Revue des sciences de l'éducation

La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre

Sylvine Schmidt

Volume 22, Number 2, 1996

Les apprentissages mathématiques en situation

URI: https://id.erudit.org/iderudit/031881ar
DOI: https://doi.org/10.7202/031881ar

See table of contents

Publisher(s)

Revue des sciences de l'éducation

ISSN

0318-479X (print)
1705-0065 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Schmidt, S. (1996). La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre. *Revue des sciences de l'éducation*, *22*(2), 277–294. https://doi.org/10.7202/031881ar

Article abstract

This article examines difficulties which many future teachers have in explaining the areas of arithmetic and algebra in the context of problem-solving. An analysis of interviews administered to student-teachers, who spontaneously create a dicotomy between these two areas, illustrates the different roles that arithmetic and algebra play in the problem-solving process. The results point out those concepts related to artihmetic and algebra with which future teachers should be familiar and which understandings should be developed by both teachers and students.

Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXII, n° 2, 1996, p. 277 à 294

La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre

Sylvine Schmidt
Professeure
Université de Sherbrooke

Résumé – Cet article traite des difficultés qu'éprouvent plusieurs futurs enseignants à articuler les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. L'analyse d'entrevues réalisées auprès d'apprentis-enseignants qui mettent spontanément en place une dialectique entre ces domaines de connaissances illustre les différents statuts et rôles que peuvent prendre tour à tour l'arithmétique et l'algèbre dans le processus de résolution de problèmes. Les résultats font ressortir le rapport aux savoirs arithmétique et algébrique qu'il serait souhaitable de retrouver chez les futurs enseignants et les aspects qu'il serait opportun de travailler non seulement avec eux mais aussi avec les élèves.

Introduction

Actuellement, au Québec, les programmes d'études de mathématiques, tant ceux de l'ordre primaire que de l'ordre secondaire, mettent l'accent sur la résolution de problèmes. Ce champ d'activités retrouve ainsi, dans les finalités didactiques tout au moins, l'importance qu'il avait perdue au fil du temps (Chevallard, 1989-1990). Cet intérêt se manifeste néanmoins sous un jour nouveau. Comme il est conseillé dans le guide pédagogique sur la résolution de problèmes, l'enseignement des mathématiques, dans un contexte véritable de résolution de problèmes, doit présenter à l'élève des situations dont la résolution demande mûres réflexions. L'élève s'engage alors dans cette activité «avec tout ce dont il dispose pour résoudre le problème, les connaissances et les habiletés qu'il possède déjà, son expérience en résolution de problèmes» (Ministère de l'Éducation du Québec, 1988, p. 37). Le processus de résolution de problèmes devient, à cet égard, une activité où le sujet mobilise tout le répertoire de stratégies et de procédures qu'il a pu développer antérieurement dans divers domaines mathématiques. Inévitablement, sous de telles prémisses didactiques qui favorisent le développement d'une gamme variée et étendue de stratégies de nature diverse, les enseignants seront amenés eux aussi, selon les problèmes posés, lorsqu'ils seront confrontés aux procédures des élèves appartenant à différents ordres mathématiques, à intégrer dans leur enseignement certains domaines de connaissances fondamentales en mathématiques (arithmétique, algèbre, géométrie, etc.).

Qu'en est-il actuellement chez les élèves, chez les enseignants ou chez les futurs maîtres? Sont-ils en mesure, les uns comme les autres, de recourir à la résolution des problèmes pour différents champs mathématiques? Ou, au contraire, assistons-nous chez ceux-ci à une sectorisation stricte des domaines mathématiques?

Certaines études ont porté sur cette question sous l'angle plus particulier de l'articulation entre arithmétique et algèbre, option que nous avons reprise à notre compte (Schmidt, 1994). Le présent article comprend deux parties. Pour commencer, nous faisons le point sur l'articulation qui existe ou non entre arithmétique et algèbre chez les élèves et chez les futurs enseignants. Les données relatives aux étudiants en formation des maîtres proviennent de notre recherche qui met en lumière les difficultés suscitées par le passage de l'arithmétique à l'algèbre et, inversement, celles engendrées par le retour à l'arithmétique lorsque la pensée algébrique est installée (pour des informations sur ce point, voir Schmidt et Bednarz, 1995, sous presse). La dialectique arithmétique/algèbre mise en place spontanément dans la résolution de problèmes par des étudiants maîtres, dans de très rares cas soulignons-le, sera l'objet de la deuxième partie. Cette analyse permettra de situer comment peut fonctionner une telle dialectique et ce qu'elle implique quant aux rôles éventuels que peuvent tenir l'arithmétique et l'algèbre dans la résolution de problèmes.

Articulation arithmétique et algèbre

La dissociation entre l'arithmétique et l'algèbre chez les élèves

Une étude de Lee et Wheeler (1989) a mis en évidence la dissociation qui existe à des degrés divers entre l'arithmétique et l'algèbre chez des élèves qui avaient reçu un enseignement de l'algèbre depuis deux ans et qui étaient engagés dans des activités de généralisation ou de preuve. Devant des équations algébriques, la plupart d'entre eux ne songent pas à recourir à des vérifications numériques pouvant les éclairer sur la véracité de ces formes symboliques. Inversement, ils ne voient pas la pertinence d'utiliser l'algèbre pour approcher certaines situations numériques. Pour eux, les nombres et les lettres se comportent différemment et ils s'attendent à une divergence entre les résultats provenant de ces deux approches. Cette recherche n'apporte cependant que des constats, aucune tentative d'explication de ce phénomène n'y était amorcée.

Chevallard (1989) fait état de phénomènes similaires chez des élèves de collège français (13-14 ans): le rapport à l'algèbre et à l'arithmétique entretenu par ces derniers renvoie à deux réalités disjointes: le calcul algébrique et le calcul numérique. À partir de l'analyse de manuels et des programmes d'études, cet auteur attribue la responsabilité de cette situation à l'enseignement même de l'algèbre. Or, bien qu'elle soit orientée plus spécifiquement vers les futurs enseignants, notre étude fournit d'autres sources explicatives de cette dissociation entre l'arithmétique et l'algèbre, sources qui tiennent à la pensée mathématique du sujet.

La résistance dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique chez des futurs enseignants

Nous avons analysé ce problème de l'articulation entre l'arithmétique et l'algèbre chez des futurs enseignants engagés dans des activités de résolution de problèmes. Le propos du présent article se dégage du cadre général de cette étude dont il convient de présenter plus à fond le but et la démarche méthodologique.

