	Répartition des bulletins				Total
	23	19	16	2	60
A	1	3	3	2	
B	3	1	2	3	
C	2	2	1	1	

Selon Condorcet, si on veut savoir qui, parmi les trois candidats, obtient la faveur de la majorité des votants, il faut recueillir un avis sur trois propositions : entre A et B, quel est le meilleur candidat et de façon similaire pour A et C, puis B et C. À partir du tableau 2, on peut obtenir ces trois avis puisqu'on peut calculer combien de fois A obtient un meilleur rang que B, combien de fois B obtient un meilleur rang que A et de façon similaire pour A et C, puis B et C. Ainsi B obtient le premier rang 19 fois mais il y a aussi 16 votants qui lui accordent le deuxième rang alors qu'ils accordent le 3^{e} rang à A. On peut donc conclure qu'il y a 35 votants qui préfèrent B à A.

Le tableau 3 présente les résultats de ces confrontations, deux à deux, que l'on appelle des *votes binaires*. Le chiffre de la ligne A et de la colonne B est le nombre de fois que le candidat A a été placé avant B. Ceux des autres cases sont définis de façon similaire. C'est le genre de tableau qu'il aurait fallu produire, dans le cadre de la consultation qui nous intéresse, en plus du tableau 1, pour fournir une statistique complète des résultats.

TABLEAU 3

VOTES BINAIRES DÉDUITS DU TABLEAU 2

	Votes binaires			
	A	B	C	Total
A	0	25	23	48
B	35	0	19	54
C	37	41	0	78

Dans le tableau 3, on voit que C est préféré à B par 41 votants contre 19 qui ont la préférence opposée. C est aussi préféré à A par 37 votants contre 23 qui ont la préférence opposée. De plus, B est préféré à A par 35 votants contre 25 qui ont la préférence opposée. Clairement, selon le vœu de la majorité des votants, C l'emporte sur les deux autres et A se retrouve au dernier rang. Dans le langage de la théorie des choix sociaux, C est le *gagnant de Condorcet* et CBA est l'*ordre de Condorcet.* Avec la règle de la pluralité, A gagnerait l'élection avec 23 voix, suivi de B avec 19 et C avec 18, un ordre complètement inversé par rapport à l'ordre de Condorcet.

Dans le scrutin qui nous intéresse, les résultats qui ont été publiés ne permettent pas de dire si, dans les faits, A est le meilleur candidat pour une majorité de votants. Par contre, nous pouvons nous demander si, dans tous les profils de votes qui mènent au tableau 1, A est le meilleur candidat pour une majorité de votants. La réponse est négative puisqu'il existe au moins un profil de bulletins de vote qui mène aux résultats du tableau 1 et pour lequel B est préféré à A par une majorité de votants. Ce profil, construit à l'aide de la programmation linéaire, est présenté dans le tableau 4. Les – y désignent des abstentions. Le lecteur pourra vérifier que cette configuration de votes donne exactement les résultats du tableau 1.

TABLEAU 4

UN PROFIL DE VOTES POSSIBLE POUR LE TABLEAU 1

	Répartition des bulletins de vote																Total
	16	10	3	4	12	1	14	1	7	11	4	1	2	12	3	6	107
A	2	3	2	4	1	4	1	2	1	1	4	–	2	–	4	–	
B	1	2	–	3	3	3	4	4	2	4	4	3	–	1	1	1	
C	3	1	3	2	4	1	2	1	3	4	4	4	1	–	4	4	
D	4	4	1	1	2	2	3	3	4	4	1	1	2	–	4	–	

Pour trouver le gagnant de Condorcet du profil du tableau 4, il faut recueillir un avis sur six propositions : entre A et B, quel est le meilleur candidat et de façon similaire pour A et C, A et D, B et C, B et D, puis C et D. Selon Condorcet, il faut appliquer le principe de la majorité à chacune de ces propositions. On peut le faire à partir du tableau 5, celui des votes binaires, construit à partir du tableau 4, tout comme le tableau 3 a été construit à partir du tableau 2. Le tableau 5 indique que B est préféré à A par 53 votants contre 50 qui ont la préférence inverse. B est aussi préféré à C par 57 votants contre 35 et à D par 54 votants contre 42. Avec un tel profil de votes, B est donc le gagnant de Condorcet.

TABLEAU 5

VOTES BINAIRES DÉDUITS DU TABLEAU 4

	Votes binaires				
	A	B	C	D	Total
A	0	50	63	71	184
B	53	0	57	54	164
C	25	35	0	57	117
D	13	42	24	0	79

Il existe donc une probabilité non négligeable que, derrière les résultats du tableau 1, il y ait une majorité de votants qui préfèrent B aux trois autres candidats. Les résultats de ce tableau sont donc moins clairs qu'on a pu l'imaginer. Le problème de la recherche de profils de votes compatibles avec le tableau 1 étant combinatoire, il n'est pas facile de dire combien il existe de ces profils qui donnent B comme gagnant de Condorcet. On peut cependant conjecturer qu'il existe davantage de ces profils qui donnent A comme gagnant de Condorcet. Par contre, il n'en existe pas qui donne C ou D comme gagnant de Condorcet. À titre d'information, le candidat B est celui qui a été choisi par le comité de sélection dans le cadre de la nomination qui a eu lieu à l'Université Laval.

3. LES PROCÉDURES DE VOTE PONDÉRÉ

Avec une statistique comme le tableau 1, la procédure de Condorcet ne peut pas être utilisée. Tous les critères imaginables pour ordonner les candidats et choisir un gagnant se ramènent alors à la classe des *procédures de vote pondéré*. Dans le cas où il y a quatre candidats, elles sont définies par un vecteur de poids (p_1, p_2, p_3, p_4) qui servent à pondérer les votes reçus aux différents rangs. Ainsi, un candidat qui a été placé n_1 fois au premier rang, n_2 fois au deuxième rang, etc., obtient un score égal à $n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 + n_4p_4$, où n_1p_1 désigne le produit de p_1 par n_1. On ordonne ensuite les candidats selon ces sommes pondérées ou scores.

Ces poids ne sont pas nécessairement entiers mais ils ne sont jamais négatifs. De plus, ils doivent satisfaire $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4$ et $p_1 > p_4$. La règle de la pluralité est une procédure de vote pondérée, définie par le vecteur (1, 0, 0, 0).

On doit à Borda l'introduction des procédures de vote pondéré. Il les a présentées à l'Académie des sciences de France en 1770 et cette dernière a utilisé une telle procédure jusqu'à ce que Napoléon y soit élu et la fasse abandonner. De nos jours, on associe la procédure définie par le vecteur (3, 2, 1, 0) au nom de Borda. Cependant, cette association est rigoureusement correcte uniquement pour les scrutins où il n'y a pas de possibilité d'*ex aequo* et d'abstention.

