Nouveaux cahiers de la recherche en éducation

Nature analytique des raisonnements d'élèves au début du secondaire : qu'en est-il lors de la résolution de problèmes visant le développement de la pensée algébrique?

The analytical nature of student reasoning at the beginning of secondary school: What about when solving problems aimed at developing algebraic thinking?

Naturaleza analítica del razonamiento de los alumnos al comienzo de la escuela secundaria: ¿qué pasa cuando se resuelven problemas destinados al desarrollo del pensamiento algebraico?

Adolphe Adihou

Volume 22, Number 1, 2020

Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel (Vol. 2)

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1070025ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1070025ar

Publisher(s)

Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke

ISSN

1911-8805 (digital)

Cite this article

Adihou, A. (2020). Nature analytique des raisonnements d'élèves au début du secondaire : qu'en est-il lors de la résolution de problèmes visant le développement de la pensée algébrique? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *22*(1), 63–98. https://doi.org/10.7202/1070025ar

Article abstract

This article presents the results of a research study seeking to document the analytical nature of the reasoning used by students ages 12 to 14 in the first cycle of school secondary (secondary 1 and 2) in Quebec in order to solve comparison problems aimed at the development of algebraic thinking. Analysis was performed to determine the analytical nature of this reasoning and the registers of representation employed by students. This analysis highlighted three main categories of reasoning: synthetic, analytical-leaning and analytical, as well as three main categories of registers of representation: purely numerical, intermediate and algebraic. The categories and types of reasoning are presented first, followed by a comparison between secondary 1 and secondary 2 and finally a look at the importance of immersing students very early on in rich, relevant mathematical activities that contribute to developing algebraic thinking.

NCRÉ
Nouveaux cahiers de la recherche en éducation
Vol. 22, nº 1, 2020

Nature analytique des raisonnements d'élèves au début du secondaire: qu'en est-il lors de la résolution de problèmes visant le développement de la pensée algébrique?

Adolphe Adihou
Université de Sherbrooke

Résumé

L'article présente les résultats d'une recherche visant à documenter la nature analytique des raisonnements mobilisés par les élèves de 12 à 14 ans du premier cycle du secondaire (première secondaire et deuxième secondaire) au Québec dans la résolution de problèmes de comparaison en vue du développement de la pensée algébrique. Nous avons effectué des analyses qui consistent à cerner la nature *analytique de ces raisonnements* et la nature *des registres de représentation* utilisés. Elles ont permis de mettre en évidence trois grandes catégories de raisonnements: *non analytiques*, *à tendance analytique* et *analytiques*, ainsi que trois grandes catégories de registres de représentation: *purement numérique*, *intermédiaire* et *algébrique*. Nous présentons d'abord les catégories et les types de raisonnements, ensuite nous ferons une comparaison entre la première secondaire et la deuxième secondaire et enfin nous conclurons par l'importance de plonger l'élève très tôt dans les activités mathématiques riches et pertinentes qui contribuent au développement de la pensée algébrique.

Mots-clés : algèbre, arithmétique, résolution de problèmes, raisonnement, analytique

The analytical nature of student reasoning at the beginning of secondary school: What about when solving problems aimed at developing algebraic thinking?

Abstract

This article presents the results of a research study seeking to document the analytical nature of the reasoning used by students ages 12 to 14 in the first cycle of school secondary (secondary 1 and 2) in Quebec in order to solve comparison problems aimed at the development of algebraic thinking. Analysis was performed to determine the analytical nature of this reasoning and the registers of representation employed by students. This analysis highlighted three main categories of reasoning: synthetic, analytical-leaning and analytical, as well as three main categories of registers of representation: purely numerical, intermediate and algebraic. The categories and types of reasoning are presented first, followed by a comparison between secondary 1 and secondary 2 and finally a look at the importance of immersing students very early on in rich, relevant mathematical activities that contribute to developing algebraic thinking.

Keywords: algebra, arithmetic, problem-solving, reasoning, analytical

Naturaleza analítica del razonamiento de los alumnos al comienzo de la escuela secundaria: ¿qué pasa cuando se resuelven problemas destinados al desarrollo del pensamiento algebraico?

Resumen

El artículo presenta los resultados de la investigación destinada a documentar la naturaleza analítica de los razonamientos utilizados por alumnos de 12 a 14 años del primer ciclo de secundaria (secundaria 1 y secundaria 2) en Quebec durante la resolución de problemas de comparación en vista del desarrollo del pensamiento algebraico. Hemos llevado a cabo análisis que consisten en determinar la naturaleza analítica de estos razonamientos y la de los registros de representación utilizados. Estas nos han permitido resaltar tres principales categorías de razonamientos: sintéticos, con tendencias analíticas y analíticas, así como tres categorías principales de registros de representación: puramente numéricos, intermedios y algebraicos. Primero presentamos las categorías y tipos de razonamiento, luego haremos una comparación entre secundaria 1 y secundaria 2 y finalmente concluiremos conla importancia de sumergir al estudiante desde muy temprano en actividades matemáticas ricas y pertinentes que contribuyen al desarrollo del pensamiento algebraico.

Palabras clave: álgebra, aritmética, resolución de problemas, razonamiento, analítico

1. Introduction

Pour documenter la nature *analytique* des raisonnements mobilisés par les élèves dans une perspective de développement de la pensée algébrique, des problèmes de comparaison déconnectés de types source, puits, etc. (Marchand et Bednarz, 1999, 2000; Saboya, Besançon, Martin, Adihou, Squalli et Tremblay, 2014; Adihou, Squalli, Saboya, Tremblay et Lapointe, 2015), qui valorisent des raisonnements algébriques, ont été conçus et soumis à des élèves du premier cycle du secondaire. Nous avons analysé leurs raisonnements. Nos analyses ont mis en évidence des *raisonnements arithmétiques,* et même des *raisonnements de nature analytique*, auprès d'élèves qui n'ont pas été initiés au symbolisme algébrique. Nous avons aussi déterminé certains raisonnements qui ne sont *ni purement arithmétiques*, *ni purement algébriques*, dans les productions des élèves. *Un raisonnement analytique est un raisonnement de type hypothético-déductif qui permet, entre autres, dans le cadre de certaines activités mathématiques et de résolution de problèmes, de déterminer la valeur d'une inconnue, en faisant comme si cette valeur existait et en opérant sur elle comme si on opérait sur les nombres connus*. Ce type de raisonnement est au cœur du raisonnement algébrique et joue un rôle important dans l'acquisition du symbolisme mathématique dans la mesure où la représentation symbolique, et plus spécifiquement l'utilisation de lettres, s'imposent dans certaines activités algébriques dans lesquelles le raisonnement analytique est sollicité. Toutefois, le symbolisme algébrique et l'utilisation de lettres ne sont pas des critères primordiaux dans un raisonnement analytique (Arcavi, Friedlander et Hershkowitz, 1989-1990). Un raisonnement analytique peut se déployer avec ou sans le symbolisme algébrique. Toutefois, le *raisonnement analytique* aide à passer au symbolisme algébrique. *Une des hypothèses* (Hypo 1), *tirées de nos analyses précédentes* (Adihou, Squalli, Saboya, Tremblay et Lapointe, 2015), *nous a amenés à mettre en question l'insistance à imposer rapidement aux élèves le recours à la méthode algébrique dans la résolution de problèmes*. En effet, l'utilisation précoce du symbolisme algébrique, sans que l'élève ne sache la nécessité d'y recourir, le prive d'activités mathématiques riches. Il s'agit du déploiement de raisonnements variés qui mettent en évidence le caractère analytique de façon implicite des procédures et des concepts qui sont maîtrisés ainsi que leurs limites. Ces limites pourraient justifier la nécessité du recours aux raisonnements algébriques et être une motivation à proposer des activités dans le développement de *raisonnements analytiques*. Dans cet article, nous présentons une analyse comparative de la **densité** des raisonnements mobilisés par ces élèves avant (première secondaire) et après leur introduction à l'algèbre (deuxième secondaire).

2. Problématique

L'introduction de l'algèbre peut se faire dans plusieurs contextes: généralisation, étude de relations fonctionnelles, étude des structures algébriques, résolution de problèmes, etc. Au secondaire, selon la structure des programmes de mathématiques (ancien et nouveau), ces contextes permettent à l'élève l'utilisation de raisonnements à caractère *analytique* après l'introduction du symbolisme algébrique ou des lettres.

Plusieurs chercheurs ont étudié des problèmes de comparaison (Bednarz et Dufour-Janvier, 1994; Câmara et Oliveira, 2010; Coulange, Drouhard, Dorier et Robert, 2012; Marchand et Bednarz, 1999, 2000; Oliveira et Rhéaume, 2014; Van Doreen, Verschaffel et Onghena, 2002; Vergnaud, 1982, 1987, 1988) qui valorisent des raisonnements algébriques. Certains se sont centrés sur l'analyse des stratégies mobilisées par les élèves dans la résolution des problèmes écrits, d'autres sur les difficultés des élèves en lien avec le raisonnement algébrique (Cordier, 1993; Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue, 1988). De façon plus spécifique, Marchand (1998) a travaillé l'introduction à l'algèbre par le biais des problèmes de comparaison. Elle a montré qu'il existait des discontinuités dans la nature et la complexité des problèmes proposés aux élèves d'un niveau scolaire à un autre dans le cadre du programme québécois de 1993 (Ministère de l'Éducation du Québec, 1993). Quant aux recherches de Squalli (2000, 2003), elles ont révélé que la capacité à généraliser et celle à raisonner sur l'inconnue favorisent la symbolisation. Ainsi, toutes ces études confirment que le développement du raisonnement *analytique* dans la résolution de problèmes est bien l'une des voies d'entrée en algèbre.