But de la recherche

L'objectif global de notre étude consiste à examiner, à travers les différents modes de résolution que les futurs enseignants utilisent pour résoudre des problèmes d'arithmétique et d'algèbre, c'est-à-dire des situations qui font partie d'un corpus de problèmes que l'on trouve traditionnellement en arithmétique ou en algèbre[1], les résistances et les difficultés que ces enseignants éprouvent dans le passage d'un mode de traitement à un autre, soit de l'arithmétique à l'algèbre ou de l'algèbre à l'arithmétique.

Méthodologie

Notre expérimentation a été faite auprès de trois groupes d'étudiants en formation des maîtres: au primaire (PRIM, 66 sujets); en adaptation scolaire – ces étudiants pourront œuvrer autant au primaire qu'au secondaire auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage (ADAP, 65 sujets); au secondaire, en mathématiques (SEC, 33 étudiants).

Pour débuter, nous avons présenté à l'ensemble des étudiants participant à cette investigation une épreuve écrite comprenant huit problèmes mathématiques[2]: quatre problèmes de tradition arithmétique et quatre problèmes de tradition algébrique (voir annexe 1). Ces situations ont été sélectionnées à partir de la grille d'analyse des problèmes développée par l'équipe de Bednarz et Janvier (sous presse). Cette grille, en plus de se prêter adéquatement à l'analyse des différents éléments qui contribuent à la complexité des problèmes présentés traditionnellement en algèbre en termes de calculs relationnels (Vergnaud, 1982), se révèle un excellent outil pour distinguer les problèmes présentés traditionnellement en arithmétique et en algèbre en illustrant, à l'aide d'un schéma (le cœur de la grille), l'ensemble des données, connues et inconnues, et les relations ainsi que leur organisation, impliquées dans un problème. Bednarz et Janvier décrivent ces deux types de problèmes en ces termes:

> En arithmétique, les problèmes généralement présentés à l'élève sont des problèmes que nous qualifions de «connectés»: une relation peut facilement être établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement possible de type arithmétique (s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir en fin de processus à la donnée inconnue). Au contraire, en algèbre, les problèmes généralement présentés à l'élève sont des problèmes que nous qualifions de «déconnectés»: aucun pont ne peut être établi *a priori* directement entre des données connues, etc. (Bednarz et Janvier, sous presse, p. 9).

De quelle manière les étudiants maîtrés vont-ils s'engager dans ces différents problèmes? Utiliseront-ils l'arithmétique pour les problèmes «connectés», l'algèbre pour les problèmes déconnectés? L'analyse des procédures utilisées par les futurs enseignants nous a permis de repérer des sujets qui avaient des profils de résolution très marqués d'un grand intérêt pour notre recherche: certains d'entre eux ont employé essentiellement l'arithmétique pour résoudre ces problèmes, même pour les problèmes «déconnectés»; d'autres ont utilisé majoritairement l'algèbre, même pour les problèmes «connectés»; et enfin, d'autres encore ont eu recours d'une façon mixte tantôt à l'arithmétique, tantôt à l'algèbre. Les critères adoptés pour identifier, analyser et catégoriser les procédures utilisées par les étudiants lors de la résolution des problèmes proviennent en partie des analyses didactiques de Bednarz et Janvier (sous presse) relatives aux raisonnements utilisés par les élèves, et en partie d'études historiques (Charbonneau et Lefebvre, 1992; Radford, 1992).

— La procédure arithmétique

Une procédure est jugée «arithmétique» lorsque, à l'analyse, il ressort que le sujet a entrepris une démarche de résolution de type synthétique où, constamment, il a pris appui sur des nombres connus pour effectuer les opérations successives qu'il croyait requises.

— La procédure algébrique

Une procédure est jugée «algébrique» lorsque le sujet, dans une approche de type analytique, a axé sa démarche de résolution sur un nombre inconnu, momentanément remplacé par une quelconque notation (une lettre ou un mot). Ce substitut est utile pour organiser globalement les relations fournies dans le problème, mais surtout pour effectuer les opérations nécessaires: le sujet, dans sa démarche, travaille directement sur l'inconnue.

Dans une seconde étape, des entrevues individuelles et dyadiques ont été menées auprès de huit individus appartenant à chacune de ces trois classes de «solutionneurs». Ces entrevues permettent de comprendre les raisons qui amènent plusieurs futurs enseignants à se cloisonner dans un seul univers mathématique dans la résolution de problèmes. Elles ont jeté un éclairage sur la nature des difficultés rencontrées par les sujets à tendance «arithmétique» et «algébrique» dans le passage d'un mode de raisonnements à un autre; ces difficultés sont liées au statut accordé au symbolisme, à la nature distinctive des raisonnements mis en branle dans les deux domaines, au type de contrôle exercé et au rapport entretenu avec l'arithmétique et l'algèbre. Elles nous éclairent également, et c'est ce qui nous intéresse plus particulièrement ici, sur le jeu entre l'arithmétique et l'algèbre que certains sujets, dits à tendance «mixte», peuvent conduire.

Les résultats du test écrit seront présentés en premier lieu; ils permettent d'établir la relation entre le profil de formation des futurs enseignants et la tendance qu'ils affichent dans la résolution de problèmes. Ce constat débouche sur des réflexions didactiques qui concernent l'habileté de plusieurs d'entre eux à susciter une saine articulation entre l'arithmétique et l'algèbre. Certaines entrevues, effectuées principalement auprès des sujets à tendance «mixte», font voir de quelle manière une dialectique arithmétique/algèbre peut servir efficacement à la résolution de problèmes complexes; elles seront l'objet du point suivant. Ces observations permettront d'extrapoler quel rapport aux savoirs arithmétique et algébrique il serait souhaitable de retrouver chez les futurs enseignants et quels aspects il serait opportun de travailler avec eux, de même qu'avec les élèves.

Résultats de l'épreuve écrite

Le tableau 1 qui suit rend compte de l'orientation arithmétique ou algébrique de chacun des groupes de sujets PRIM, ADAP et SEC aux problèmes «arithmétiques» et «algébriques» respectivement, et de la «performance» relative des procédures utilisées. Le groupe ADAP (futurs enseignants qui seront amenés à intervenir auprès d'élèves en difficulté, notamment en algèbre) se distingue nettement des deux autres groupes: ces étudiants maîtres ont une très forte tendance à résoudre les problèmes d'«algèbre» par l'arithmétique: 48,5 % des procédures retrouvées pour ce groupe sont arithmétiques. L'analyse des procédures arithmétiques qu'ils emploient (Schmidt, 1994) montre qu'elles sont principalement de type «essais numériques» et que, très souvent, elles les conduisent à un échec (aux problèmes «Luc et Michel» et «Le congrès», particulièrement). De plus, plusieurs de ces étudiants n'ont rien répondu aux problèmes «algébriques», principalement aux problèmes «Le congrès» et «Luc et Michel», ce qui laisse présager de sérieuses difficultés. En dépit de cette impasse en arithmétique devant ces problèmes «algébriques», ces étudiants résistent et ne passent ainsi qu'en très petit nombre à l'algèbre: seulement 27 % des procédures sont algébriques.