Ex post, il est évidemment tentant de choisir un vecteur de poids en fonction des résultats que l'on a sous les yeux. Effectivement, dans certains scrutins, le choix d'un vecteur de poids plutôt qu'un autre peut influencer le classement de façon draconienne. Il y a exactement 24 façons différentes d'ordonner 4 candidats sans *ex aequo* et 75 si on admet des *ex aequo*. Saari (1992) a démontré que, selon la configuration des votes, on peut obtenir jusqu'à 18 de ces 24 ordres et 45 des 75 *préordres*, par le simple choix d'un vecteur de poids approprié.

Dans un autre contexte, celui du base-ball majeur, des journalistes sportifs participent chaque année à une enquête pour déterminer le *Most Valuable Player*. On demande à chacun de fournir une liste des dix meilleurs joueurs selon leur point de vue. On utilise ensuite la procédure de vote pondéré définie par (14, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) pour établir un classement final. Benoit (1992) a montré que des poids différents auraient souvent donné des classements différents. Entre autres, le gagnant aurait été différent 24 fois sur 86.

Dans le cas qui nous intéresse, la variation des poids ne va pas donner 45 ordres différents mais elle peut quand même changer l'ordre entre les candidats là où ça nous intéresse le plus, c.-à-d. en tête. Le tableau 6 donne quelques-unes des possibilités. Avec le vecteur de poids (3, 2, 1, 0), les candidats A et B obtiennent respectivement des scores de 186 et 163, si bien que A l'emporte sur B. Avec les vecteurs (2, 2, 1, 1) et (2, 1, 1, 1), c'est B qui l'emporte sur A.

TABLEAU 6

TROIS VOTES PONDÉRÉS POUR LE SCRUTIN DE L'UNIVERSITÉ LAVAL

	Répartition des rangs					Somme pondérée		
Candidat	1er rang	2e rang	3e rang	4e rang	Abs.	(3,2,1,0)	(2,2,1,1)	(2,1,1,1)
A	44	22	10	12	19	186	132	154
B	37	17	18	30	5	163	139	156
C	14	18	26	37	12	104	109	127
D	12	15	15	47	18	81	101	116

Si on se restreint à des vecteurs de poids avec $p_4 = 0$, les quatre candidats seront toujours classés dans l'ordre ABCD. Lorsque les abstentions ne sont pas permises, on normalise souvent les vecteurs de poids admissibles en posant $p_4 = 0$. Cela n'entraîne aucune perte de généralité. Avec des abstentions, il en va différemment. Poser $p_4 = 0$ revient à traiter les 4e rangs comme des abstentions. Certains pourraient prétendre qu'il y a une différence fondamentale entre les deux : les candidats que les votants n'ont pas classés étaient probablement inacceptables à leurs yeux alors que ceux qui ont obtenu un 4e rang étaient au moins acceptables pour le poste. Ils pourraient donc s'objecter au fait d'accorder un poids nul pour un 4e rang et même trouver des arguments sensés en faveur des vecteurs (2, 1, 1, 1) ou (2, 2, 1, 1). Si on se refuse à accorder un poids nul pour un 4e rang, il faudrait utiliser le vecteur (4, 3, 2, 1) comme on le faisait à l'époque de Borda, plutôt que (3, 2, 1, 0). En l'absence d'abstentions, les deux vecteurs sont équivalents. Avec des abstentions, il en va différemment.

Borda a présenté les procédures de vote pondéré comme une solution au défaut de la règle de la pluralité, à savoir la possibilité qu'elle ne sélectionne pas le candidat favori de la majorité dans une confrontation par paire. Condorcet s'est objecté, avec passion même, aux procédures de vote pondéré. Il a souligné leurs défauts à l'aide de plusieurs exemples. Considérons celui qui est reproduit dans les tableaux 7 à 9. Dans cet exemple, la règle de la pluralité amènerait à choisir correctement le gagnant de Condorcet, Pierre, alors que la procédure de Borda sélectionnerait Paul comme gagnant. De façon plus générale, Fishburn (1973) montre qu'il existe des profils de votes pour lesquels aucune règle de vote pondéré ne sélectionne le gagnant de Condorcet.

TABLEAU 7

UN AUTRE PROFIL DE VOTES DÛ À CONDORCET

	Répartition des bulletins		Total
	19	11	30
Pierre	1	3	
Paul	2	1	
Jacques	3	2	

TABLEAU 8

VOTES BINAIRES DÉDUITS DU TABLEAU 7

	Votes binaires			
	Pierre	Paul	Jacques	Total
Pierre	0	19	19	38
Paul	11	0	30	41
Jacques	11	0	0	11

TABLEAU 9

COMPARAISON DE TROIS RÈGLES SUR LE PROFIL DU TABLEAU 7

	Ordre final		
	Pluralité	Borda	Condorcet
Pierre	1	2	1
Paul	2	1	2
Jacques	3	3	3

Condorcet (1788) explique en ces termes pourquoi la procédure de Borda peut donner le mauvais résultat :

« Or l'on a confondu, dans cette méthode d'évaluer les suffrages, les voix qui donnaient la préférence à Pierre sur Paul, ou réciproquement avec celles qui donnaient la préférence à l'un ou l'autre sur Jacques; on les a fait entrer de même dans le jugement qu'on voulait porter entre Pierre et Paul, et il a dû en résulter une erreur, puisque l'on faisait entrer dans ce jugement un élément qui ne devait pas y entrer, c'est-à-dire, la préférence donnée sur Jacques à Pierre ou à Paul. Telle est la véritable raison qui rend cette méthode défectueuse dans un grand nombre de combinaisons de voix, quelque hypothèse que l'on adopte sur les valeurs attachées à l'ordre des places. La méthode ordinaire [de la pluralité] trompe, parce qu'on y fait abstraction de jugements qui devraient être comptés; la nouvelle méthode [de Borda] trompe, parce qu'on a égard à des jugements qui ne devraient pas être comptés. »

Dans le langage de la théorie moderne des choix sociaux, toute procédure de vote pondéré viole, à un moment ou un autre, la condition d'*indépendance par* *rapport aux candidats non pertinents*. C'est une condition qui a été formalisée par Arrow (1963) et qui dit que, pour ordonner deux candidats, seule la façon dont ils le sont par les votants devrait être prise en compte.

Dans l'exemple de Condorcet, le classement de Pierre par rapport à Paul est influencé par la présence de Jacques dans la liste des candidats, violant ainsi la condition d'indépendance de Arrow. Si Jacques se retirait, la procédure de Borda sélectionnerait Paul, comme le veut la majorité. Dans l'exemple du tableau 2, le fait que A soit placé avant B selon la règle de la pluralité est tributaire de la présence de C sur la liste des candidats. De la même façon, le fait que A soit placé avant C est dû à la présence de B et le fait que B soit placé avant C est dû à la présence de A. Si un des trois candidats se retirait, les deux autres seraient ordonnés selon le principe de Condorcet.