Par ailleurs, le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) du premier cycle de l'enseignement secondaire (Gouvernement du Québec, 2006a) préconise d'introduire l'algèbre par une double voie: 1) par la proposition de situations de généralisation (*la généralisation désigne à la fois un processus – construire des généralités et les justifier – ainsi que le produit de ce processus, les généralités construites*) et 2) par l'introduction au raisonnement *analytique* dans le cadre de la résolution de problèmes (*considérer l'inconnue et opérer sur elle comme on opère sur les données connues*). À ce propos, les manuels québécois proposent pour les élèves de première secondaire (12-13 ans) des activités de généralisation et de deuxième secondaire (13-14 ans) des activités qui débouchent sur des représentations formelles et symboliques des expressions, ainsi que sur le calcul algébrique. Mais, l'analyse des tâches et les activités mathématiques qu'elles induisent font ressortir le glissement issu de l'opérationnalisation des deux voies d'entrée en algèbre dans les manuels scolaires. En effet, au Québec, Squalli, Theis, Ducharmes-Rivard et Cotnoir (2007) ont analysé les manuels du nouveau programme. Il en est de même pour Denis (1997) et Marchand et Bednarz (1999) qui avaient analysé les manuels de l'ancien programme. Ces auteurs sont arrivés à la même conclusion. Concernant la première voie, leurs travaux ont mis en évidence le glissement qui s'est opéré dans les manuels: « […] de l'idée d'exploitation de situations qui se voulaient prétexte à une généralisation et à l'introduction du symbolisme algébrique, à un enseignement devenu avant tout celui des suites numériques» (Mary et Squalli, 2014, p. 165). Quant à la seconde, par une analyse des problèmes (nature et complexité) utilisés dans des manuels pour l'introduction à l'algèbre, Marchand et Bednarz (1999) ont mis en évidence que les problèmes choisis n'aident pas les élèves à saisir et à comprendre la pertinence d'un passage au raisonnement algébrique (raisonner de manière *analytique*). Aussi, certains problèmes n'aident pas les élèves à saisir la nécessité et la puissance de l'algèbre dans la résolution d'une classe de problèmes pour laquelle le raisonnement arithmétique se révèle en réalité suffisant. En France, Coulange (1997) est aussi parvenu à la même conclusion. Ce constat est en partie dû au manque d'analyse des relations et des variables didactiques qui structurent ces problèmes par les enseignants. Toutefois, certains élèves de première secondaire, sans être initiés au symbolisme et venant du primaire, résolvent des problèmes qui nécessitent un raisonnement analytique avec du symbolisme sans symbole.

Somme toute, le *symbolisme algébrique* n'est pas fondamental (Arcavi, Friedlander et Hershkowitz, 1989-1990) pour mettre en évidence *un raisonnement analytique*. Ce dernier peut se déployer avec ou sans le *symbolisme algébrique*. Même si le *raisonnement analytique et le symbolisme algébrique* sont une pierre angulaire dans le développement de la pensée algébrique, le caractère du raisonnement algébrique ne dépend pas que des ostensifs.

Par ailleurs, le programme québécois prévoit le passage au symbolisme en deuxième secondaire avant de confronter les élèves au *raisonnement analytique* dans la résolution des problèmes. On peut se demander la pertinence de recourir au *raisonnement analytique* si tard. Réciproquement, on peut penser que, puisque le programme met de l'avant la voie d'entrée dans l'algèbre par le *raisonnement analytique*, la question du développement des compétences autour du raisonnement analytique a déjà trouvé sa réponse. En effet, le développement du raisonnement analytique est certes imposé par le programme québécois après le symbolisme algébrique.

Dans la perspective du développement de la pensée algébrique, *l'entrée dans l'algèbre par le raisonnement analytique ne devrait-elle pas venir plus tôt? Le programme québécois favorise-t-il le développement chez les élèves de raisonnements analytiques*? *Comment les raisonnements à caractère analytique des élèves qui n'ont pas encore reçu un enseignement de l'algèbre sont-ils considérés dans leur apprentissage? Sont-ils valorisés? Sont-ils considérés par les enseignants comme des raisonnements qui participent au développement de la pensée algébrique bien qu'il n'y ait pas l'utilisation de lettres ou de symboles? Y a-t-il des facteurs qui mettent en évidence une tendance à produire des raisonnements analytiques avant l'introduction à l'algèbre?*

Ces questions renvoient à la nécessité et à la pertinence de l'étude *de la nature analytique* des raisonnements des élèves de première et deuxième secondaire avec ou sans symbolisme (Saboya, Besançon, Martin, Adihou, Squalli et Tremblay, 2014; Adihou, Squalli, Saboya, Tremblay et Lapointe, 2015): quels sont les raisonnements à caractère analytique développés par les élèves avant ou après (avec ou sans) une initiation à l'algèbre?

3. Cadre de référence

La *tendance à généraliser* et la *tendance à raisonner de manière analytique* sont deux composantes essentielles de la pensée algébrique (Squalli, 2000, 2003). Elles constituent ainsi deux enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre au moment de son introduction, mais aussi dans les activités d'apprentissage et d'enseignement où le développement de la *pensée algébrique* se définit comme un

> ensemble de processus de pensée (comme généraliser, opérer sur l'inconnue, exprimer des relations fonctionnelles, etc.) essentiel dans des activités mathématiques où figurent des opérations mathématiques (comme l'addition, la multiplication la relation suivie de, etc.). (Squalli, 2002, p. 4)

Cette définition met en évidence le fait que la pensée algébrique couvre un domaine très large et convoque plusieurs activités réalisées à l'école, activités dans lesquelles l'usage du raisonnement de type *analytique* est mis en évidence ou sollicité. Ce n'est donc pas uniquement la référence à la lettre qui donne le statut d'algèbre; il y a une algèbre avant la lettre. L'histoire de l'algèbre nous apprend que celle-ci a traversé les siècles sans référence à la lettre (Arcavi *et al.*, 1989-1990). L'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre devraient ainsi favoriser une variété d'approches ou de démarches à mettre en œuvre dans les activités lors des premiers apprentissages pour que la pensée algébrique se dévoile. La pensée algébrique devient donc une manière de penser que l'on peut mobiliser dans des activités permettant le développement d'un type de pensée mathématique en lien avec l'algèbre. Cette pensée s'opérationnalise par le biais de raisonnements particuliers, dans le cadre d'activités de généralisation ou de résolution de certains problèmes de comparaison. Lors des résolutions de problème dans lesquels le caractère analytique est mis en évidence implicitement ou explicitement, dans l'apprentissage de ces raisonnements, «*on fait comme si*[1]» (Larguier, 2015b) l'inconnue

1 «On fait comme si la réalité de l'énoncé permettait d'inventer une nouvelle réalité.
On fait comme si on était 100 élèves, comme s'il y avait 2 bouchons: le réel est donc modifiable à condition de ne pas modifier les relations mathématiques;
On fait comme si on connaissait tous les nombres utilisés: les nombres «connus» remplacés par des paramètres comme les nombres inconnus remplacés par des variables;
On fait comme si les nombres désignés à l'aide de lettres étaient connus pour opérer sur eux;
On fait comme si le problème était résolu pour le modéliser dans le registre des expressions algébriques (pensée analytique);
On préfère la forme d'écriture du nombre qui exprime son sens, à l'expression non analytique du nombre (ex: 17×49 exprime mieux que ce nombre est un multiple de 17 que 833). On recherche le meilleur "nom propre" (au sens de Frege) du nombre par rapport au contexte et non pas la finalisation d'un calcul.» (Larguier, 2015b)

était connue pour ensuite la déterminer. En ce sens, on pourrait parler d'une tendance à raisonner de manière *analytique* et à généraliser. Cette tendance à raisonner de manière analytique permet de donner du sens et de construire des concepts mathématiques dans les activités algébriques, entre autres «voir l'égalité comme une relation d'équivalence, une tendance à laisser les opérations en suspens; une tendance à symboliser et à opérer sur des symboles; une tendance à avoir une vision structurale» (Squalli, 2015, p. 347-348).

Plusieurs recherches empiriques ont montré qu'au lieu de stratégies algébriques de résolution de problèmes, un grand nombre d'élèves préfèrent utiliser des stratégies arithmétiques. Cordier (1993) affirme à ce propos que «c'est la mise en équation des problèmes qui est le plus difficile, l'extraction des informations pertinentes et leur traduction algébrique devraient être l'objet d'un enseignement plus systématique» (p. 149). Lorsqu'il s'agit de résoudre une équation, plusieurs ont de la difficulté à opérer sur l'inconnue et utilisent plutôt des essais numériques. Filloy et Rojano (1984, 1989) considèrent qu'il existe dans de tels cas une coupure didactique le long de la ligne d'évolution d'une pensée arithmétique à une pensée algébrique. Quant à Marchand (1998), elle a montré qu'il existait des *discontinuités* dans la nature et la complexité des problèmes proposés aux élèves d'un *niveau scolaire* à *un autre* dans le cadre du programme québécois de 1993. Elle a constaté que peu d'élèves du premier cycle du secondaire effectuaient le passage à un raisonnement algébrique, plusieurs privilégiant les essais numériques qui étaient pourtant peu fréquents avant la réforme de 1993.

Vergnaud (1982, 1983, 1988) a analysé des problèmes et a mis en évidence des relations de types additif et multiplicatif qui structurent ces problèmes. Les analyses ont montré que la structure des problèmes ainsi que la nature des relations en jeu influencent la manière de les résoudre et les difficultés chez les élèves. Par ailleurs, Bednarz et Dufour-Janvier (1992), en s'appuyant sur le cadre conceptuel de Vergnaud (1982) développé autour du calcul relationnel dans les problèmes arithmétiques, distinguent les problèmes qu'elles dénomment de problèmes connectés, des problèmes déconnectés (Bednarz et Dufour-Janvier, 1994). Elles précisent que pour les problèmes connectés «une relation peut facilement être établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement de type arithmétique s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir en fin de processus à retrouver la donnée inconnue» (p. 279) alors que pour les problèmes déconnectés «aucun pont ne peut être établi a priori directement entre les données connues du problème» (p. 279). Bednarz et Dufour-Janvier (1994) distinguent trois classes de problèmes: des problèmes de taux, des problèmes de comparaison et des problèmes avec des transformations dans le temps. Elles ont mis en place une grille pour analyser des problèmes arithmétiques et algébriques.