Au contraire, les étudiants du groupe SEC emploient majoritairement l'algèbre pour résoudre les problèmes «arithmétiques» (54,5 % des procédures sont algébriques); plusieurs sujets évitent donc, dans la mesure du possible, de revenir à l'arithmétique. Les procédures algébriques dont ils se servent pour résoudre ces problèmes les mènent au succès dans une très forte proportion: 88 % de celles-ci mènent à la réussite.

Devant ces deux types de situation, «arithmétiques» et «algébriques», les sujets du groupe PRIM paraissent plus polyvalents et mieux adaptés que les deux autres groupes: ils utilisent majoritairement l'arithmétique pour les problèmes «connectés» et l'algèbre, pour les problèmes «déconnectés». Les procédures algébriques qu'ils utilisent semblent néanmoins beaucoup moins efficaces que celles produites par le groupe SEC; ces procédures les conduisent au succès dans des proportions moindres. Ces futurs enseignants passent ainsi à l'algèbre, mais avec difficulté.

Tableau 1

Pourcentage moyen de procédures arithmétiques et algébriques utilisées par chacun des groupes ADAP, PRIM, SEC pour les problèmes arithmétiques et algébriques et pourcentage des procédures conduisant au succès

Problèmes arithmétiques				
Groupe	Procédures arithmétiques utilisées en moyenne aux 4 probl. «arithmétiques»	pourcentage de ces procédures conduisant au succès	Procédures algébriques utilisées en moyenne aux 4 probl. «arithmétiques»	pourcentage de ces procédures conduisant au succès
ADAP	73,5 %	75,8 %	12,8 %	57,3 %
PRIM	58,5 %	87,5 %	29,3 %	79,8 %
SEC	34,8 %	88,0 %	54,5 %	90,5 %
Problèmes algébriques				
Groupe	Procédures arithmétiques utilisées en moyenne aux 4 probl. «algébriques»	pourcentage de ces procédures conduisant au succès	Procédures algébriques utilisées en moyenne aux 4 probl. «algébriques»	pourcentage de ces procédures conduisant au succès
ADAP	48,5 %	47,8 %	27,0 %	58,3 %
PRIM	19,5 %	50,5 %	61,5 %	64,8 %
SEC	2,3 %	0,0 %	92,5 %	86,3 %

En somme, plusieurs futurs enseignants tendent à se cloisonner soit dans l'arithmétique (principalement les sujets du groupe ADAP), soit dans l'algèbre (les étudiants du groupe SEC) et semblent bien mal préparés à véhiculer dans leur enseignement un rapport aux savoirs arithmétique et algébrique qui sous-tend une saine articulation entre ces deux domaines mathématiques.

L'étudiant maître qui, lui, se cantonne dans l'arithmétique sera-t-il en mesure de prévoir, dans son enseignement, les changements qui surviendront chez les élèves lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre dans la manière de gérer les données d'un problème, d'exercer un contrôle sur la démarche de résolution pour ainsi préparer la voie à cette transition fondamentale sur le plan de la pensée mathématique? Comment pourra-t-il intervenir de manière adéquate vis-à-vis des bouleversements conceptuels qu'auront à vivre ultérieurement les élèves devant certains concepts mathématiques, dont les concepts d'égalité et d'opération, et dans l'interprétation des écritures symboliques, si, pour lui, ces changements fondamentaux procurent toujours quelques difficultés? Plus particulièrement, que fera le futur enseignant qui se destine à l'enseignement en adaptation scolaire lorsqu'il devra intervenir auprès d'élèves en difficulté, notamment en algèbre; les résultats démontrent une faiblesse marquée dans ce domaine chez ce type d'intervenants?

Au moment de l'initiation à l'algèbre, l'enseignant est confronté, dans la résolution de problèmes, à des connaissances, à des procédures venant des élèves et dont certaines appartiennent à l'algèbre, d'autres, à l'arithmétique. Le futur enseignant à tendance algébrique pourra-t-il être à l'écoute des démarches des élèves, démarches marquées par l'arithmétique (par exemple, lorsque la mise en équation dépend d'une procédure arithmétique[3]) et être capable de les récupérer afin d'orienter ces élèves dans une bonne voie? En outre, les programmes d'études de mathématiques du premier cycle au secondaire visent à faciliter le passage à l'algèbre en amenant les élèves à saisir certaines différences fondamentales entre l'arithmétique et l'algèbre et ils préconisent, dans cette visée, une introduction à l'algèbre qui contribue à faire pressentir à l'apprenant la pertinence de ce nouvel objet mathématique. Or, comment le futur maître, qui se cloisonne dans l'algèbre, peut-il remplir ces nouvelles fonctions si le rapport qu'il a développé lui-même avec l'arithmétique et l'algèbre sous-tend une dissociation entre ces deux domaines? Quel cadre d'analyse, implicite et explicite, choisira-t-il pour les situations didactiques susceptibles de faire reconnaître la pertinence de l'algèbre?

Cette réflexion à propos de l'habileté des futurs enseignants à conduire les actions éducatives pertinentes à la jonction arithmétique/algèbre nous amène à repenser certains aspects de la formation des maîtres en didactique des mathématiques à l'université. Les programmes d'études de mathématiques actuels sont construits sur une dichotomie entre l'arithmétique et l'algèbre: l'arithmétique constitue le domaine mathématique des études primaires et l'algèbre est réservée à l'ordre secondaire. Cette division du cursus scolaire en mathématiques, si elle est respectée en tant que telle à l'intérieur des cours de didactique, ne tient pas compte du problème incontournable que jouent les connaissances déjà acquises dans le processus de construction de connaissances nouvelles. Prenons un exemple simple. De nombreuses recherches montrent que les élèves développent, au cours de leur apprentissage de l'arithmétique au primaire, une certaine conception du signe «=». Ils interprètent ce signe comme un «*do-something signal*» (Bélanger et Erlwanger, 1983*a*, 1983*b*) qui sert à indiquer le sens des opérations et où mettre la réponse: les calculs à effectuer sont exprimés à gauche du signe =, et à droite, le résultat de ces calculs achevés est rendu sous une forme numérique simple. Cette conception les amènera à refuser catégoriquement des équations de type: $6 = 4 + 2$, $4 + 2 = 4 + 2$, ou encore $3 = 3$. Le calcul algébrique ne peut s'accommoder de cette représentation essentiellement opératoire du signe égal et de l'équation. L'algèbre, pour justifier et entretenir ses actions, nécessite, entre autres, une compréhension du concept d'égalité en tant qu'équivalence entre deux expressions. Par conséquent, dès l'enseignement à l'ordre primaire, l'enseignant doit être sensibilisé et attentif à ce phénomène et veiller à élargir, bien avant la transition à l'algèbre, cette conception étroite du signe égal chez les élèves. Sur le plan de sa formation, le futur enseignant doit donc être amené à jeter un regard sur l'enseignement des mathématiques qui aille au-delà des programmes d'études de mathématiques pour assurer une meilleure cohérence dans les situations didactiques proposées aux élèves et à l'intérieur desquelles ils développeront leur pensée mathématique.