4. LES CONSÉQUENCES DES ABSTENTIONS ET DES *EX AEQUO*

Parmi les procédures de vote pondéré, on distingue les procédures simples des procédures multiples. Les *procédures simples* sont celles où les votants ordonnent les candidats sans possibilité d'*ex aequo* et d'abstention et où on applique un vecteur de poids unique à tous les candidats. Les *procédures multiples* sont celles où on laisse aux votants le choix entre plusieurs vecteurs de poids.

Parmi ces dernières, on compte la *procédure d'approbation*. Elle consiste à demander aux votants de cocher les noms des candidats qu'ils trouvent acceptables. Le gagnant est celui qui obtient le plus de nominations. On exclut généralement le cas où un votant cocherait le nom de tous les candidats parce que cela reviendrait à ne pas voter. En pratique, lorsqu'il y a quatre candidats, on offre donc à chaque votant le choix entre les vecteurs (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0) et (1, 1, 1, 0) pour pondérer les rangs que se méritent les candidats à ses yeux. Ce type de procédure a été introduit par Brams et Fishburn (1978) en réponse aux défauts de la règle de la pluralité. Elle est utilisée par un certain nombre de sociétés scientifiques pour élire leurs officiers. Weber, qui n'a pas été étranger à son introduction, en fait la promotion dans Weber (1995).

Il faut être conscient que, en permettant les abstentions et les *ex aequo*, on laisse en quelque sorte une grande partie du contrôle de la procédure d'agrégation des votes aux votants. En effet, peu importe le choix du vecteur de poids (p_1, p_2, p_3, p_4), on permet à chaque votant de choisir, pour chaque candidat, le poids qu'il veut dans l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3, p_4, 0\}$. Par exemple, un votant peut faire en sorte que deux candidats obtiennent le poids p_1, en accordant aux deux le premier rang, et les deux autres le poids p_4, en les plaçant tous les deux au 4e rang ou encore un poids nul en s'abstenant de leur accorder un rang. On est donc automatiquement dans le cas d'une procédure multiple.

Même si on optait pour la procédure de Borda, on serait dans l'impossibilité de l'appliquer réellement. Si tous les votants n'accordaient que des premiers rangs et des abstentions, ce serait la règle d'approbation qui serait utilisée dans les faits. Dans le scrutin tenu à l'Université Laval, comme les votants ont marqué leur bulletin de vote de toutes sortes de façons, il serait difficile d'étiqueter le vecteur de poids que l'on pourrait décider d'utiliser *ex post* sur les résultats de ce scrutin. Pour cette raison, il est plus prudent d'utiliser les guillemets pour désigner les « scores de Borda » à propos des sommes pondérées avec le vecteur (3, 2, 1, 0) du tableau 6.

S'il n'y a pas d'abstentions et d'*ex aequo*, les scores de Borda, c.-à-d. les sommes pondérées avec (3, 2, 1, 0), sont également donnés par les sommes des votes de chaque rangée du tableau des votes binaires. En effet, le poids accordé à un candidat par un votant est égal au nombre de candidats à qui il accorde un rang inférieur. Dans une rangée donnée, un votant contribue à chacun des nombres correspondant aux votants à qui il a accordé un rang inférieur. En sommant tous les nombres d'une rangée, on obtient donc le score de Borda du candidat correspondant. La colonne « Total » des tableaux 3, 8 et 12 contient donc les scores de Borda pour les profils de votes correspondants.

Les sommes des votes du tableau 5 diffèrent des sommes du tableau 6 pondérées avec (3, 2, 1, 0) en raison des abstentions et des *ex aequo*. Les totaux du tableau 5 correspondent à des sommes pondérées avec (3, 2, 1, 0), mais où un bulletin comme (–, 3, 4, 1) se trouve remplacé par (4, 2, 3, 1) et le bulletin (–, 1, 4, –) par (3, 1, 2, 3). Les scores ainsi obtenus sont donc sans doute plus près de l'esprit de la règle de Borda que ceux calculés au tableau 6.

5. LES POSSIBILITÉS DE MANIPULATION

Une difficulté supplémentaire dans le choix d'une procédure d'agrégation des votes est la possibilité de manipulation. Cette dernière provient de l'intérêt qu'il peut y avoir à ne pas voter sincèrement et même à ne pas voter du tout, afin que le choix final soit davantage conforme à ses préférences. Par exemple, supposons que, si je votais sincèrement, j'accorderais le 1er rang à B et le 2^{e} rang à A. Si je pense que le nombre de votes obtenus pour la deuxième place est susceptible d'influencer le choix d'un gagnant, j'aurais intérêt à accorder un rang inférieur à 2 au candidat A, de manière à augmenter les chances que B soit le gagnant. Cela serait d'autant plus facile si on me permettait beaucoup de latitude dans la façon de répartir les rangs.

Non seulement toute procédure est-elle imparfaite dans la façon de réconcilier les vues contradictoires, mais toute procédure non dictatoriale se prête à la manipulation. C'est là un résultat très général qui a été démontré par Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975) dans le cas des procédures qui sélectionnent un gagnant ou un ensemble de gagnants. Ce résultat a été généralisé par Bossert et Storcken (1992) dans le cas des procédures qui ordonnent tous les candidats.

Il y a plusieurs aspects à la manipulation. Certaines procédures sont plus faciles à manipuler que d'autres parce que leur manipulation exige moins de sophistication. Dans certains cas, la manipulation par de petits groupes de votants peut être possible; dans d'autres, elle peut exiger de grandes coalitions. Certaines procédures sont plus susceptibles d'être manipulées que d'autres parce qu'il existe davantage de profils pour lesquels la manipulation peut amener des changements dans le sens souhaité. Finalement, l'impact de la manipulation peut être plus ou moins grand.

On doit à Saari (1990) une étude exhaustive de la susceptibilité à la manipulation des procédures de vote pondéré. Le tableau 10 résume ses résultats. La deuxième rangée de ce tableau indique la procédure qui est la moins susceptible d'être manipulée par de petites coalitions de votants (moins de 5 % des votants) avec 3, 4 et 5 candidats. Les deux dernières rangées donnent les facteurs par lesquels le nombre de profils susceptibles de donner lieu à de la manipulation est multiplié selon qu'on utilise la règle de Borda ou celle de la pluralité, plutôt que la règle idéale. La règle de l'anti-pluralité, définie par le vecteur (1, 1, 1, 0), donne les même résultats que celle de la pluralité. Elle équivaut à demander à chaque votant de cocher le nom du candidat qu'il souhaite le moins voir au poste à pourvoir et à désigner celui qui aura été nommé le moins souvent.