D'autres chercheurs ont travaillé les problèmes en rapport avec la modélisation. Ils ont mis en évidence les difficultés occasionnées par les diverses ruptures entre l'arithmétique et l'algèbre, entre autres la rupture d'ordre épistémologique; rupture due au passage d'un mode de pensée arithmétique à un mode de pensée algébrique (Chevallard, 1989a, 1989b, 1989-1990). Bednarz et Dufour-Janvier (1996) ont spécifiquement étudié la résolution de problèmes sous l'angle de la continuité et de la discontinuité entre la résolution avec l'arithmétique et l'approche algébrique. Elles ont ainsi fait ressortir la différence qui existe entre le calcul relationnel à l'œuvre lors d'une résolution arithmétique et algébrique. Elles n'ont pas explicitement étudié le lien direct entre la complexité (structure) de ces trois classes de problèmes et le raisonnement, mais ont cherché à faire ressortir la façon dont les élèves procèdent lors d'une résolution arithmétique (les raisonnements, le traitement, l'utilisation des relations, etc.) dans le but de faire un lien entre une résolution arithmétique et celle algébrique, et affirment: «*The preceding analysis appears to link* a priori *this way of connecting the problem (algebraic solution) to the reasoning we called "numeric trial"*» (p. 128). Dans leur conclusion, elles ont évoqué que les difficultés des élèves à résoudre un problème par l'arithmétique pourraient constituer une motivation pour passer à une résolution par l'algèbre. Leurs études positionnent deux modes de résolution. Elles l'expriment en termes de «distance» entre l'approche par essais numériques et raisonnement algébrique bien qu'il existe d'autres types de ruptures, entre autres la rupture du statut de certains objets lors du passage à l'algèbre. Ces études font aussi ressortir les difficultés des élèves à revenir à des résolutions arithmétiques lorsqu'ils maîtrisent les résolutions algébriques.

Par ailleurs, la plupart des recherches sur l'étude du passage au raisonnement algébrique, lors de la résolution de problèmes, renvoient principalement à l'apprentissage de l'utilisation de lettres. De plus, *la nature analytique ou le caractère analytique* des raisonnements n'a pas fait l'objet d'investigations alors qu'elle est importante dans le développement du raisonnement algébrique. En effet, dans le cas de certaines résolutions de problèmes de comparaison (avec ou sans lettres), où la détermination de la valeur de l'inconnue est un enjeu, dans des raisonnements pour trouver l'inconnue, on fait «*comme si*» l'inconnue est connue et, avec des transformations algébriques, on trouve une valeur connue. Ils mettent en évidence la nature analytique du raisonnement. Dans ce type de problème et de raisonnement, l'élève considère l'inconnue «*comme si*» elle était connue pour ensuite l'intégrer dans une équation et la résoudre (Larguier, 2015a, 2015b). Si le raisonnement algébrique est caractérisé, entre autres, par la capacité à se détacher des grandeurs et du contexte (habillage du problème) soit pour opérer sur l'inconnue, soit pour modéliser des relations, soit pour généraliser un phénomène, la résolution de certains problèmes de comparaison contribue au développement de la pensée algébrique par la mise en œuvre du caractère *analytique* et l'utilisation d'outils sémiotiques (tels que les graphiques ou les symboles algébriques) qui permettent la représentation et le calcul algébrique. Nous pourrons formuler comme hypothèse (Hypo 2): *Les activités de résolution de problèmes de comparaison sont des moments de développement de la pensée algébrique et de mise en évidence du caractère analytique des raisonnements*.

La recherche sur laquelle s'appuie cet article avait pour objectif de documenter le développement des raisonnements *analytiques* en première et en deuxième secondaire à l'aide des problèmes de comparaison. Eu égard à tout ce qui précède et aux hypothèses (Hypo 1 et Hypo 2) tirées de nos analyses relatées dans un précédent article (Adihou *et al.*, 2015) sur la mise en question du recours rapide au symbolisme et à la méthode algébrique dans la résolution de problèmes ainsi que le recours très tôt à des activités valorisant le développement de raisonnement analytique, notre postulat est que, *lorsque des problèmes de comparaison déconnectés sont soumis à des élèves qui n'ont pas encore été introduits à l'algèbre formelle ou qui ne maîtrisent pas encore le calcul algébrique (mise en équation, résolution d'équations, etc.), pour résoudre ces problèmes, ces élèves mettent en évidence des raisonnements sophistiqués de nature analytique qui ne peuvent être catégorisés comme étant purement algébriques ou purement arithmétiques*.

Ces *raisonnements sophistiqués de nature analytique* passent inaperçus. Ils ne sont pas exploités ou valorisés par les enseignants alors qu'ils peuvent être d'une grande richesse du point de vue de la pensée mathématique. Il s'avère alors important de se demander: **Quels sont les raisonnements de nature analytique et les stratégies algébriques utilisés par les élèves du premier cycle du secondaire avant et après l'introduction à l'algèbre?** Deux questions spécifiques en découlent:

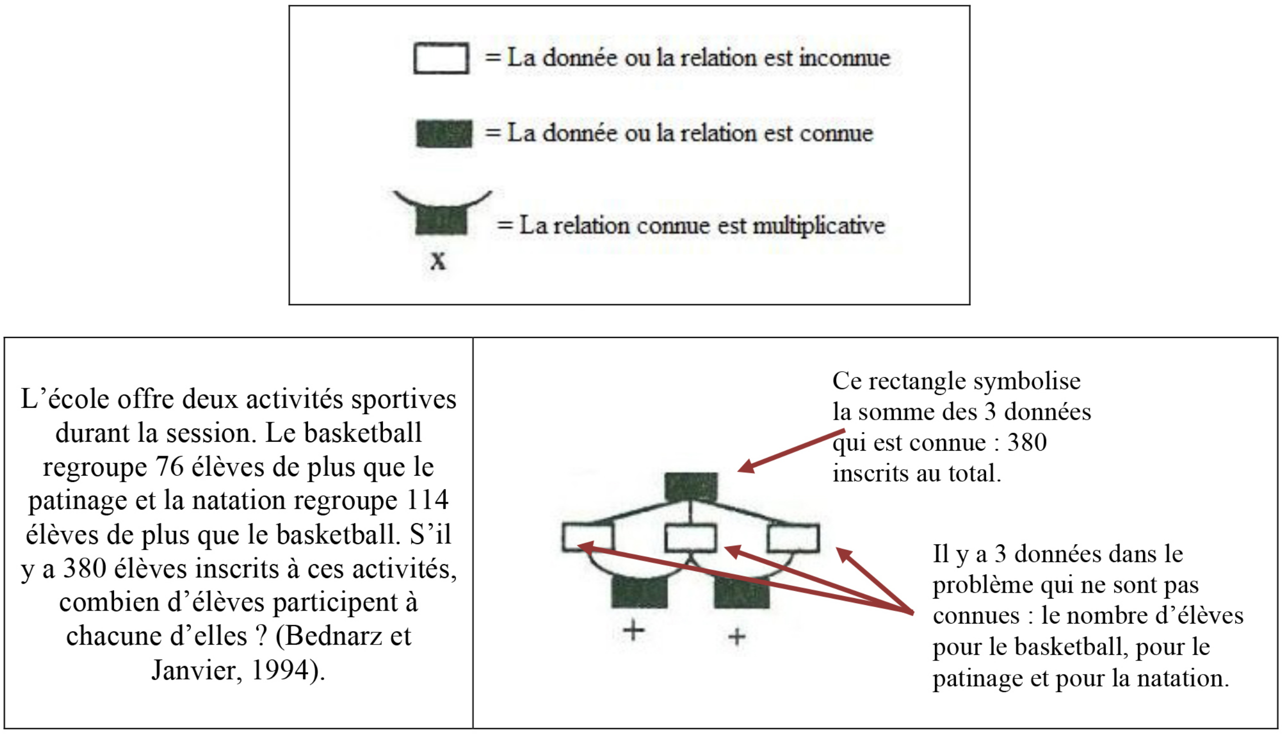
1. *Quels sont les types de raisonnements de nature analytique produits par les élèves de première secondaire sans être initiés au symbolisme?*
2. *Après l'introduction au symbolisme, les élèves réussissent-ils à utiliser des raisonnements analytiques?*

Dans cet article nous présentons une analyse comparative **des raisonnements et des stratégies** utilisés par les élèves de première secondaire et ceux produits par les élèves de deuxième secondaire dans la perspective du développement de la pensée algébrique, en vue de montrer la nécessité de confronter très tôt les élèves au raisonnement *analytique*. Il s'agit d'analyser la **densité** de ces raisonnements en première secondaire et en deuxième secondaire.

4. Éléments méthodologiques

4.1 Échantillon et corpus

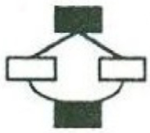
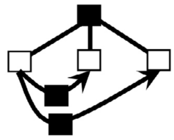
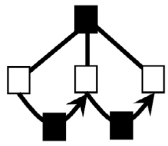
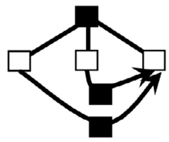
Dans le cadre de cette recherche, les problèmes[2] de comparaison ont été élaborés d'après la grille de Bednarz et Dufour-Janvier (1994). Ces problèmes possèdent des données numériques et des relations de types additif et multiplicatif. Parmi ces problèmes, la recherche d'une inconnue peut être obtenue par des raisonnements arithmétiques ou par la traduction du problème en une équation pouvant être résolue par l'algèbre. La grille de Bednarz et Dufour-Janvier (1994) a aussi été utilisée dans la conception des questionnaires élaborés par Marchand (1998) et par ceux d'Oliveira et Camara (2011). Elle permet d'ailleurs de mettre en évidence les relations dont il est question (voir figures 1, 2.1 et 2.2). Bednarz et Dufour-Janvier (1992) ont classé les problèmes avec des relations de comparaison selon leur complexité et leur structure. Elles considèrent à l'intérieur de chacune des catégories une variable importante: la nature des relations (multiplicative et/ou additive), ainsi que leurs liens. Celle-ci a une influence sur la démarche de résolution et le type de raisonnement. Elle détermine aussi la complexité du problème et permet de dire si celui-ci est de type connecté ou déconnecté. Les figures ci-dessous mettent en évidence les types de relation dans ces problèmes.