Enfin, si on laisse s'installer cette dichotomie entre l'arithmétique et l'algèbre dans la formation des enseignants, on renforce chez ces derniers le rapport étroit qu'ils ont développé avec ces deux domaines; ce rapport, on a pu l'observer, sous-tend une dissociation chez plusieurs d'entre eux. Les conséquences de cette situation sont fâcheuses pour l'enseignement. En effet, les choix didactiques que posera éventuellement le futur maître seront tributaires, entre autres choses, du rapport qu'il entretient *a priori* avec le savoir à enseigner: ici l'arithmétique, l'algèbre et l'articulation entre ces deux domaines. Or, dans la situation d'enseignement, les choix posés influencent, par la dynamique du contrat didactique présent dans la classe (Brousseau, 1980), le rapport que l'élève développera au savoir; le rapport au savoir véhiculé par l'intervenant a donc un impact déterminant sur le rapport que développeront les élèves eux-mêmes au savoir enseigné (Schubauer-Leoni, 1989) Par conséquent, des actions didactiques sont indispensables pour la formation des futurs enseignants afin de contrer cette dichotomie qui s'est installée entre l'arithmétique et l'algèbre chez l'apprenti-enseignant. Où devons-nous alors agir? Sur quels aspects porter notre attention?

Nous avons pu observer, dans de très rares cas au cours de notre recherche, de futurs enseignants qui, spontanément, dans le processus de résolution de problèmes mettaient en branle de façon fort ingénieuse une dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre, et cela, malgré les difficultés que suscite ce passage arithmétique/algèbre et en dépit du rapport officiel véhiculé vis-à-vis de l'arithmétique et de l'algèbre dans les programmes d'études de mathématiques qui ont marqué leurs apprentissages dans ces deux domaines. L'analyse de ces solutions, grâce à l'éclairage du point de vue théorique de Chevallard (1984, 1989), offre à la réflexion une piste d'intervention possible.

Dialectique arithmétique/algèbre

Le cadre théorique

Chevallard prône l'instauration dans l'enseignement d'une dialectique fonctionnelle entre l'arithmétique et l'algèbre[4]. Une telle dialectique était déjà présente à l'intérieur même du domaine arithmétique chez les Grecs anciens (avant la naissance de l'algèbre). Ces mathématiciens utilisaient alors deux types d'arithmétique: l'arithmétique vulgaire vouée aux calculs pratiques et l'arithmétique noble qui s'intéressait à la théorie des nombres. Même si elles s'appuyaient toutes deux sur le langage numérique, ces arithmétiques bénéficiaient d'un statut distinct et desservaient des tâches également foncièrement différentes.

L'arithmétique des calculateurs répondait au principe d'achèvement des calculs et remplissait une fonction désignatoire. Ces calculs étaient le moyen à partir duquel le calculateur parvenait à désigner par un nom la réponse cherchée pour tel problème particulier, but ultime de sa démarche. L'arithmétique noble, en revanche, grâce à une liaison fructueuse avec le géométrie, visait à faire voir, au travers des représentations construites, certaines propriétés (autres qu'une simple désignation nominative) de l'objet. À cause des jeux de la démonstration, les représentations créées pour des valeurs numériques particulières ne tardent pas à s'ériger en objet générique. Cette arithmogéométrie cherche ainsi à produire des connaissances relatives à l'objet d'étude et elle prend alors la forme d'un discours oral véhiculant des raisonnements qui permettent d'énoncer des lois et des règles d'une portée générale.

Chevallard assigne à l'algèbre cette préoccupation de l'étude du numérique. L'arithmétique et l'algèbre occupent toutefois des registres très différents: l'une, l'oral, l'autre, l'écrit[5]. L'algèbre supplée, par son système de signes, au raisonnement véhiculé par le langage ordinaire. Or, cette écriture reconnaît à l'outil algébrique une capacité mnémonique considérable, un atout précieux qui accentue son pouvoir «monstratif». En effet, le symbolisme algébrique, justement parce qu'il est une écriture, permet de garder la trace de l'histoire des éléments dans la démarche empruntée et laisse voir comment les relations, combinées entre elles de nouvelle manière, mettent à jour des connaissances pertinentes sur l'objet d'étude.

Cette première distinction entre l'arithmétique et l'algèbre conduit à un autre niveau, à une seconde opposition entre ces deux domaines. Le contrôle de la raison, propre à l'arithmétique, cède la place dans l'algèbre à l'«art analytique». L'algèbre propose une démarche où l'inconnue est désignée dès le départ par le biais d'un substitut symbolique. Ce dernier permet, grâce aux jeux d'écriture, d'évoluer de l'inconnu vers le connu, une démarche opposée à la synthèse, apparentée à l'arithmétique qui emprunte le chemin inverse.

L'algèbre est construite à partir de fondements arithmétiques, mais d'un même tenant; grâce à son efficacité «monstrative» et à la démarche originale qu'elle emprunte qui lui permettent de traiter des quantités inconnues autant que des quantités connues, elle devient l'outil d'étude par excellence de la structure des nombres. Dans cette étude du numérique, selon Chevallard (1989), l'algèbre n'évolue jamais seule: l'arithmétique accompagne et sert les fins de l'algèbre dans son intention de saisir cet objet. Nous tenterons, dans les lignes qui suivent, d'éclairer la nature de cette articulation entre l'arithmétique et l'algèbre et ce qu'elle suppose dans le contexte spécifique de la résolution de problèmes.