TABLEAU 10

LES RÉSULTATS DE SAARI

Nombre de candidats	3	4	5
Règle idéale	(2, 1, 0)	(1, 1, 0, 0)	(2, 2, 1, 0, 0)
	Facteurs d'augmentation du nombre de profils manipulables		
Borda	1	2	14
pluralité et anti-pluralité	1,027	4,6	2 254

Avec trois candidats, la procédure de Borda est, parmi toutes les procédures de vote pondéré, celle qui est le moins susceptible d'être manipulée par de petites coalitions de votants. Les règles de la pluralité et l'anti-pluralité font pratiquement aussi bien. Avec quatre candidats, c'est la procédure définie par (1, 1, 0, 0) qui réalise cet objectif. On peut l'utiliser en demandant aux votants de cocher les noms de leurs deux candidats préférés et en choisissant celui qui obtient le plus de nominations. En comparaison, la performance de la procédure de Borda est assez bonne. En effet, avec cette procédure, le nombre de profils susceptibles de donner lieu à de la manipulation est multiplié par deux par rapport à ce que donne (1, 1, 0, 0). Ce nombre est multiplié par 4,6 avec les règles de la pluralité et de l'anti-pluralité.

Avec cinq candidats, c'est la procédure définie par (2, 2, 1, 0, 0) qui donne les meilleurs résultats. Avec la procédure de Borda, le nombre de profils susceptibles de donner lieu à de la manipulation est multiplié par moins de 14 par rapport à cette meilleure procédure alors qu'il est multiplié par 2 254 avec les règles de la pluralité et de l'anti-pluralité. Avec quatre candidats ou plus, ces dernières sont toujours les pires de ce point de vue et cette piètre performance empire à mesure que le nombre de candidats augmente. La règle d'approbation ne fait pas mieux parce qu'elle offre la possibilité d'utiliser ces dernières.

Avec la possibilité d'abstention et d'*ex aequo*, les votants peuvent forcer l'utilisation de l'une ou l'autre de ces deux règles, peu importe le choix du vecteur de poids que pourrait faire le président d'une élection. Par exemple, si tous accordaient le premier rang à un seul candidat et s'abstenaient d'accorder un rang aux trois autres candidats, ils forceraient dans les faits l'utilisation de la règle de la pluralité. Dans l'optique d'une procédure de vote pondéré, le scrutin tenu à l'Université Laval offrait donc les pires conditions du point de vue de la sincérité du vote.

La bonne performance de la procédure de Borda, pour ce qui est des possibilités de manipulation par de petites coalitions de votants, serait due à la différence constante entre les poids successifs. Par contre, cette même propriété rend cette procédure vulnérable à la concertation par de grandes coalitions. Ainsi, supposons que le profil de votes du tableau 4 soit sincère et qu'on annonce que la procédure de Borda sera utilisée sur ces résultats. Les 16 et 10 votants dont les bulletins de votes apparaissent dans les deux premières colonnes pourraient bien se rendre compte, *ex post*, qu'ils ont un peu perdu leur vote, les premiers en accordant le 2e rang à A et les deuxièmes le premier rang à C. Si les premiers avaient interverti les rangs accordés à A et C et les deuxièmes les rangs accordés à B et C, les « scores de Borda » auraient été respectivement 170, 173, 110 et 104. Le gagnant de Borda aurait donc été changé pour B, ce qui irait dans le sens souhaité par ces 26 votants.

Ces votants auraient très bien pu adopter ce comportement stratégique s'ils avaient été assez sophistiqués pour anticiper les résultats du tableau 1 et l'utilisation de la règle de Borda. On comprendra que les sondages sont de nature à encourager la manipulation dans la mesure où ils permettent justement de mieux anticiper les résultats d'un scrutin. Est-il besoin de souligner que la tenue d'un deuxième scrutin à l'Université Laval aurait ouvert davantage la porte à ces possibilités de manipulation stratégique? Ceux qui ont réclamé ce deuxième scrutin l'avaient peut-être compris.

Le mathématicien Laplace (1812) avait très bien souligné les problèmes de manipulation inhérents à la procédure de Borda :

> « Ce mode d'élection serait sans doute le meilleur, si des considérations étrangères au mérite n'influaient point souvent sur le choix des électeurs, même les plus honnêtes, et ne les déterminaient point à placer aux derniers rangs les candidats les plus redoutables à celui qu'ils préfèrent, ce qui donne un grand avantage aux candidats d'un mérite médiocre. Aussi l'expérience l'a-t-elle fait abandonner aux établissements qui l'avaient adopté. »

La réponse de Borda est bien connue : « Mon scrutin n'est fait que pour d'honnêtes gens ».

6. LE PRINCIPE DE LA MAJORITÉ ET LA PROCÉDURE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

En proposant la procédure des votes binaires décrite à la section 2, Condorcet cherchait à justifier le principe de la majorité. Sa recherche s'inscrit dans la justification du *Contrat social* de Rousseau (1762) :

> « L'opinion de la majorité est légitime parce qu'elle exprime la volonté générale. Quand une loi est proposée à l'assemblée du peuple, ce qu'on demande à ses membres n'est pas s'ils approuvent la proposition ou la rejettent mais si elle est conforme à la volonté générale. Les votes sont des opinions sur cette question. Si une opinion contraire à la mienne prévaut, cela prouve tout simplement que j'ai fait une erreur et que ce que je croyais être la volonté générale ne l'était pas. »

Condorcet a voulu donner un contenu plus rigoureux à cette proposition en utilisant le calcul des probabilités, qui était tout nouveau à l'époque. Il y a un meilleur candidat, un deuxième meilleur, etc. Les votants peuvent avoir des opinions différentes parce qu'ils sont des juges imparfaits. Cependant, s'ils ont plus souvent raison que tort, alors l'opinion de la majorité est susceptible d'identifier l'ordre « véritable » entre les candidats. L'objectif de Condorcet est d'estimer cet ordre à partir des votes exprimés, c.-à-d. de trouver l'ordre le plus probable ou l'ordre qui maximise la vraisemblance du profil des votes exprimés.

Condorcet a montré que, s'il existe un ordre de Condorcet, il s'agit effectivement de l'ordre le plus probable entre les candidats sous des hypothèses sur lesquelles nous allons revenir. Malheureusement, il peut arriver qu'il n'existe pas d'ordre ni même de gagnant de Condorcet parce que l'agrégation des votes binaires donne des cycles. Ainsi, le profil de votes du tableau 11 donne le cycle ADBCA : A est préféré à D par une majorité, D est préféré à B par une autre majorité et B est préféré à C mais C est préféré à A. On le vérifie facilement à partir des votes binaires du tableau 12 que donne ce profil. Il n'y a donc pas d'ordre ni même de gagnant de Condorcet.