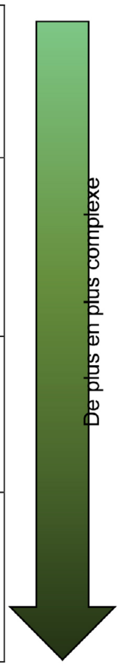


Tiré de Saboya, Besançon, Martin, Adihou, Squalli et Tremblay (2014).

Figure 1. Un exemple de schématisation autour d'un problème de type comparaison

2 Exemple: Luc a 3,50 $ de moins que Michel. Luc double son montant d'argent, tandis que Michel augmente le sien de 1,10 $. Maintenant Luc a 40 sous de moins que Michel. Combien Luc et Michel ont-ils chacun? (Marchand, 1999).

Problèmes à 2 branches	Problèmes avec UNE relation de comparaison (additive ou multiplicative)	
Problèmes à 3 branches	**SOURCE** Les deux relations ont la même donnée comme point de départ.	
	COMPOSITION Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.	
	PUITS Les deux relations ont la même donnée comme point d'arrivée.	



Tiré de Saboya *et al.* (2014).

Figure 2.1. Structures de problèmes

Bien que la nature des relations (multiplicative et/ou additive) ainsi que leurs liens puissent déterminer la complexité du problème et influencer le raisonnement, ces caractérisques n'ont pas été considérées comme des variables pour notre étude. L'objectif de notre étude est centrée sur l'étude de raisonnements analytiques mis en évidence dans la résolution des problèmes déconnectés. Nous supposons que les relations de types additif et multiplicatif sont introduites aux élèves depuis le primaire (Gouvernement du Québec, 2006a, 2006b). Le facteur qui a permis le choix des problèmes est la caractéristique commune des problèmes déconnectés, soit qu'il y ait trois inconnues *à trouver et avec un pont «connu» (la somme des inconnues), entre les inconnues et un autre point «inconnue» qui permet la mise en évidence et la recherche d'un générateur. Seules les relations entre les inconnues sont connues*. Alors que dans le cas des problèmes connectés, il pourrait exister au moins deux ponts «connus» entre les inconnues. Dans ce cas, le générateur n'a plus d'importance et le problème se résout arithmétiquement.

Les relations mises en évidence sont des relations de types multiplicatif ou additif. Les problèmes présentent de façon générale l'enchaînement de quatres couples de relations possibles $((+,+); (+,\times); (\times,+); (\times,\times))((+,+); (+,\times); (\times,+); (\times,\times))$. Leur articulation permet de déterminer s'il s'agit *de problèmes de composition ou d'un problème de transformation*, de type *puits* ou de type *source* (Vergnaud, 1982, 1983, 1998; Bednarz et Dufour-Janvier, 1992, 1994). Ces problèmes déconnectés se prêtent au développement ou au déploiement d'un *raisonnement analytique, c'est-à-dire un raisonnement de type hypothético-déductif.* Ce raisonnement permet de déterminer la valeur d'une inconnue en faisant *comme si* cette valeur existait et en opérant sur elle comme si on opérait sur les nombres connus. À l'aide de ces problèmes déconnectés le raisonnement analytique permet de créer **un générateur** et de raisonner sur ce dernier ou de générer des équations et de les résoudre. Nous en donnons une illustration.

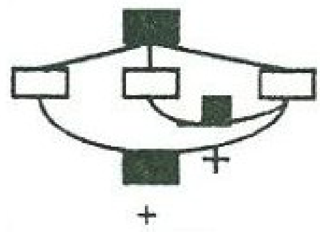
Énoncé du problème	Structure	Illustration
Le camp Vifranc (puits ++) Énoncé: Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles? Réponse: tir à l'arc: 82, canoë: 53, soccer: 180.		Dans ce problème, un pont est «connu», soit 315 (somme des inconnues). Les deux relations additives (+,+) portent sur la même inconnue, le soccer qui est un autre pont «inconnu», en d'autres termes «un pont» autour duquel les relations sont structurées. (Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë.) Ces informations permettent de générer des relations et de trouver un générateur.

Illustration.

Figure 2.2. Structures de problèmes

Le corpus utilisé comprend un questionnaire composé de 12 problèmes de comparaison déconnectés (Annexe 1 : Liste des problèmes avec des relations de comparaison; Annexe 3: Analyse de deux problèmes). Le questionnaire a été soumis à des élèves du premier cycle du secondaire (première et deuxième secondaire) en mai-juin 2012 auprès d'écoles provenant de sept commissions scolaires de différentes régions du Québec et 48 classes de premier cycle de huit écoles secondaires. Les élèves de première secondaire n'ont pas reçu un enseignement sur la résolution de problème par l'algèbre, tandis que ceux du deuxième secondaire en ont reçu un.

Nous analysons 605 copies pour un échantillon de 1 993 résolutions: 863 (43,30 %) résolutions proviennent des élèves de première secondaire et 1 130 (56,70 %) de deuxième secondaire. Nous cherchons établir le caractère *analytique* des raisonnements des élèves.

Tableau 1

Répartition des productions au regard du niveau scolaire

Résolutions	Première secondaire	Deuxième secondaire	Total
Productions analysées	43,30 % (863)	56,70 % (1 130)	100 % (1 993)

4.2 Grille d'analyse

L'analyse est fondée sur la grille d'analyse des raisonnements des élèves dans la résolution de problèmes de partage inéquitable (Squalli *et al.*, 2020). Cette grille propose de catégoriser les raisonnements selon deux dimensions: le caractère d'analycité et la nature du registre sémiotique de résolution. Aux fins de cette recherche, nous ne considérons que la dimension relative au caractère d'analycité. La grille propose trois grandes catégories (voir tableau 2).

- Raisonnements *non analytiques*: ce sont des raisonnements caractéristiques d'une démarche arithmétique de résolution. Pour déterminer les valeurs des inconnues, l'élève opère sur des données et des relations connues, jamais il n'opère sur des inconnues.
- Raisonnements *à tendance analytique*: ce sont des raisonnements qui respectent partiellement les critères d'un raisonnement *analytique* ou qui recourent à un registre de représentation non littéral;
- Raisonnements *analytiques*: ce sont des raisonnements caractéristiques d'une démarche algébrique conventionnelle de résolution. Pour déterminer les inconnues, l'élève considère les inconnues, les représente par des lettres, utilise ces lettres pour représenter les relations et les équations et opère sur elles jusqu'à déterminer les valeurs des inconnues.

Tableau 2

Grille adaptée de Squalli et al. *(2020)*

	Raisonnements *non analytiques*	**Raisonnements *à tendance analytique***	**Raisonnements *analytiques***
Types de raisonnements	• Calcul direct • Essais-erreurs - Ajustement simple - Ajustement raisonné • Raisonnements fonctionnels	• Type fausse-position • Inconnues non représentées explicitement (inconnues muettes) • Inconnues et équations explicites sans opération sur ces représentations	• Registre algébrique conventionnel, sans perte de lien avec le contexte • Registre algébrique conventionnel, avec perte de lien avec le contexte

L'analyse des résolutions s'appuyant sur la grille se trouve à l'annexe 2 (Annexe 2: Analyse des résolutions d'élèves au regard de la grille). Nous définissons dans ce qui suit les différentes sous-catégories de raisonnements composant cette grille.

4.2.1 Classes des raisonnements *non analytiques*

4.2.1.1 Calcul direct

Cette classe de raisonnements regroupe les raisonnements arithmétiques habituels dans le cas de problèmes connectés. L'élève opère sur les données et les relations connues pour trouver la valeur de l'inconnue.

4.2.1.2 Essais-erreurs. Ajustement simple

L'élève donne une valeur spécifique à une des inconnues, génère les valeurs des autres inconnues à l'aide des relations connues. En se basant sur l'écart obtenu entre le nombre total désiré et le nombre total obtenu, il ajuste en conséquence la valeur du nombre de départ sans prise en compte des relations entre les inconnues.

4.2.1.3 Essais-erreurs. Ajustement raisonné

L'élève donne une valeur spécifique à l'une des inconnues, génère les valeurs des autres inconnues à l'aide des relations connues. En se basant sur l'écart obtenu entre le nombre total désiré et le nombre total obtenu, il ajuste en conséquence la valeur du nombre de départ en prenant en compte de manière pertinente les relations entre les inconnues.

4.2.1.4 Raisonnements fonctionnels

L'élève traite les inconnues comme des variables numériques. Il dresse une table de valeurs en donnant à l'une des variables (variable principale) des valeurs numériques spécifiques et génère les valeurs des autres ainsi que leur total. Par induction à partir de cette table de valeurs numériques, il découvre la relation fonctionnelle entre la variable principale et la variable totale. Il déduit alors la valeur de la variable principale correspondante au nombre du problème donnant le total des inconnues. Il déduit ensuite les valeurs des autres inconnues.

4.2.2 Classe des raisonnements *à tendance analytique*

4.2.2.1 Type fausse-position[3]

L'élève donne une valeur spécifique à l'une des inconnues qu'il sait fausse, génère les valeurs des autres inconnues à l'aide des relations connues. En se basant sur l'écart obtenu entre le nombre total désiré et le nombre total obtenu, il ajuste en conséquence la valeur du nombre de départ en prenant en compte de manière pertinente les relations entre les inconnues.