Dans la résolution de problèmes, une situation propose à la réflexion certaines relations entre les nombres (certaines grandeurs étant connues, d'autres pas). Ces relations constituent l'«objet d'étude» et elles appartiennent au domaine arithmétique. L'algèbre traite cet objet dans l'intention de faire apparaître certaines informations souhaitées. Elle s'érige comme un «outil d'étude» et, grâce au symbolisme qu'elle utilise de nos jours[6], elle élabore une modélisation de l'objet qui permet de mieux le traiter. Or, dans la conduite de ses actions, l'expertise inhérente au domaine auquel appartient l'objet d'étude – ici l'arithmétique – est nécessaire[7]. L'arithmétique fournit une sémantique à l'écriture littérale qui permet de vérifier la justesse des formulations algébriques en référence au contexte et de dégager, à travers elles et les transformations qui peuvent en résulter, d'autres propriétés de l'objet. L'arithmétique, à ce moment, s'érige à son tour comme un «outil d'étude» des écritures symboliques qui, inversement, deviennent un «objet d'étude». L'arithmétique et l'algèbre adoptent ainsi alternativement les statuts d'outil et d'objet d'étude; une dialectique s'installe entre ces deux domaines. Chevallard parle, en ce sens, d'une dialectique fonctionnelle entre l'arithmétique et l'algèbre.

Les observations tirées des entrevues réalisées auprès de quelques sujets, qui mettent en branle spontanément une telle dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre dans la résolution de problèmes, permettent d'illustrer et ainsi de mieux comprendre comment celle-ci peut fonctionner. De plus, une analyse attentive de ces différentes stratégies permettra de mettre à jour d'autres rôles possibles que peuvent tenir l'arithmétique et l'algèbre dans un processus de résolution de problèmes.

Une dialectique fonctionnelle entre l'arithmétique et l'algèbre: quelques exemples

Pour la moitié des sujets à tendance mixte, l'emploi de l'arithmétique et de l'algèbre s'est imposé pour des problèmes distincts au regard de leur nature respective («arithmétique» ou «algébrique»). Ceci témoigne, dans leur cas, d'un engagement réfléchi dans un type de résolution plutôt que dans un autre, en fonction des contraintes liées au problème et d'une certaine flexibilité possible dans l'utilisation des deux types de raisonnement. Or, d'autres sujets ont utilisé l'arithmétique et l'algèbre à l'intérieur d'une même solution. C'est chez ces sujets que nous trouvons la mise en place d'une dialectique fonctionnelle entre arithmétique/algèbre.

Maxime L'algèbre, un outil de modélisation des relations liant les données du problème, ouvrant la voie à une résolution possible du problème par l'arithmétique.

Examinons attentivement de quelle manière Maxime s'y est pris pour résoudre le problème «Arsène Ponton n° 5» (ce problème était inclus dans le protocole d'entrevue pour les sujets à tendance mixte; voir annexe 2). Il a traité tout d'abord les relations énoncées dans le problème (objet d'étude). Les lettres «x» et «z» lui servent alors à analyser et à modéliser (outils d'étude) l'ensemble des relations («x» désignant le montant de Chantal, «2x» le montant de Marie et «z», celui de Sophie):

Solution 1 – Problème «Arsène Ponton»

$$\begin{array}{ccccc} 2x & & \leftrightarrow & x & \\ z + 43\,000 & & \leftrightarrow & z & \\ S & + & C & + & M \\ z & & z - 36\,000 & & z + 43\,000 \\ & & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

De manière astucieuse, il s'appuie par la suite sur la lettre «z» pour réinterpréter les montants de Chantal et de Marie. Il dessine une flèche sous les montants de 36 000 $ et de 43 000 $ et s'exprime ainsi: «Alors, l'écart entre Chantal et Marie c'est 79 000 $... Ah, ça veut dire qu'on brûle là, ça s'en vient...». La modélisation des relations qu'il a mise au point lui permet de situer le montant de Sophie entre celui de Chantal et celui de Marie. Il peut voir que l'écart entre le montant de Chantal et celui de Sophie est de 36 000 $, l'écart entre celui de Sophie et celui de Marie est de 43 000 $. Par conséquent, il en déduit que l'écart entre le montant de Chantal et celui de Marie est égal à la somme de ces deux écarts, donc 79 000 $. Jusqu'ici, dans cette procédure, l'écriture littérale sert d'outil de modélisation et c'est à partir d'un traitement arithmétique des données que Maxime progresse vers la solution du problème. L'arithmétique est utilisée ici en tant qu'outil de résolution; elle permet d'emprunter un parcours qui s'appuie sur les grandeurs connues.

L'écart entre le montant de Chantal et celui de Marie étant fixé, le problème n'est pas pour autant résolu pour Maxime. Il se repose alors sur les lettres «x» et «2x» comme si elles représentaient respectivement les montants des deux nièces:

> 79 000 $, c'est l'écart entre les deux. Alors, on sait que en plus... De plus, Chantal, c'est x et Marie, c'est 2x... Il me semble qu'avec ça, on pourrait trouver la réponse. Il écrit ceci:

Solution 1 (suite) – Problème «Arsène Ponton n° 5»

– l'écart entre Marie et Chantal est de 79 000 $

– de plus	Chantal (x)	et (2x)
	100	200
	500	1 000
	79 000	158 000

> Alors, si Chantal, c'est 500 $, Marie, ça va être 1 000 $. Et l'écart est de 79 000 $... Intéressant... Pas mal intéressant ça... Alors, si j'avais ici... Supposition, si j'avais 100 $, ici, j'aurais 200 $. Si j'avais, ici 500 $, j'aurais 1 000 $. Alors, l'écart ici, c'est 100, ici, c'est 200. Alors, si j'ai 79 000 $ ici (l'écart) et j'ai le double ici, l'écart, c'est le premier chiffre... Hey, je suis fort, pas mal fort... 158 000 $.

Dans cette résolution, Maxime se sert de la lettre «x» pour fixer les montants de Chantal et de Marie. Il retourne ainsi à un problème classique du type: il existe deux nombres, l'un étant le double de l'autre et dont l'écart entre les deux est connu. Cette symbolisation est en fait un modèle du problème; elle l'aide, en fixant les états, à reconstituer la relation qui les unit. Il y a alors inversion dans le statut accordé à ces deux domaines. La modélisation «x, 2x» devient «objet d'étude» et l'expertise arithmétique, par le biais des substitutions numériques, fait remarquer une autre propriété de l'objet: l'écart entre les deux montants, l'un étant le double de l'autre, est toujours égal au premier montant. Par de tels essais numériques, Maxime est parvenu à contrôler la double relation multiplicative (2 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal) et additive (79 000 $ de plus) liant les deux mêmes données, et à résoudre ainsi véritablement, à ce moment, le problème par un raisonnement arithmétique. Ainsi, chez Maxime, l'algèbre joue pour ce problème un autre rôle que celui d'«outil de résolution». L'algèbre est employée ici comme un outil de modélisation des relations qui unit les données d'un problème et sert de support à un raisonnement arithmétique qui conduit véritablement à la résolution du problème.