TABLEAU 11

UN PROFIL DE VOTES DONNANT UN CYCLE

	Répartition des bulletins					Total
	3	3	5	4	2	17
A	1	1	4	3	2	
B	4	3	2	1	3	
C	3	4	3	2	4	
D	2	2	1	4	1	

TABLEAU 12

VOTES BINAIRES DÉDUITS DU TABLEAU 11

	Votes binaires				
	A	B	C	D	Total
A	0	8	8	10	26
B	9	0	14	4	27
C	9	3	0	4	16
D	7	13	13	0	33

Quelle est la probabilité de se retrouver avec un cycle? On trouve dans Fishburn (1973) des chiffres à ce sujet. S'il y a quatre candidats et qu'on élimine les *ex aequo* et les abstentions, il y 24 façons d'ordonner ces candidats. Plaçons 24 bulletins de vote, marqués de ces 24 façons, dans une boîte et tirons autant de bulletins de vote que l'on veut de votants, en remettant les bulletins dans la boîte après chaque tirage. La probabilité qu'un profil de votes donne un cycle tend rapidement vers 0,176 à mesure que le nombre de votants ou tirages augmente. Cette probabilité augmente elle-même avec le nombre de candidats. Ainsi, elle est de 0,088 avec trois candidats et de 0,251 avec cinq. Dans la pratique, il peut exister une corrélation plus ou moins forte entre les différents bulletins de vote d'un profil, ce qui peut atténuer la possibilité de cycle. C'est pourquoi certains chercheurs pensent qu'il s'agit davantage d'une possibilité théorique que réelle. N'empêche que Truchon (1998b) a trouvé 15 cycles dans les données de 24 compétitions olympiques de patinage artistique.

Cette possibilité de cycle n'est pas étrangère au fait que l'approche de Condorcet respecte la condition d'indépendance de Arrow. Dans un théorème célèbre, ce dernier (Arrow 1963) a démontré qu'il n'existe pas de procédure d'agrégation des préférences individuelles en préférence collective *transitive* qui satisfasse cette condition d'indépendance et celle de Pareto, c.-à-d. le respect du vœu de l'unanimité, sauf si on demande à un individu, un dictateur, de dicter ce que doit être la préférence collective ou si on restreint les préférences admissibles. Il y a une relation très étroite entre ce théorème et celui de Gibbard et Satterthwaite sur la manipulation. Rappelons qu'une préférence stricte, en tant que relation binaire, est transitive si « A préféré à B » et « B préféré à C » impliquent « A préféré à C ». Cette transitivité implique l'absence de cycle.

Une avenue possible pour éliminer toute possibilité de cycle, sans toutefois garantir la transitivité, est d'augmenter la majorité requise pour déclarer un candidat gagnant par rapport à un autre. Comme le démontre Truchon (1995), avec quatre candidats, il faut une majorité de 3/4 plus une voix pour éliminer toute possibilité de cycle. La majorité requise augmente avec le nombre de candidats. La conséquence de cette majorité élevée est que, dans les faits, on se trouve à accorder un pouvoir de veto à des votants ou sous-groupes de votants. Cette question est approfondie par Le Breton et Truchon (1995). Ce pouvoir de veto peut mener à une indécision chronique. Toutefois, Balasko et Crès (1997) montrent qu'on peut réduire considérablement la probabilité de cycle en augmentant la majorité requise au-dessus de 53 %.

Si on reste avec la majorité simple, il faut chercher à briser ces cycles d'une autre façon. Condorcet lui-même avait donné des indications sur la marche à suivre dans ces circonstances. Malheureusement, ses indications ne fonctionnent pas lorsqu'il y a plus de trois candidats. Young (1988) propose une extension naturelle de l'approche du maximum de vraisemblance de Condorcet. Nous allons l'exposer brièvement dans les prochains paragraphes.

Soit p la probabilité que chaque votant ordonne correctement chaque candidat par rapport à un autre. Supposons que ces probabilités soient indépendantes entre les paires de candidats et entre les votants. Désignons par $\nu_{st}(R)$ le nombre de votants qui ont placé le candidat s avant le candidat t ou au même rang dans un profil de votes R. Si l'ordre véritable entre les trois candidats de l'ensemble $\{a, b, c\}$ est abc, on peut montrer que la probabilité d'observer le profil R est donnée, à une constante multiplicative près et en négligeant l'argument R dans $\nu_{st}(R)$, par :

$$p^{\nu_{ab}}(1-p)^{\nu_{ba}}p^{\nu_{ac}}(1-p)^{\nu_{ca}}p^{\nu_{bc}}(1-p)^{\nu_{cb}} = p^{\nu_{ab}+\nu_{ac}+\nu_{bc}}(1-p)^{\nu_{ba}+\nu_{ca}+\nu_{cb}}.$$

La probabilité d'observer le même profil R, conditionnelle à ce que l'ordre véritable soit acb, est donnée par :

$$p^{\nu_{ac}}(1-p)^{\nu_{ca}}p^{\nu_{ab}}(1-p)^{\nu_{ba}}p^{\nu_{cb}}(1-p)^{\nu_{bc}} = p^{\nu_{ac}+\nu_{ab}+\nu_{cb}}(1-p)^{\nu_{ca}+\nu_{ba}+\nu_{bc}}.$$

Alors, si $p > 1/2$, abc est plus probable que acb comme ordre si et seulement si $\nu_{ab} + \nu_{ac} + \nu_{bc} > \nu_{ac} + \nu_{ab} + \nu_{cb}$.

De façon plus générale, étant donné un ordre r, on peut représenter la probabilité d'observer un profil de votes R par la quantité :

$$K(r,\ R) = \sum_{s\in X}\ \sum_{\substack{t\in X\\ r_s<r_t}} \nu_{st}(R)$$

où r_s est le rang accordé au candidat s dans l'ordre r et X est l'ensemble des candidats. Le calcul de ces quantités peut être envisagé de la manière suivante. Pour un ordre donné r, il s'agit de permuter les lignes et les colonnes du tableau des votes binaires pour que leur ordre soit le même que celui des candidats dans r et de sommer les termes au-dessus de la diagonale.

$K(r, R)$ est aussi le nombre d'accords entre l'ordre r et les ordres du profil de votes R. Le nombre d'accords entre deux ordres est le nombre de paires de candidats qui sont ordonnés de la même façon dans les deux ordres. Par exemple, on a deux accords entre les ordres abc et acb puisque les couples $\{a, b\}$ et $\{a, c\}$ sont tous les deux ordonnés de la même façon dans les deux ordres.

Vu différemment, l'ordre qui maximise $K(r, R)$ est celui qui possède le plus petit nombre de désaccords avec le profil de votes R. Kemeny (1959) a proposé le nombre de désaccords ou inversions comme distance entre ordres. Aussi on appelle souvent *ordre de Kemeny* un ordre qui maximise $K(r, R)$. Pour la même raison, nous allons appeler cette dernière quantité *score de Kemeny.*

Un ordre de Kemeny constitue également un ordre médian par rapport à la distance de Kemeny, c.-à-d. un ordre dont la distance par rapport au profil de votes est la plus petite possible. Dans bien des situations, il s'agit, non pas de recueillir l'avis d'experts sur un certain nombre de propositions, mais plutôt de concilier des vues diamétralement opposées des votants. Un ordre de Kemeny peut alors être vu comme un meilleur compromis possible entre ces vues divergentes. Lorsque que l'ordre de Condorcet existe, il s'agit de l'ordre unique de Kemeny.