4.2.2.2 Inconnues non représentées explicitement (inconnues muettes)

L'élève raisonne de manière *analytique*. Les traces de son raisonnement montrent tous les calculs numériques à faire pour trouver l'équation et la résoudre, sans que l'inconnue ne soit représentée explicitement.

3 Voir l'exemple de la figure 5.

4.2.2.3 Inconnues et équations explicites sans opération sur ces représentations

L'élève utilise des représentations explicites des inconnues, des relations et de l'équation sans opérer sur ces représentations.

4.2.3 Classe des raisonnements *analytiques*

4.2.3.1 Registre algébrique conventionnel, sans perte de lien avec le contexte

Dans cette classe de raisonnements, l'élève utilise des lettres pour représenter les inconnues, les relations et l'équation. Il opère sur ces représentations sans se détacher du contexte.

4.2.3.2 Registre algébrique conventionnel, avec perte de lien avec le contexte

L'élève utilise des représentations explicites des inconnues, des relations et de l'équation. Il opère sur ces représentations sans se rattacher au contexte.

Cette grille est présentée de manière détaillée dans Squalli *et al.* (2020). Elle est illustrée et exemplifiée sur un problème dans la figure 3.

Soit la résolution suivante:

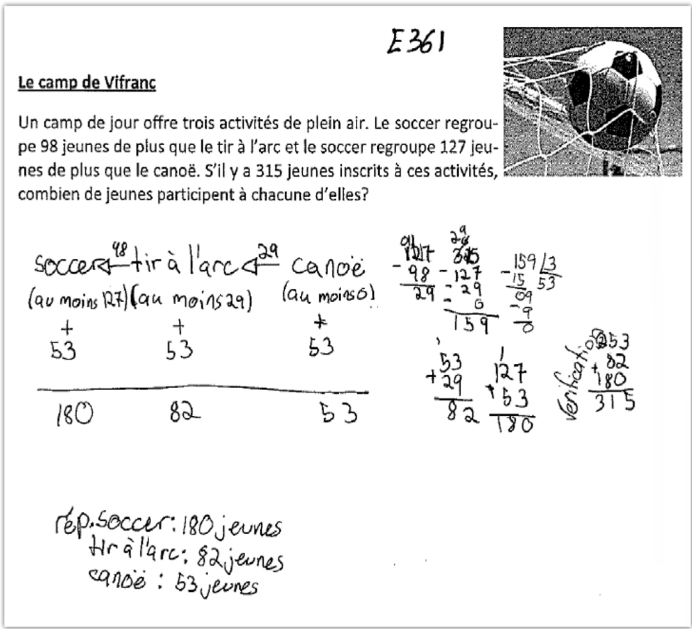
<table>
<tr><th>Description du raisonnement</th><th>Raisonnement produit</th></tr>
<tr><td>L'élève positionne les inconnues. Il écrit les relations entre elles. Il y a 98 jeunes qui pratiquent le soccer de plus que ceux qui pratiquent le tir à l'arc, et de la relation du problème qu'il y a 127 jeunes qui pratiquent le soccer de plus que ceux qui pratiquent le canoë, qu'il y a 29 jeunes qui pratiquent le tir à l'arc de plus que ceux qui pratiquent le canoë. Il utilise des flèches. Cette représentation et son raisonnement lui auraient permis de déduire: si la valeur de l'inconnue canoë est au moins 0 (une sorte de retour à l'origine), alors, la valeur de l'inconnue tir à l'arc est au moins 29 et celle du soccer au moins 127. Si l'on soustrait ces valeurs du total réel de ces trois inconnues (315) on trouve 159. Il manquerait donc 159 au total des trois valeurs initiales des trois inconnues et que ces 159 soient répartis équitablement. Ce qui revient à augmenter ces valeurs de 159 ÷ 3 = 53.</td><td>
E361
Le camp de Vifranc
Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles?
rép. soccer : 180 jeunes
tir à l'arc : 82 jeunes
canoë : 53 jeunes</td></tr>
<tr><th colspan="2">Exemplification sur la base de la grille</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ce raisonnement est un raisonnement à tendance analytique parce qu'il respecte partiellement les critères d'un raisonnement analytique et qui recoure à un registre de représentation non littéral. Il est de type fausse position. En effet, cet élève met en évidence un raisonnement de type hypothético-déductif. Pour déterminer la valeur de l'inconnue, il fait comme s'il y a 0 canoë. Il fait une supposition en ramenant la valeur s'il existait 0 et en opérant sur elle comme si on opérait sur les nombres connus pour déterminer les valeurs du tir à l'arc et du soccer. Il a en fait comparé le canoë au tir à l'arc et au soccer respectivement pour ensuite montrer que les trois sports ont minimalement et équitablement une même valeur.</td></tr>
</table>

Figure 3. Exemple d'illustration de la grille:
cas d'un raisonnement à tendance analytique

5. Analyse des stratégies des élèves: bilan général

Notre objectif est de faire ressortir, à travers les données et leurs analyses, la nature analytique des raisonnements d'élèves, c'est-à-dire les indices de raisonnement arithmétique explicite et implicite, des indices de raisonnement algébrique explicite et implicite, et l'impossibilité, parfois, de déterminer avec certitude s'il s'agit d'un raisonnement arithmétique ou algébrique. Cette analyse nous conduira à la nécessité de distinguer les dimensions arithmétique et algébrique dans le développement de la pensée algébrique. Dans bien des cas, il peut y avoir une tendance à raisonner analytiquement sans l'utilisation du symbolisme algébrique. À ce propos, les recherches montrent qu'il existe une algèbre avant la lettre (Arcavi *et al.*, 1989-1990). Les analyses permettront de mettre en évidence le fait que le caractère du raisonnement algébrique ne dépend pas que des ostensifs.

Pour analyser les données issues des résolutions des élèves, nous orienterons, dans un premier temps, les analyses de façon à positionner les raisonnements selon les niveaux scolaires (première et deuxième secondaire). Nous ferons un regroupement des résolutions selon la réussite ou non-réussite des problèmes. Ensuite, nous répartirons les raisonnements selon les catégories de raisonnements *(synthétiques, à tendance analytique, analytique)* et les types de raisonnements *(calcul direct, type fausse position, registre algébrique conventionnel)*. Cette façon de procéder permettra d'avoir une vue interne relative pour la répartition des données pour chaque catégorie de raisonnements et types de raisonnements. Elle rendra pertinente la comparaison d'une part, entre les niveaux scolaires (première et deuxième secondaire), et d'autre part, entre les catégories de raisonnements et les types de raisonnements.

5.1 Répartition des productions analysées au regard de la réussite et de la non-réussite

Si on se limite au nombre de productions analysées en première secondaire (863), 31,98 % sont réussies et 68,02 % sont non réussies, tandis qu'en deuxième secondaire (1 130), 50,80 % sont réussies et 49,20 % sont non réussies (tableau 3).

Tableau 3

Répartition des productions analysées en première et deuxième secondaire par rapport à la réussite/non-réussite

	Première secondaire	**Deuxième secondaire**
Productions analysées	100 % (863)	100 % (1 130)
Réussies	31,98 % (276)	50,80 % (574)
Non réussies	68,02 % (587)	49,20 % (556)

Les données du tableau 4 montrent qu'il y a plus de résolutions réussies en deuxième secondaire qu'en première secondaire. On pourrait en déduire que cette situation est liée au fait que les élèves de deuxième secondaire ont reçu un enseignement sur l'algèbre.

5.2 Catégories de raisonnements et répartition de ces catégories par niveau scolaire

Tableau 4

Répartition des types d'analyticité (catégorie de raisonnements) en première et deuxième secondaire

Catégorie de raisonnements	Type de raisonnements		Première secondaire 100 % (863)	Deuxième secondaire 100 % (1 130)
Non analytiques	A	*Calcul direct*	60,83 % (525)	7,70 % (87)
	B	*Essais-erreurs sans ajustement*	1,39 % (12)	0,35 % (4)
	C	*Essais numériques avec ajustements*	20,86 % (180)	0,80 % (9)
		Pourcentage de la catégorie par rapport au total de chaque niveau	**83,08 % (717)**	**8,85 % (100)**
À tendance analytique	D	*Type fausse-position*	2,66 % (23)	0 % (0)
	E	*Inconnues ou équations muettes*	12,40 % (107)	2,21 % (25)
	F	Inconnues, relations et équations explicites, sans opérations sur ces représentations	0,93 % (8)	2,74 % (31)
		Pourcentage de la catégorie par rapport au total de chaque niveau	**15,99 % (138)**	**4,95 % (56)**
Analytiques	G	*Inconnues et équations explicites sans perte du lien avec le contexte*	0,13 (1)	0,09 % (1)
	H	*Inconnues et équations explicites avec perte du lien avec le contexte*	0,81 % (7)	86,11 % (973)
		Pourcentage de la catégorie par rapport au total de chaque niveau	**0,93 % (8)**	**86,2 % (974)**

Le tableau 4 met en évidence le fait que 83,08 % des 863 résolutions provenant de première secondaire sont *non analytiques*, 15,99 % sont des raisonnements *à tendance analytique*, et 0,93 % sont des raisonnements *analytiques*. Alors que 8,85 % des 1 130 copies de deuxième secondaire sont *non analytiques*, 4,95 % sont des raisonnements *à tendance analytique*, et 86,2 % sont des raisonnements *analytiques*. Le tableau fait ressortir aussi les raisonnements spécifiques à chaque catégorie de raisonnements.

5.3 Types de raisonnement au regard des catégories de raisonnements et répartition de ces raisonnements par niveau scolaire

5.3.1 Raisonnements *non analytiques*

Les résultats montrent la prépondérance des raisonnements *non analytiques* chez les élèves de première secondaire contrairement au cas des élèves de deuxième secondaire.