Paul Les essais numériques, préalables à la symbolisation algébrique des relations/ l'algèbre, en tant qu'outil de généralisation de modèles numériques.

L'entrevue avec Paul met en lumière un autre aspect de l'apport positif de la dialectique entre le numérique et l'algébrique dans la résolution de problèmes. On a pu voir précédemment chez Maxime quel rôle la symbolisation algébrique a pu jouer dans le contrôle des relations du problème et dans sa résolution (un support à un raisonnement arithmétique). Or, chez Paul, le phénomène inverse est observé. En effet, nous verrons comment, dans son cas, le numérique aide à mieux contrôler les relations entre les données et facilite un éventuel passage à une symbolisation algébrique.

L'intervieweur a repris avec Paul le problème «Les deux trains» du test écrit (voir annexe 1), pour la résolution duquel Paul avait construit une sorte de tableau intégrant des essais numériques. Au cours de l'entrevue, Paul a entrepris de résoudre ce problème de la même façon. Il a tout d'abord procédé à quatre essais (un wagon pour le train à 12 places et 9 wagons pour le train à 16 places et ainsi de suite pour les couples: 2-10, 3-11, 4-12):

Solution 2 – Problème «Les deux trains»

16 places	12 places
9	1
10	2
11	3
12	4

L'arithmétique lui sert alors d'outil pour maîtriser les relations proposées en leur accordant un certain sens ponctuel: ces essais sont en fait une première modélisation numérique des relations. À la suite de cette approche initiale, il tente de s'orienter vers l'algèbre. Les essais précédents, qui permettaient d'étudier le lien entre le nombre de wagons dans les deux trains, sont maintenant considérés à titre d'objet. L'algèbre est utilisée afin de symboliser les relations mises à jour par ces essais:

Solution 2 (suite 1) – Problème «Les deux trains»

a = nombre de wagons à 12 places*	a12 +
b = nombre de wagons à 16 places**	12a +

> Je vais l'essayer de l'autre façon, tout de suite. Ça va être «a», le nombre de wagons à 12 places (écrit*) et «b», le nombre de wagons à 16 places (écrit**)... 16 passagers,
>
> 12 passagers (écrit a12).
>
> C'est parce qu'en fait... OK. On dispose de deux trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, c'est ce que je viens de faire (pointe a12); et l'autre... combien de wagons?... On me dit... Je cherche le nombre de wagons à 12 places vu qu'on travaille en nombre... Là, c'est 12a (écrit 12a), ça revient au même... plus...
>
> Ah, c'est ça l'affaire. En fait, ça c'est: a plus 8 (raie «b» et écrit à gauche «a + 8»). Il y a 8 wagons de plus que le nombre de wagons que j'ai en «a», que j'ai en 12, c'est ça... Bon, ça marche pas, mon affaire... 12a... Je vais me tanner, je vais le faire d'une autre façon.

Paul fait intervenir au départ deux variables. Les essais numériques précédents lui permettent d'établir symboliquement la relation qui lie le nombre de wagons dans les deux trains: «a + 8» est substitué à «b». Il éprouve alors quelques difficultés à intégrer la dimension «taux» dans la formulation de l'expression algébrique qui correspond au nombre de passagers du deuxième train. Paul retourne alors aux essais numériques qu'il a effectués et en fait un autre (5-13). Comme pour vraiment faire ressortir la forme algébrique, Paul refait deux autres essais à la suite desquels il explique sa solution:

Solution 2 (suite 2) – Problème «Les deux trains»

$$\begin{array}{rcr} 5\,(12) & = & 60 \\ 13\,(16) & = & \underline{208} \\ & & 268 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 8\,(12) & = & 96 \\ 16\,(16) & = & \underline{256} \\ & & 352 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 12\,(12) & = & 144 \\ 20\,(16) & = & \underline{320} + \\ & & 464 \end{array}$$

> Oui et on se rend compte que je fais toujours la même affaire. Donc, la forme algébrique devrait ressortir.
>
> Donc, x fois 12 plus, parce que j'additionne toujours... et ici, qu'est-ce que je fais, je fais tout le temps mon x en fait plus le 8 que je multiplie à 16. Et je dois retrouver 576 passagers.

À ce moment, il pose l'équation suivante: x(12) + x + 8 (16) = 576 passagers, et résout correctement le problème par l'algèbre (ici, outil de résolution). Ainsi, le recours à des essais numériques a aidé Paul à mieux contrôler les relations en présence (les différents taux, la relation entre le nombre de wagons, le passage au nombre de passagers par le biais des différents taux), et la dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre qui a pris place par la suite l'a conduit à exprimer les relations sous une forme plus générale. Dans cette solution, l'utilisation de l'écriture littérale s'inscrit dans un processus de généralisation de certains modèles numériques: l'algèbre tient le rôle d'outil de généralisation permettant de symboliser les régularités exprimées par les relations par quelques cas numériques.

Patrice L'arithmétique, un outil de résolution qui, lorsqu'il est utilisé en parallèle, permet d'exercer un contrôle sur les transformations algébriques.

Patrice s'engage au départ dans la résolution du problème «Arsène Ponton n° 2» avec une procédure algébrique:

Solution 3 – Problème «Arsène Ponton n° 2»

$$x + 7x = 40\,000$$
$$x + \frac{7x}{7} = \frac{40\,000}{7}$$

Patrice se questionne au sujet de cette résolution; il bloque sur la solution obtenue par «40 000 ÷ 7». Il décide à ce moment de résoudre le problème par l'arithmétique, en essayant dans une première tentative de diviser par 7, puis par 8: «J'ai juste à le diviser par 8... ça va faire 5 000. C'est ça, 5 000 (Chantal), 35 000 (Sophie).» Il sait alors qu'il a résolu correctement le problème et il cherche à faire un parallèle entre sa démarche algébrique initiale et sa solution arithmétique: «Je ne sais pas pourquoi je n'arrive pas (avec la démarche algébrique)... À moins que j'aie un x ici + 7x, ça donnerait 8, et là, si je divise par 8, là, ça arrive (raie 7 au-dessous de "x + 7x" et 40 000, et écrit 8)».

Patrice n'a pas fait d'algèbre depuis longtemps et il se souvient *grosso modo* des règles de transformation algébrique. Lorsqu'il s'interroge au sujet de la solution obtenue par l'algèbre, il procède à un certain contrôle par le biais d'une seconde résolution où il emploie l'arithmétique. L'arithmétique et l'algèbre sont toutes les deux utilisées ici à titre d'outil de résolution, mais l'arithmétique sert de plus d'outil de contrôle de la démarche algébrique. Ce contrôle correspond à ce que Margolinas (1984) entend par «validation par changement de cadre», que l'on peut décrire comme la confrontation de deux résolutions parallèles effectuées par le recours à deux cadres ou domaines de connaissances différents. Ainsi, la dialectique qu'il a installée entre les deux façons de résoudre le problème lui a permis de faire un pas en avant en algèbre, en lui permettant de redécouvrir les règles de transformation algébrique.