Le nombre d'accords entre l'ordre ABCD et le profil de votes du tableau 11 est donné par la somme des nombres au-dessus de la diagonale du tableau 12, c.-à-d. 48. En effet, il y a 8 votants qui ont placé A avant B, 8 également qui ont placé A avant C, 10 qui ont placé A avant D, 14 qui ont placé B avant C, 4 qui ont placé B avant D et 4 autres qui ont placé C avant D, pour un total de 48. En principe, il faudrait calculer le score de Kemeny pour les 24 (4!) ordres possibles sur les quatre candidats. En pratique, il n'est pas nécessaire d'effectuer tous ces calculs. On peut en effet éliminer d'emblée tous les ordres dans lesquels un candidat s précède immédiatement un autre candidat t alors que $v_{st}(R) < v_{ts}(R)$. Dans ce cas, une majorité de votants serait d'accord pour qu'on face passer t avant s, ce qui augmenterait le score de Kemeny. Dans le cas qui nous intéresse, il ne reste que 5 ordres une fois que l'on applique ce critère. Ils sont énumérés dans le tableau 13 avec leur score.

TABLEAU 13

LES SCORES DE KEMENY POUR LES ORDRES ADMISSIBLES

Ordre	Score de Kemeny
A D B C	66
D B C A	65
B A D C	58
B C A D	50
C A D B	47

C'est ADBC qui constitue l'ordre unique de Kemeny, c.-à-d. l'ordre le plus vraisemblable ou l'ordre médian selon l'interprétation que l'on veut bien donner au processus. En comparaison, l'ordre, également unique, de Borda est DBAC. Il place A avant C alors qu'une majorité de votants préfèrent C à A. L'ordre selon la règle de la pluralité est DABC alors que 10 votants sur 17 préfèrent A à D et que 9 votants préfèrent B à A. Le tableau 14 compare les ordres obtenus selon qu'on utilise la règle de la pluralité, celle de Borda ou celle de Kemeny. Les différences sont assez frappantes.

TABLEAU 14

COMPARAISON DE TROIS RÈGLES SUR LE PROFIL DU TABLEAU 11

	Ordre final		
	Pluralité	Borda	Kemeny
A	2	3	1
B	3	2	3
C	4	4	4
D	1	1	2

Plusieurs autres procédures ont été proposées pour briser les cycles, tout en donnant le gagnant de Condorcet lorsqu'il existe. On dit que ces procédures sont de type Condorcet. Levin et Nalebuff (1995) présentent un survol de plusieurs d'entre elles. Le Breton et Truchon (1997) proposent une distance entre certaines de ces procédures et celle de Borda qu'ils appellent la mesure de Borda. La procédure de Kemeny est celle dont la mesure de Borda se rapproche le plus de celle de Condorcet.

Un ordre de Kemeny n'est pas nécessairement unique. Truchon (1998a et b) propose le choix d'un pré-ordre de Kemeny qu'il qualifie de « moyen » lorsque ce dernier existe. Autrement ou de façon alternative, on peut utiliser un critère supplémentaire, emprunté à d'autres procédures de type Condorcet, pour départager les ordres de Kemeny.

Parmi ces procédures, il y a celle de Copeland (1951) qui consiste à choisir, comme gagnants, les candidats qui défont le maximum d'autres candidats à la majorité simple. Dans le tableau 12, cette procédure sélectionnerait les candidats B et D qui défont les deux autres candidats. Simpson (1969) a proposé une autre procédure, qui a été axiomatisée par Kramer (1977) dans un contexte plus large. Elle consiste à choisir, comme gagnants, les candidats dont le plus petit nombre de votes obtenus dans la comparaison avec chacun des autres candidats est supérieur aux plus petits nombres obtenus par les autres candidats. Dans le tableau 12, cette procédure sélectionnerait A puisque le plus petit nombre dans la rangée correspondant à A est 8 alors qu'il est respectivement 4, 3, et 7 pour les trois autres candidats.

Ces deux procédures sélectionnent le gagnant de Condorcet et uniquement ce dernier lorsqu'il existe. Elles donnent également l'ordre de Condorcet, lorsqu'il existe, si on les applique de façon séquentielle. L'application séquentielle signifie qu'on élimine les gagnants de la liste avant de procéder au choix de ceux qui seront placés au deuxième rang selon la même procédure et ainsi de suite jusqu'à épuisement de la liste. Arrow et Raynaud (1986) discutent de l'application séquentielle des procédures. Ils qualifient de *prudent* un ordre obtenu par l'application séquentielle de la procédure de Kramer-Simpson. Ils attribuent cette approche à Köhler (1978). L'application séquentielle de la procédure de Kramer-Simpson au tableau 12 donnerait le même ordre que celle de Kemeny.

7. PROPRIÉTÉS DE LA PROCÉDURE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Moulin (1988) montre que les procédures de type Condorcet n'encouragent pas nécessairement la *participation* à un scrutin lorsqu'il y a au moins quatre candidats. Nous pouvons vérifier que la procédure de Kemeny n'échappe pas à cette faiblesse. Dans l'exemple du tableau 11, qui s'inspire d'ailleurs de celui de Moulin, les deux votants de la dernière colonne feraient mieux de ne pas se présenter au scrutin. L'ordre de Kemeny qui résulterait de leur absence serait DBCA. Le lecteur peut en effet vérifier que cet ordre obtiendrait un score de 57 et que le score de l'ordre de Kemeny original deviendrait 56. Le gagnant selon l'ordre DBCA serait leur candidat préféré. De leur côté, les règles de vote pondéré encouragent la participation. Ainsi, les deux votants en question feraient mieux de participer au scrutin si on utilisait la règle de la pluralité ou celle de Borda.

Bien que la procédure de vote binaire respecte la condition d'indépendance de Arrow, la procédure de Kemeny la viole. Selon le théorème d'impossibilité de Arrow, il fallait s'y attendre puisque cette procédure ordonne les candidats de façon cohérente. Ainsi, dans l'exemple du tableau 11, si le candidat D se désistait, l'ordre de Kemeny sur les candidats restants serait modifié pour BCA et ce dernier serait un ordre de Condorcet. C'est un changement draconien.

Par contre, Young et Levenglick (1978) montrent que la procédure de Kemeny est la seule à satisfaire une condition d'indépendance plus faible en même temps que d'autres conditions souhaitables. Young (1995) définit ainsi cette condition qu'il appelle l'*indépendance locale par rapport aux candidats non pertinents* : le classement des candidats dans chaque intervalle devrait demeurer inchangé si on néglige les candidats en dehors de l'intervalle. Un intervalle est défini comme un sous-ensemble de candidats qui se succèdent dans un ordre donné.