En première secondaire, il ressort qu'un peu moins des trois quarts des raisonnements non analytiques sont du type *calcul direct* (73 % = 525/717). Rappelons qu'un raisonnement de ce type est l'archétype d'un raisonnement arithmétique: l'élève arrive à trouver la valeur de l'inconnue en n'opérant que sur des données et des relations connues, jamais il n'opère sur une inconnue. Selon nous, ces résultats s'expliquent, d'une part, par le fait qu'un des problèmes était de nature connecté, sa résolution peut donc être effectuée avec succès au moyen d'un tel raisonnement. D'autre part, ils peuvent aussi s'expliquer par le fait que ces élèves n'aient pas été encore introduits à l'algèbre et leur longue expérience en arithmétique fait en quelque sorte obstacle à la manifestation en actes d'un raisonnement non purement arithmétique. On a en effet constaté qu'un grand nombre de ces élèves a utilisé ce type de raisonnements même dans le cas des problèmes déconnectés. Le calcul écrit les a conduits à des réponses erronées étant donné que ce type de raisonnement est difficile pour les problèmes déconnectés. C'est ce qui explique en partie le pourcentage élevé des résolutions non réussies (68,02 %).

Pour le deuxième secondaire, les résolutions de type non analytique ne représentent que 8,85 %, dont la majorité est de type *calcul direct* (87 %). Les deux catégories de raisonnements de type essais-erreurs ne représentent ensemble que 13 % des raisonnements non analytiques. Les problèmes connectés se prêtent à un raisonnement de type *calcul direct*, ce qui pourrait expliquer le recours à ce type de raisonnement privilégié par la majorité de ces élèves.

Rappelons que contrairement aux élèves de deuxième secondaire, les élèves de première secondaire n'ont pas encore été introduits à l'algèbre. Chez les élèves de deuxième secondaire, on note plutôt la prépondérance de raisonnements de type *analytique* (nous y reviendrons). En cohérence avec une des conclusions de la recherche de Bednarz et Dufour-Janvier (1996), ces élèves auraient de la difficulté à revenir à des résolutions arithmétiques dans le cas des problèmes déconnectés lorsqu'ils maîtrisent les résolutions algébriques.

5.3.2 Raisonnements *à tendance analytique*

Le tableau 4 montre qu'environ 16 % (138 sur 863 soit 15,99 %) des élèves de première secondaire ont produit un raisonnement *à tendance analytique*. Parmi ces raisonnements, plus du trois quarts (77,54 % = 107/138) sont du type: *inconnues ou équations muettes*. Ces raisonnements respectent les caractéristiques d'un raisonnement analytique sauf que la nature du registre de représentation sémiotique utilisé est entièrement numérique. Ne disposant pas encore du registre de représentation algébrique, ces élèves opèrent bien sur les inconnues et sur les relations entre les inconnues, mais les laissent «invisibles». Pour illustrer cette analyse, examinons l'exemple du raisonnement de l'élève E625 dans la résolution du problème «J'aime ou je n'aime plus» (figure 4). Ce problème est déconnecté avec une relation de comparaison additive et une relation de comparaison multiplicative. C'est un problème de type composition de relations.

L'élève multiplie 27 par 5. Le nombre 27 provient de la relation additive de comparaison du nombre d'amis de Carlos à celui de François. Nous comprendrons plus tard le sens du coefficient 5. Il soustrait le résultat 135 du total d'amis et trouve 306 (441 − 135 = 306). Il divise ensuite ce résultat par 6, pour trouver 51. Il en déduit que le nombre d'amis de François est 51 et trouve ensuite les nombres d'amis de Carlos et de Sophie en faisant fonctionner les deux relations connues du problème. Les solutions sont justes.

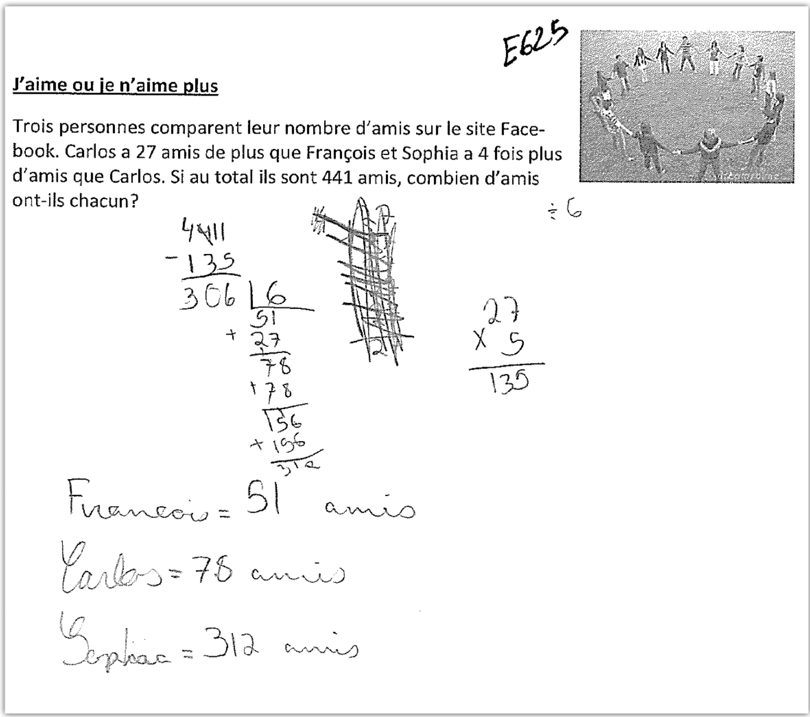
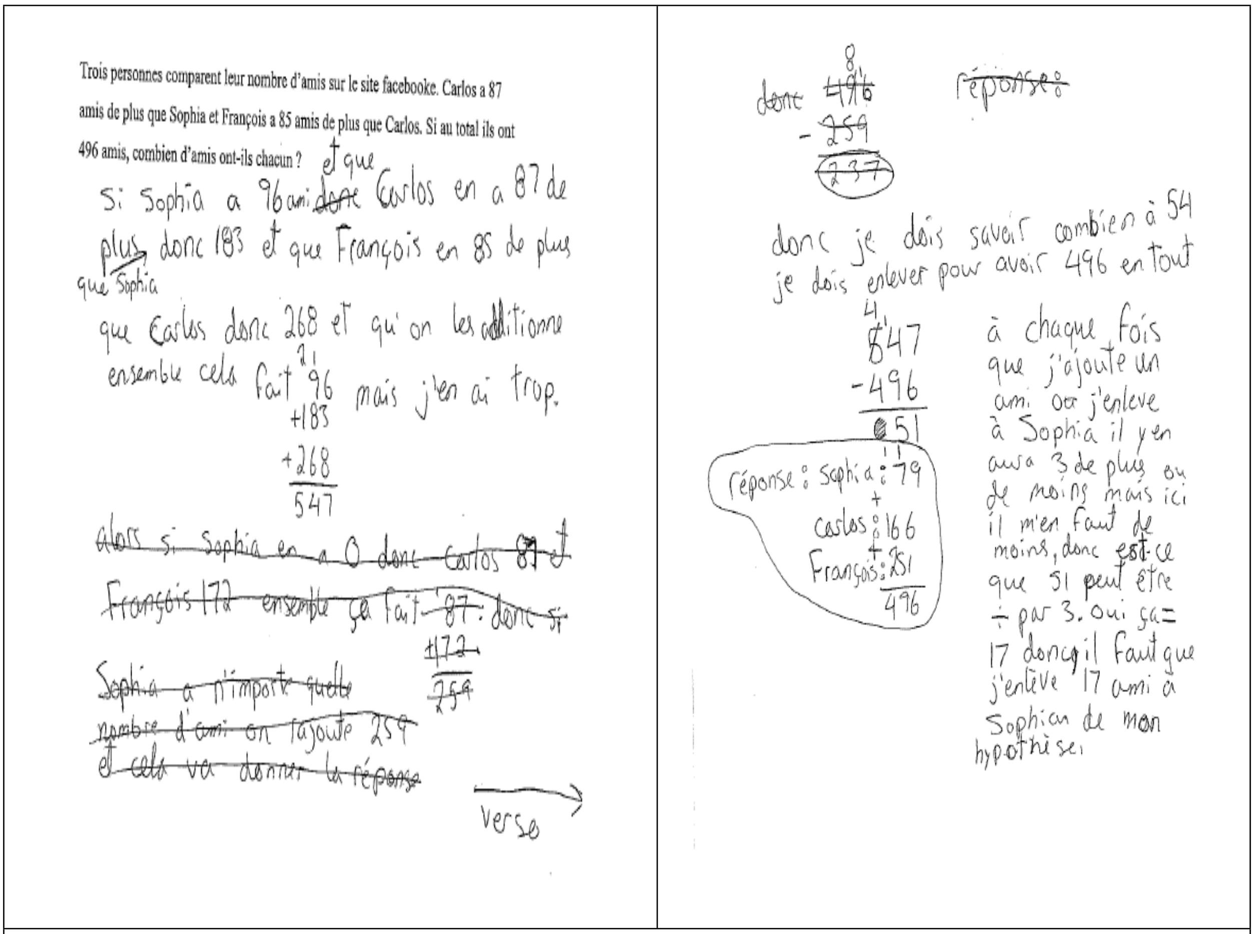


Figure 4. Résolution de l'élève E625

Le registre apparent dans cette production est entièrement numérique. En affectant le résultat de la division de 306 par 6 à la valeur de l'inconnue du nombre d'amis de François (que nous noterons F) cela nous permet de déduire que pour l'élève: $306 = 6F$. En prenant en compte les deux précédentes opérations, on peut conclure que l'élève a résolu à rebours l'équation mathématisant le problème: $6F + 135 = 441$. Pour obtenir cette équation, l'élève a exprimé les deux autres inconnues (C pour Carlos et S pour Sophie) en fonction de F. En effet, Carlos a 27 amis de plus que François, donc: $C = F + 27$. Sophie a 4 fois plus d'amis que Carlos, donc: $S = 4 \times C = 4F + 4 \times 27$. Le total des amis des trois personnes est donc: F + C + S = F + (F + 27) + 4F + 4 x 27 = 6F + 5 x 27. Dans cette résolution, les inconnues et les relations ne sont pas représentées explicitement, bien que le raisonnement soit de nature analytique.