En conclusion, l'étude de ces quelques cas permet de bien illustrer ce que Chevallard entend par dialectique fonctionnelle en éclairant le jeu «outil»/«objet» par rapport aux statuts que peuvent prendre tour à tour l'arithmétique et l'algèbre dans la résolution de problèmes. Notre analyse montre par ailleurs les différents rôles que peuvent tenir les deux domaines mathématiques dans ce processus dialectique: outil de modélisation des relations, outil de contrôle de la démarche empruntée, outil de résolution de problèmes: outil de généralisation de modèles numériques, plus spécifiquement dans le cas de l'algèbre.

Conclusion

Les résultats de notre recherche montrent qu'il existe une dichotomie entre l'arithmétique et l'algèbre chez plusieurs futurs enseignants. Nombre de difficultés à l'origine de cette dissociation ont été identifiées et situées sur différents plans: le rapport entretenu avec l'arithmétique et avec l'algèbre, la nature des raisonnements utilisés et du contrôle exercé dans ces deux modes de traitement et, enfin, les significations attribuées à la lettre et le statut accordé au symbolisme (voir Schmidt, 1994). La variété et l'étendue de ces difficultés font bien ressortir toute la complexité du problème; pour susciter une saine articulation entre l'arithmétique et l'algèbre chez les futurs enseignants, nous devons par conséquent agir sur plusieurs terrains.

La deuxième partie du présent texte ouvre une piste intéressante qu'il faudra aussi prévoir à l'intérieur de leur formation en didactique des mathématiques. La dialectique fonctionnelle, mise en place spontanément dans la résolution de problèmes entre l'arithmétique et l'algèbre par certains apprentis-enseignants, introduit différents rôles et statuts que peuvent emprunter, alternativement ou simultanément selon les cas, ces deux modes de traitement. L'activité de résolution de problèmes dans un contexte de classe (par les diverses formulations, justifications et argumentations qu'elle suscite dans les discussions autour des stratégies utilisées) se révèle ainsi un lieu privilégié pour confronter l'étudiant-maître à cette mobilité fonctionnelle qui repose à la base sur une articulation fructueuse entre l'arithmétique et l'algèbre. Cette ouverture favoriserait, nous le pensons, le développement d'un rapport au savoir chez le futur enseignant qui intégrerait des liens de fine complicité entre ces deux domaines.

Notes

1. Un problème en soi ne peut être qualifié d'arithmétique ou d'algébrique; seul le mode de la résolution peut l'être. La désignation utilisée ici renvoie à la grille d'analyse des problèmes de Bednarz et Janvier (sous presse) qui, en faisant ressortir la structure du problème (par exemple, le type de lien établi entre les données connues et inconnues), permet d'identifier les situations qui susciteront davantage de résolution arithmétique ou algébrique (une relation donnée entre deux grandeurs connues permettant d'évoluer du connu vers l'inconnu favorisera, par exemple, une démarche de type arithmétique ou synthétique).

2. La consigne relative à cette épreuve était formulée de la façon suivante aux étudiants: la tâche que vous devrez effectuer consiste à résoudre huit problèmes mathématiques en prenant soin

d'écrire votre démarche de résolution au complet, pas juste la réponse, et sans effacer. Les problèmes étaient placés dans un ordre aléatoire dans chacun des cahiers remis aux étudiants.

3. Par exemple, une résolution arithmétique très typique de ce problème: «Pierre et Denis jouent aux billes. Ensemble, ils ont 280 billes. Pierre a 36 billes de plus que Denis. Combien de billes chacun possèdent-ils?», consiste à partager en deux parts égales la somme totale et l'écart. Les deux nombres recherchés sont retrouvés en ajoutant à la moitié de la somme le demi-écart et en soustrayant de l'autre moitié de la somme, l'autre demi-écart. Cette résolution est rendue sous une forme symbolique par certains élèves par $x + 18 + x - 18 = 280$. Exemple offert par Bednarz et Janvier dans le cadre du colloque international «Research perspectives on the emergence and the development of algebraic thought», mai 1993, CIRADE-UQAM, Montréal.

4. La perspective didactique de Chevallard de la modélisation mathématique lui permet d'étendre le concept de dialectique fonctionnelle entre l'écriture littérale et le mathématisé (objet d'étude) aux domaines extramathématiques.

5. Chevallard parle, en ce qui a trait à l'arithmétique, de discours oral car, selon lui, «le savoir arithmétique est intrinsèquement un savoir-faire oral» (Chevallard, 1989-1990, p. 21) qui s'appuie sur le langage ordinaire et auquel les nombres sont venus s'ajouter. En fait, les signes dits «arithmétiques» (+, -, X,) sont apparus beaucoup plus tard et sont véritablement nés du travail algébrique.

6. D'après l'histoire des mathématiques, la pensée algébrique existait bien avant que les hommes développent un système symbolique. Les Arabes à l'époque du mathématicien Al-Khwarizmi (vers 850) écrivaient la solution algébrique des problèmes sous une forme essentiellement rhétorique.

7. Dans le cas de modélisation de phénomènes extramathématiques, le domaine d'appartenance du mathématisé ou objet d'étude peut être de natures diverses: physique, biologique, etc. L'utilisation judicieuse de l'algèbre nécessite alors une dialectique fonctionnelle entre la démarche algébrique et les connaissances inhérentes à ces différents domaines.

Abstract – This article examines difficulties which many future teachers have in explaining the areas of arithmetic and algebra in the context of problem-solving. An analysis of interviews administered to student-teachers, who spontaneously create a dicotomy between these two areas, illustrates the different roles that arithmetic and algebra play in the problem-solving process. The results point out those concepts related to artihmetic and algebra with which future teachers should be familiar and which understandings should be developed by both teachers and students.

Resumen – Este artículo estudia las dificultades de muchos maestros en la articulación de la aritmética y el álgebra en un contexto de resolución de problemas. El análisis de entrevistas realizadas con maestros en formación que aplican espontáneamente una dialéctica entre estos dos dominios de conocimiento, ilustra los diferentes status y roles que pueden tomar la aritmética y el álgebra en el proceso de solución de problemas. Los resultados hacen remarcar la relación entre los saberes de la aritmética y el álgebra, que seria diseable encontrar en los futuros maestros y los aspectos que seria oportuno trabajar no solamente con los maestros sino también con los alumnos.