Dans l'exemple du tableau 11, l'élimination de D entraîne le déplacement de A de la tête de l'ordre de Kemeny à la queue mais cela ne viole pas la condition d'indépendance locale puisque D appartient à l'intervalle ADBC. Par contre, cette élimination ne change pas l'ordre entre les candidats B et C comme l'exige la condition d'indépendance locale puisque D est à l'extérieur de l'intervalle BC dans l'ordre ADBC.

Les autres propriétés que satisfait la procédure de Kemeny sont l'*anonymat* (tous les votants sont traités sur le même pied), la *neutralité* (tous les candidats sont traités sur le même pied), le respect du vœu de l'*unanimité*, qu'on appelle aussi le principe de Pareto et le *renforcement* ou *robustesse par rapport au découpage électoral* (si l'utilisation d'une même procédure par deux groupes différents de votants donne le même ordre final, l'utilisation de cette même procédure par un corps constitué des deux groupes doit conduire au même ordre). Il est à noter que les procédures de vote pondéré satisfont également ces dernières propriétés mais aucune ne satisfait la condition d'indépendance locale.

Comme la procédure de Kemeny donne un gagnant qui n'est pas imposé par un dictateur, elle n'échappe pas au théorème de Gibbard et Satterthwaite. Elle peut donc se prêter à la manipulation pour certains profils de préférences. Le fait qu'elle viole la condition d'indépendance de Arrow n'est pas étrangère à ce fait. Notons que l'abstention peut faire partie des stratégies de manipulation comme on l'a vu plus haut.

Par contre, comme la procédure de Kemeny satisfait la condition d'indépendance locale de Young, les possibilités de la manipuler s'en trouvent réduites. Ainsi, l'ordre entre les candidats sérieux dans un scrutin ne pourra pas être changé en introduisant des candidats farfelus et nettement inférieurs. Il ne pourra pas être changé non plus en convainquant un candidat nettement supérieur, qui se désisterait après le scrutin, de se présenter.

De plus, compte tenu de l'aspect combinatoire de cette procédure, sa manipulation va exiger un degré de sophistication élevé de la part de ceux qui voudront s'engager sur cette voie. Et encore devront-ils s'assurer de l'utilisation de cette procédure avant d'arriver à pouvoir la manipuler. En effet, la procédure binaire de Condorcet elle-même n'est pas manipulable. Si on ne peut empêcher la procédure de vote binaire de produire un gagnant voire un ordre de Condorcet, la meilleure façon de s'assurer que le résultat ira dans le sens souhaité est de voter sincèrement. Cela ne va pas à l'encontre des théorèmes de Gibbard-Satterthwaite et de Bossert-Storcken parce que cette procédure ne donne pas de résultats cohérents.

Donc, à moins que le vote sincère ne donne déjà un cycle, un groupe de manipulateurs devra trouver une stratégie qui produira d'abord un cycle, de manière à forcer l'utilisation de la procédure de Kemeny. Cette stratégie devra également être choisie de manière à donner un ordre qu'ils préfèrent à celui qui aurait été obtenu sans leur comportement stratégique. En supposant que de telles stratégies puissent exister, les trouver n'est certainement pas une mince affaire. Qui plus est, une tentative de manipulation pourrait bien se retourner contre ses auteurs s'ils n'arrivaient pas à produire un cycle.

CONCLUSION

Il est heureux que, dans le cadre des scrutins tenus à l'Université Laval à l'occasion de certaines nominations, on demande aux votants d'ordonner les candidats, plutôt que de simplement leur demander de cocher le nom de leur candidat préféré comme avec la règle de la pluralité. Par contre, en ne publiant que la répartition des places obtenues par les candidats, comme dans le tableau 1, on se prive d'une partie importante voire la plus importante de l'information recueillie. Il faut aussi publier un tableau des votes binaires, c.-à-d. des confrontations deux à deux, comme le tableau 5, pour qu'on puisse dégager correctement la volonté des votants. On l'a fait dans un plus récent scrutin, un peu à ma suggestion.

Avec les résultats du tableau 1, on peut utiliser uniquement les procédures de vote pondéré, dont la règle de la pluralité et celle de Borda, pour ordonner les candidats. Si c'est la règle de la pluralité qu'on souhaite utiliser *ex post,* il est inutile de demander aux votants de se donner la peine d'ordonner tous les candidats. L'information supplémentaire ainsi obtenue ne sera pas utilisée.

Lorsqu'il n'y a que deux candidats, la règle de la pluralité mène au choix qui est préféré par la majorité des votants. Cependant, avec plus de deux candidats, elle peut très bien conduire à l'élection du pire candidat aux yeux d'une majorité de votants. Nous en avons eu une belle illustration au Canada, lors du dernier congrès à la chefferie du Nouveau Parti Démocratique. Nous avons vu aussi que, dans le cadre du scrutin tenu à l'Université Laval, il se pouvait fort bien que le candidat qui a obtenu le plus grand nombre de premiers rangs ne soit pas celui qui était préféré par la majorité. Se reposer sur cette règle devient alors un simulacre de la démocratie. La seule justification qu'on peut y trouver c'est sa simplicité. Dans une société évoluée, c'est une justification qui ne tient plus.

Borda (1784) a proposé les procédures de vote pondéré comme une solution aux défauts de la règle de la pluralité mais, dans certaines situations, elles peuvent aller carrément à l'encontre du vœu de la majorité. Effectivement, Saari (1985) démontre que, avec toutes les procédures de vote pondéré, sauf celle définie par le vecteur de poids (3, 2, 1, 0) aujourd'hui associée au nom de Borda, il existe au moins un profil de votes pour lequel le pire candidat, selon une majorité de votants, peut arriver au premier rang et le meilleur candidat au dernier rang. La règle de la pluralité n'échappe pas à ce paradoxe, comme nous l'avons vu avec un exemple de Condorcet reproduit au tableau 2. En empruntant un autre exemple à Condorcet (celui du tableau 7), nous avons vu que la règle de Borda elle-même, non seulement pouvait aller à l'encontre du vœu de la majorité, mais qu'elle pouvait faire pire que la règle de la pluralité.

Dans les scrutins tenus à l'Université Laval, on permet aux votants d'accorder un même rang à plus d'un candidat et de s'abstenir d'accorder un rang à certains d'entre eux. Cela rend le contrôle d'une procédure de vote pondéré difficile puisqu'on laisse en quelque sorte le choix des poids aux votants. Cela augmente également les possibilités de manipulation du scrutin.