Par ailleurs, le tableau 4 révèle aussi que 16,67 % de ces élèves (23 sur les 138) ont utilisé un raisonnement de type *fausse-position*. Bien que ce pourcentage soit relativement faible, ce résultat reste remarquable compte tenu de la puissance d'un tel raisonnement. Examinons à titre d'exemple la résolution d'un élève à un problème semblable, mais dont les relations sont uniquement additives.



L'élève suppose que Sophie possède 96 amis. Il fait fonctionner les relations connues et calcule les valeurs des deux autres inconnues. Il additionne les trois valeurs pour trouver le total 547. De ce total, il soustrait le total réel et trouve qu'il a obtenu 51 de trop. Il effectue un raisonnement et comprend que pour corriger l'erreur de la valeur supposée de Sophie (son hypothèse de départ), il doit lui soustraire le tiers de 51, soit 17. Il calcule alors la valeur de Sophie et en déduit les valeurs des deux autres inconnues.

Figure 5. Résolution de l'élève E343

L'élève E343 (figure 5) fait l'hypothèse que Sophie a 96 amis, mais il sait que cette valeur est fausse. Cette hypothèse provoque une erreur, mais il la rectifie grâce à une compréhension de la relation entre la variable Sophie et la donnée nombre total. Nous sommes donc dans le schéma d'un raisonnement de type hypothético-déductif, non dans celui d'essais-erreurs (voir la différence entre un raisonnement *essais-erreurs, ajustement raisonné* au point 4.2.1.3 et un raisonnement de type *fausse position* au point 4.2.2.1).

Le tableau 4 montre un autre résultat remarquable: très peu d'élèves de deuxième secondaire ont produit un raisonnement *à tendance analytique* (moins de 5 %) et aucun n'a produit pour ce type de problème (*problèmes à 3 branches type composition* + +, figure 2.1) un raisonnement de type *fausse position*! Pourtant, ces deux types de raisonnements, de par leur puissance, nécessiteraient une certaine maturité mathématique que l'on s'attendrait à trouver chez des élèves de deuxième secondaire plutôt que chez ceux de première secondaire. L'explication tiendrait encore une fois au fait que les élèves de première secondaire n'ont pas reçu un enseignement sur les résolutions algébriques des problèmes déconnectés, d'où l'absence de représentation formelle. En étant confrontés à ce type de problèmes (*problèmes à 3 branches type composition* $((+,+);(+,\times);(\times,+);(\times,\times))$, figure 2.1), qui ne peuvent être résolus avec succès au moyen de calculs directs, ils ont tendance à raisonner analytiquement. Certains de ces élèves arrivent à développer des activités mathématiques riches et à produire en actes des raisonnements puissants et sophistiqués. En revanche, le fait que les élèves de deuxième secondaire aient été initiés à la démarche algébrique conventionnelle de résolution *(raisonnement analytique)*, son efficacité les amène à l'utiliser, surtout qu'ils l'ont appris.

5.3.3 Raisonnements *analytiques*

Sans surprise, le pourcentage des raisonnements analytiques des élèves de première secondaire est négligeable (moins de 1 %) alors qu'il est de plus de 86 % en deuxième secondaire. Les raisonnements de deuxième secondaire sont presque tous des raisonnements algébriques conventionnels (type *inconnues et équations explicites avec perte du lien avec le contexte*). Toutefois, bien que les élèves de deuxième secondaire aient utilisé presque tous un raisonnement *analytique*, presque la moitié d'entre eux ne l'a pas utilisé de manière efficace. En effet, 86,2 % (974) des raisonnements analysés sont de type *analytique* alors que seulement 50,80 % soit 574 des raisonnements ont mené à une résolution réussie.

6. Discussion et conclusion

La nature des relations (multiplicative et/ou additive), ainsi que leurs liens, sont des paramètres qui permettent de déterminer la complexité du problème et d'influencer le raisonnement. Ces paramètres n'ont pas été retenus dans nos analyses comme des variables notre étude. *Elles n'ont pas été positionnées explicitement. Toutefois elles sont utilisées (du moins implicitement). Il serait pertinent de les considérer pour une nouvelle analys*e.

Par ailleurs, l'opérationnalisation de la grille d'analyse dans l'analyse comparative des résolutions de première secondaire et de deuxième secondaire nous a fourni des informations intéressantes. Cette grille, présentée dans Squalli, Bronner, Larguier et Adihou (2020), repose sur une analyse fine du caractère *analytique* des raisonnements.

De façon générale, nos résultats montrent que les élèves de première secondaire de notre échantillon ont majoritairement produit des raisonnements *non analytiques* et une majorité d'élèves de deuxième secondaire ont produit des raisonnements *analytiques*. Ces résultats sont en cohérence avec l'approche privilégiée par le programme de formation de l'école québécoise: enseignement secondaire pour l'entrée en algèbre au premier cycle du secondaire.

Comme nous l'avions évoqué au début de l'article, plusieurs recherches se sont penchées sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre. Les conclusions de ces recherches montrent que certains problèmes choisis n'aident pas les élèves à voir la pertinence d'un passage d'un mode de raisonnement arithmétique à un mode de raisonnement algébrique (Marchand, 1988; Bednarz et Dufour-Janvier, 1994; Coulange, 2000, 2001).

Nous avons adopté une autre orientation dans notre étude, celle d'étudier le caractère analytique des raisonnements des élèves de première et deuxième secondaire avec des problèmes de comparaison. En effet, le raisonnement algébrique se distingue du raisonnement arithmétique par son caractère analytique. Le développement du raisonnement analytique est donc au cœur du développement du raisonnement algébrique. Le raisonnement analytique nécessite le recours à un registre symbolique de représentation pour représenter les inconnues, les relations entre les inconnues et les données connues ainsi que d'opérer sur ces représentations. Or, l'utilisation de lettres n'est pas un critère primordial dans un raisonnement analytique (Arcavi *et al.*, 1989-1990). Notre analyse montre le caractère analytique de certains raisonnements sans le recours au symbolisme. Il ressort que la prépondérance des raisonnements de type *non analytique* en première secondaire démontre les limites d'une approche transition arithmétique-algèbre (de faire l'arithmétique et après l'algèbre), et que si les élèves étaient confrontés plus tôt aux problèmes déconnectés, ils auraient eu l'opportunité de sophistiquer leur raisonnement arithmétique en développant des raisonnements *à tendance analytique*. C'est ce que démontre cette recherche.

Cependant, notre recherche montre que la manifestation des raisonnements de type sophistiqués comme le raisonnement de type *fausse-position* reste fragile. Ce type de raisonnement apparaît en première secondaire chez une petite proportion des élèves (ne pouvant utiliser le calcul direct et un raisonnement algébrique), mais disparaît complètement en deuxième secondaire. Ainsi, quand on confronte les élèves à des problèmes algébriques (déconnectés) avant l'introduction de l'algèbre, ils peuvent produire ces raisonnements *à tendance analytique*. Cependant, ces élèves les délaissent dès l'introduction de l'algèbre formelle. En effet, le problème souligné ici n'est pas dans la disparition du raisonnement de type *fausse-position* suite à l'introduction de la méthode algébrique conventionnelle. Si l'on veut que les élèves développent ce type de raisonnement et d'autres raisonnements *à tendance analytique*, il faut les confronter avec des problèmes déconnectés plus tôt, c'est-à-dire dès le primaire très tôt avant l'introduction de l'algèbre formelle. Ainsi, il serait laissé aux élèves le temps de développer des raisonnements sophistiqués, de les intégrer dans leur pratique mathématique et les faire évoluer, étant donné l'intérêt de ces raisonnements pour le développement de leur pensée mathématique. Cette recherche montre donc la pertinence d'une perspective curriculaire du type *Early Algebra*, en ce sens que 15,99 % des élèves de première secondaire ont produit des raisonnements *à tendance analytique*, mais dans un registre numérique. À ce titre, la confrontation des élèves à la résolution de problèmes algébriques (problèmes déconnectés) avant l'introduction de l'algèbre leur a permis de mettre en évidence des raisonnements *à tendance analytique.* Le développement de la pensée algébrique de ces élèves dans le contexte de la résolution de problèmes est suffisamment avancé pour qu'ils soient introduits à l'algèbre formelle. Nous faisons l'hypothèse que ces élèves vont donner un sens au calcul algébrique littéral une fois introduit.

Enfin, la recherche confirme les résultats de Bednarz et Dufour-Janvier (1994) au fait que l'introduction à la méthode algébrique conventionnelle de résolution fait obstacle à la manifestation d'autres types de raisonnements. En effet 86,2 % des raisonnements de deuxième secondaire sont du type *analytique* et parmi ces raisonnements, 973 sur 974 (99,90 %) sont du type *inconnues et équations explicites avec perte du lien avec le contexte*. Toutefois, nous avons remarqué que, bien que les élèves de deuxième secondaire aient utilisé presque tous un raisonnement *analytique*, seulement 50,80 % soit 574 des raisonnements ont mené à une résolution réussie. Le développement de la pensée algébrique plus tôt pourrait contribuer à la réussite de ces problèmes. Ainsi, l'introduction de l'algèbre dans une perspective de transition arithmétique-algèbre est à questionner.