Zusammenfassung – In diesem Artikel geht es um die Schwierigkeiten, auf die künftige Lehrer stoßen bei dem Versuch, die Gebiete der Arithmetik und der Algebra im Rahmen der Aufgabenlösung in Zusammenhang zu bringen. Die Analyse von Unterredungen mit Lehramtsanwärtern, die spontan eine Dialektik zwischen diesen Wissensgebieten herstellen, bringt die verschiedenen Rollen zum Vorschein, die die Arithmetik und die Algebra abwechselnd

oder gleichzeitig in einem Aufgabenlösungsprozeß spielen können. Aus den Ergebnissen geht hervor, was für ein Verhältnis die künftigen Lehrer zu den diesen beiden Wissensgebieten haben sollten und welche Aspekte man nicht nur mit ihnen, sondern auch mit den Schülern durcharbeiten sollte.

RÉFÉRENCES

Bednarz, N. et Janvier, B. (sous presse). Emergence and development of algebra as a problem solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. *In* N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching.* The Netherlands: Kluwer.

Bélanger, M. et Erlwanger, S. (1983*a*). Interpretations of the equal sign among elementary school children. *In Proceedings of the fifth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, North American chapter (PME-NAV) (p. 234-237). Montréal.

Bélanger, M. et Erlwanger, S. (1983*b*). Strategies used by first to fourth grade children to transform statements containing an equal sign. *In Proceedings of the fifth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, North American chapter (PME-NAV) (p. 230-234). Montréal.

Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques, 41*, 177-182

Charbonneau, L. et Lefebvre, J. (1992). Grandes lignes de l'évolution de l'algèbre: de la pluralité à l'unicité. *In Actes du Colloque portant sur l'émergence de l'algèbre, Cahier du CIRADE* (p. 7-17). Montréal: Université du Québec à Montréal.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège: l'évolution de la transposition didactique. *Petit X, 5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit X, 23*, 5-38.

Chevallard, Y. (1989-1990). Arithmétique, algèbre, modélisation: étapes d'une recherche. *Publication de l'IREM d'Aix-Marseille, 16*, 5-62.

Lee, L. et Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematic, 20*, 41-54.

Margolinas, C. (1984). Le point de vue de la validation: essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques. Thèse de doctorat, Département de mathématiques appliquées et d'informatique, Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Ministère de l'Éducation du Québec (1988). *Guide pédagogique – Primaire, Mathématique, Fascicule K – Résolution de problèmes – Orientation générale* (document n° 16- 23001 1). Québec: Direction des programmes.

Radford, L. (1992). Diophante et l'algèbre présymbolique. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, VI*(1), 73-80.

Schmidt, S. (1994). *Passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un contexte de résolution de problème.* Thèse de doctorat, Département des sciences de l'éducation, Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.

Schmidt, S. et Bednarz, N. (1995). *The gap between arithmetical and algebraic types of reasonning in problem-solving among pre-service teachers.* Récife, Brésil: The International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), *2*, 82-89.

Schmidt, S. et Bednarz, N. (sous presse). Articulation entre arithmétique et algèbre dans un contexte de résolution de problèmes: analyse des difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics.*

Schubauer-Leoni, M.-L. (1989). Problématisation des notions d'obstacles épistémologiques et de conflit sociocognitif dans le champ pédagogique. *In* N. Bednarz et C. Garnier (dir.), *La construction des savoirs – Obstacles et conflits* (p. 350-363). Actes du colloque international «Obstacle épistémologique et conflit sociocognitif». Montréal: CIRADE/Agence d'Arc.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. *In* T. Carpenter et J. Moser (dir.), *Addition and substraction: A cognitive perspective* (p. 39-59). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Annexe 1

Problèmes algébriques

Problème «Les raquettes». Trois raquettes de tennis et quatre raquettes de badminton coûtent 184 $. Quel est le prix d'une raquette de badminton si celle-ci coûte 3 $ de moins qu'une raquette de tennis?

Problème «Le congrès». 208 représentants de plusieurs régions du monde étaient présents au dernier congrès international sur l'usage des drogues anabolisantes chez les sportifs. Il y avait trois fois plus d'Américains que d'Asiatiques et 16 Européens de moins que le nombre d'Américains. Peux-tu trouver combien chaque délégation comportait de représentants?

Problème «Les deux trains». Il y a 576 passagers à transporter entre deux villes. On dispose de deux trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre, uniquement des wagons à 16 places. En supposant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des deux locomotives?

Problème «Luc et Michel». Luc a 3,50 $ de moins que Michel. Luc double son montant d'argent tandis que Michel augmente le sien de 1,10 $. Maintenant, Luc a 0,40 $ de moins que Michel. Combien avaient-ils chacun au départ?

Problèmes arithmétiques

Problème «Le cours de biologie». Le cours de biologie regroupe 140 élèves. Certains élèves sont au laboratoire, d'autres à la salle de projection et d'autres encore font un travail de recherche à la bibliothèque. Il y a deux fois plus d'élèves qui sont à la salle de projection qu'au laboratoire, et il y a 20 élèves de moins à la bibliothèque qu'à la salle de projection. Sachant qu'il y a 44 élèves à la bibliothèque, combien y a-t-il d'élèves au laboratoire et à la salle de projection?

Problème «L'âge». Dans 10 ans, Rolland sera deux fois plus âgé que Paul. Si Rolland a aujourd'hui 30 ans, quel âge Paul a-t-il présentement?

Problème «Chandails et blousons». M. Beaulieu paie pour l'achat de chandails et de 11 blousons 2 495 $. Le prix d'un chandail est de 85 $ de moins que celui d'un blouson. Sachant qu'un blouson coûte 150 $, combien a-t-il acheté de chandails?

Problème «Le bassin». Pour remplir un bassin d'une capacité de 400 litres, on ouvre en même temps un premier robinet qui alimente le bassin et un second qui sert à le vider. Dans ces conditions, il faut 40 minutes pour remplir le bassin. Combien le second robinet déverse-t-il de litres à la minute, le premier robinet déversant 24 litres à la minute?

Annexe 2

Problème «Arsène Ponton n° 2». Arsène Ponton lègue sa fortune à ses deux nièces, Marie et Chantal. Il donne 7 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 40 000 $, combien d'argent recevront Marie et Chantal?

Problème «Arsène Ponton n° 5». Arsène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 2 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal, 36 000 $ de plus à Sophie qu'à Chantal et finalement 43 000 $ de plus à Marie qu'à Sophie. Combien d'argent recevront Marie, Chantal et Sophie?