Compte tenu de l'importance que l'on accorde au principe de la majorité dans nos sociétés, la procédure la plus logique est sans doute celle du vote binaire défendue par Condorcet (1785). Elle consiste à ordonner les candidats, dans la mesure du possible, en se basant sur les résultats de la confrontation des candidats deux à deux. Si on demande aux votants d'ordonner tous les candidats, il est facile d'appliquer cette procédure en produisant un tableau de votes binaires.

Il y a cependant une probabilité, au moins théorique, que cette procédure donne des cycles. En pareille circonstance, la procédure du maximum de vraisemblance présentée par Young (1995) constitue une extension naturelle de l'approche de Condorcet. Elle donne un ou des ordres médians sur l'ensemble des candidats qu'on appelle souvent ordres de Kemeny. Sous certaines hypothèses, les ordres de Kemeny sont les plus susceptibles d'être l'ordre véritable entre les candidats. On peut aussi les voir comme les meilleurs compromis possibles entre les vues divergentes des votants. S'il existe un ordre de Condorcet, il s'agit alors d'un ordre de Kemeny et c'est le seul. Si on trouve plus d'un ordre de Kemeny, il faut un critère pour les départager. Truchon (1998a et b) suggère de retenir un pré-ordre de Kemeny qu'il qualifie de « moyen » lorsque ce dernier existe. Autrement ou de façon alternative, on peut utiliser un autre critère, emprunté à d'autres procédures de type Condorcet, pour départager les ordres de Kemeny.

La procédure du maximum de vraisemblance ou de Kemeny n'est pas sans faiblesse comme nous avons pu le voir. Néanmoins, elle représente sans doute la meilleure façon de traduire les votes binaires en un ordre cohérent entre les candidats. Young (1995) s'en fait un ardent défenseur. Avec trois candidats, elle peut facilement être appliquée à la main. Avec quatre candidats ou plus, le recours aux moyens informatiques est préférable. Truchon (1998a) présente un algorithme pour la construction des ordres de Kemeny et Truchon (1998b) l'applique avec succès à des compétitions de patinage artistique où on retrouve jusqu'à 24 compétiteurs et des cycles impliquant jusqu'à 9 compétiteurs.

BIBLIOGRAPHIE

ARROW, K.J. (1963), *Social Choice and Individual Values*, second edition, John Wiley and Sons.

ARROW, K.J., et H. RAYNAUD (1986), *Social Choice and Multicriterion Decision-Making*, The MIT Press.

BALASKO, Y., et H. CRES (1997), « The Probability of Condorcet Cycles and Super Majority Rules », *Journal of Economic Theory*, 75 : 237-270.

BENOIT, J.P. (1992), « Scoring Reversals: A Major League Dilemma », *Social Choice and Welfare*, 9 : 89-97.

DE BORDA, J.C. (1784), « Mémoire sur les élections au scrutin », *Histoire de l'Académie royale des sciences*.

BOSSERT, W., et T. STORCKEN (1992), « Strategy-proofness of Social Welfare Functions: The Use of the Kemeny Distance Between Preference Orderings », *Social Choice and Welfare*, 9 : 345-360.

BRAMS, S.J., et P.C. FISHBURN (1978), « Approval Voting », *American Political Science Review*, 72 : 831-847.

CONDORCET, Marquis de (1788), « Essai sur la constitution et les fonctions des assemblées provinciales », Imprimerie royale, Paris. Reproduit dans CONDORCET, *Sur les élections et autres textes*, textes choisis et revus par O. DE BERNON, Fayard, 1986.

CONDORCET, Marquis de (1785), « Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix », Imprimerie royale, Paris. Reproduit dans CONDORCET, *Sur les élections et autres textes*, textes choisis et revus par O. DE BERNON, Fayard, 1986.

COPELAND, A.H. (1951), « A Reasonable Social Welfare Function », University of Michigan, mimeo.

FISHBURN, P.C. (1973), *The Theory of Social Choice*, Princeton University Press.

GIBBARD, A. (1973), « Manipulation of Voting Schemes: A General Result », *Econometrica*, 41 : 587-601.

KEMENY, J. (1959), « Mathematics without Numbers », *Daedalus*, 88 : 571-591.

KÖHLER, G. (1978), « Choix multicritère et analyse algébrique des données ordinales », thèse de 3e cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France.

KRAMER, G. (1977), « A Dynamical Model of Political Equilibrium », *Journal of Economic Theory*, 16 : 310-334.

LAPLACE, P.S. (1812), *Oeuvres*, Tome 7, Imprimerie Royale, Paris.

LE BRETON, M., et M. TRUCHON (1995), « Acyclicity and the Dispersion of the Veto Power », *Social Choice and Welfare*, 12 : 43-58.

LE BRETON, M., et M. TRUCHON (1997), « A Borda Measure for Social Choice Functions », *Mathematical Social Sciences*, 34 : 249-272.

LEVIN, J., et B. NALEBUFF (1995), « An Introduction to Vote-Counting Schemes », *Journal of Economic Perspectives*, 9 : 3-26.

MOULIN, H. (1988), « The Condorcet Principle Implies the No Show Paradox », *Journal of Economic Theory*, 45 : 53-64.

ROUSSEAU, J.-J. (1762), *Du contrat social*, Paris.

SAARI, D.G. (1992), « Millions of Election Outcomes from a Single Profile », *Social Choice and Welfare*, 9 : 277-306.

SAARI, D.G. (1990), « Susceptibility to Manipulation », *Public Choice*, 64 : 21-41.

SAARI, D.G.(1985), « The Optimal Ranking Method is the Borda Count », North Western University, Centre for Mathematical Economics, Discussion Paper #636.

SATTERTHWAITE, M.A. (1975), « Strategy-proofness and Arrow's Condition: Existence and Correspondence Theorem for Voting Procedures and Social Welfare Function », *Journal of Economic Theory*, 10 : 187-217.

SIMPSON, P. (1969), « On Defining Areas of Voter Choice: Professor Tullock on Stable Voting », *Quarterly Journal of Economics*, 83 : 478-490.

TRUCHON, M. (1995), « Voting Games and Acyclic Collective Choice Rules », *Mathematical Social Sciences*, 26 : 165-179.

TRUCHON, M. (1998a), « An Extension of the Condorcet Criterion and Kemeny Orders », Cahier de recherche 9813, Département d'économique, Université Laval.

TRUCHON, M.(1998b), « Figure Skating and the Theory of Social Choice », Cahier de recherche 9814, Département d'économique, Université Laval.

WEBER, R.J. (1995), « Approval Voting », *Journal of Economic Perspectives*, 9 : 39-49.

YOUNG, H.P. (1988), « Condorcet's Theory of Voting », *American Political Science Review*, 82 : 1 231-1 244.

YOUNG, H.P. (1995), « Optimal Voting Rules », *Journal of Economic Perspectives*, 9 : 51-64.

YOUNG, H.P., et A. LEVENGLICK (1978), « A Consistent Extension of Condorcet's Election Principle », *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 35 : 285-300.