En effet, notre recherche montre que le caractère analytique des raisonnements avant l'initiation à l'algèbre contribue au développement de la pensée algébrique et à la mise en place du symbolisme. Réciproquement, le symbolisme facilite le raisonnement analytique. À ce propos, elle autorise à se demander si en introduisant très tôt (dès le primaire) des activités qui convoquent des raisonnements *analytiques* (comme des problèmes déconnectés) les élèves n'auraient-ils pas à y gagner.

Notre hypothèse est qu'en mettant l'élève au contact de ces problèmes très tôt et ne pas attendre la deuxième secondaire contribuera au développement de la pensée mathématique et plus spécifiquement de la pensée algébrique. Ceci serait aussi cohérent avec les visées du programme québécois et participerait au développement de la pensée algébrique. Il serait alors pertinent de regarder de plus près le type et la nature des raisonnements que les élèves utilisent dans ce nouveau contexte.

Références

Adihou, A., Squalli, H., Saboya, M., Tremblay, M. et Lapointe, A. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Acte du colloque EMF 2015* (p. 206-219). Alger: Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene-Société mathématique d'Algérie.

Arcavi, A., Friedlander, A. et Hershkowitz, R. (1989-1990). L'algèbre avant la lettre. *Petit x*, *24*, 61-71.

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Dans *Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992: didactique des mathématiques, formation normale des enseignants* (p. 21-40). Marrakech: École normale supérieure Marrakech.

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: A problem analysis. In J. da Ponte et J. Matos (dir.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. II (p. 64-71). Lisbonne: Université de Lisbonne.

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1996). Emergence and development of Algebra as a problem solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (p. 115-136). Dordrecht: Kluwer.

Câmara, M. et Oliveira, I. (2010). Estratégias e registros utilizados por alunos de 6º ano na resoluçao de problemas de estrutura algébrica. Dans *X Encontro Nacional de Educaçao Matemática, Educaçao Matemática, Cultura e Diversidade*. Salvador, Brésil.

Chevallard, Y. (1989a). *Arithmétique, algèbre, modélisation: étapes d'une recherche*, n° 16. Marseille: IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques. Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x*, *19*, 43-79.

Chevallard, Y. (1989-1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, *23*, 5-38.

Coulange, L. (1997-1998). Les problèmes «concrets à mettre en équation» dans l'enseignement. *Petit x*, *47*, 33-58.

Coulange, L. (2000). *Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes linéaires et de la mise en équation*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourrier-Grenoble 1, Grenoble, France.

Coulange, L. (2001). Activité du professeur dans l'enseignement des systèmes d'équations en classe de troisième. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(3).

Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L. et Robert, A. (2012) (dir.). Enseignement de l'algèbre élémentaire, bilan et perspectives. *Recherches en didactique des mathématiques*, numéro spécial hors-série.

Cordier, N. (1993). Les problèmes de mise en équation en 3ème et en 2nde. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 149-176.

Denis, C. (1997). *Une introduction de l'algèbre en secondaire 3: généralisation et construction de formule*. Mémoire de maîtrise en enseignement des mathématiques. Université du Québec à Montréal, Montréal, Canada.

Filloy, E. et Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought. *Proceedings of PME-NA*, *6*, 51-56.

Filloy, E. et Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Gouvernement du Québec (2006a). Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle: version approuvée. Québec: Gouvernement du Québec.

Gouvernement du Québec (2006b). Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire. Enseignement primaire, version approuvée. Québec: Gouvernement du Québec.

Larguier, M. (2015a). Première rencontre avec l'algèbre. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Acte du colloque EMF 2015*, 313-333.

Larguier, M. (2015b). Premiers pas vers l'algèbre au collège. Communication au colloque scientifique de l'Observatoire international de la pensée algébrique (OIPA), 10 au 12 juin 2015, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada.

Marchand, P. (1998). *Résolution de problèmes en algèbre au secondaire: analyse de deux approches et des raisonnements des élèves.* Mémoire de maîtrise en mathématiques, option enseignement. Université du Québec à Montréal, Montréal, Canada.

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, *XXXIX*(4), 30-42.

Marchand, P. et Bednarz, N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes: résolution des élèves. *Bulletin de l'Association des mathématiques du Québec*, *XL*(4), 15-24.

Mary, C. et Squalli, H. (2014). Activité de généralisation et de justification chez des élèves en difficulté. Dans Mary, C., Squalli, H., DeBlois, L. et Theis, L. (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques: regard didactique* (p. 163-186). Québec, QC: Presses de l'Université du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec (1993-1994). Programme d'études, secondaire, mathématique 116, 216.

Oliveira, I. et Rhéaume, S. (2014). Comment s'y prennent-ils? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l'algèbre. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *14*(4), 404-423.

Oliveira, I. et Camâra, M. (2011). Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brésil.

Saboya, M., Besançon, V., Martin, F., Adihou, A., Squalli, H. et Tremblay, M., (2014). Résolution de problèmes écrits au moment de l'introduction de l'algèbre: analyse de productions d'élèves au premier cycle du secondaire (1re et 2e secondaire). Dans *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques (GDM 2013)* (p. 112-121). Val d'Or, Canada.

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base.* Thèse de doctorat. Université Laval, Québec, Canada.

Squalli, H. (2002). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire: un exemple de raisonnement à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques*, *39*, 4-13.

Squalli, H. (2003). *Tout, tout, tout, vous saurez tout sur l'algèbre*, Coll. «Mathèse». Montréal: Éditions Bande didactique.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis L. (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Acte du colloque EMF 2015* (p. 346-356). Alger: Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene-Société mathématique d'Algérie.

Squalli, H., Bronner, A., Larguier, M. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *22*(1), 36-62.

Squalli, H., Theis, L., Ducharmes-Rivard, A. et Cotnoir, G. (2007). Finalités et approches d'enseignement-apprentissage de l'algèbre dans les manuels du premier cycle du secondaireau Québec. CD-Rom des actes du colloque de International Organisation of Science and technology Education: Critical Analysis of Science Texbooks.

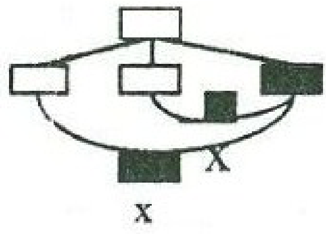
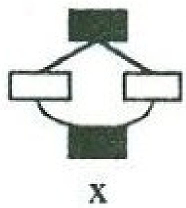
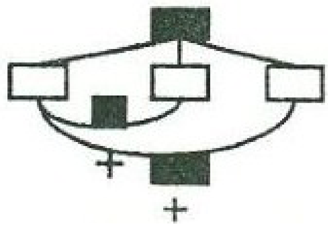
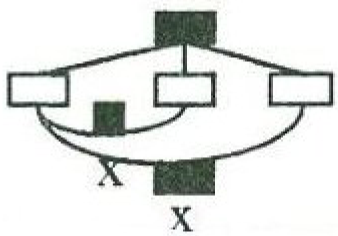
Van Doreen, W., Verschaffel, L. et Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategie for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 319-351.

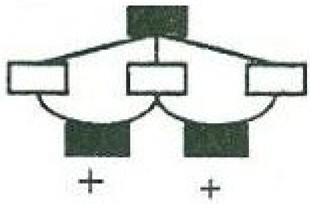
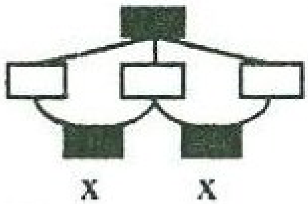
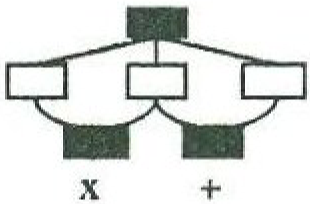
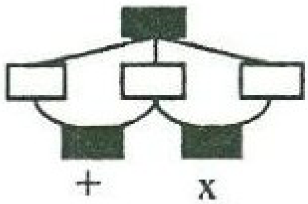
Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problem. In T. P. Carpenter, J. M. Moser et T. A. Romberg (dir.), *Addition and Subtraction. A Cognitive Perspective* (p. 39-59). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

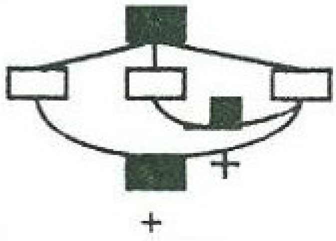
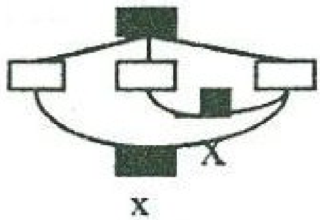
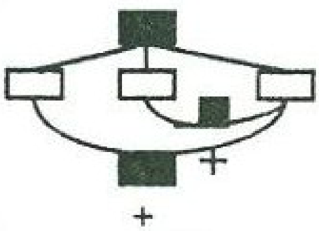
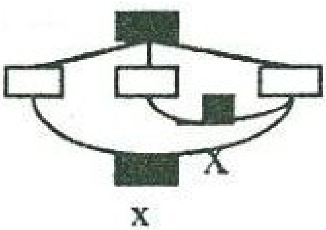
Vergnaud, G. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. Dans *Actes du Colloque de Sèvres: Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (p. 259-288). Grenoble: La pensée sauvage.

Vergnaud, G., Cortes, A. et Favre-Artigue, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. Dans G. Vergnaud, G. Brousseau et M. Hulin (dir.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (p. 259-279). Grenoble: La pensée sauvage.

Annexe 1: Liste des problèmes avec des relations de comparaison

Nombre	Énoncé	Structure	Description
1 problème arithmétique	*Le camp Marbes (arithmétique)* Énoncé: Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le canoë regroupe 4 fois plus de jeunes que le soccer et 7 fois plus de jeunes que le tir à l'arc. S'il y a 252 jeunes inscrits au canoë, combien de jeunes au total participent aux activités? Réponse: tir à l'arc: 36, soccer: 63, total: 351.		Comme Marchand, nous avons choisi un problème de type arithmétique. Un problème est dit «arithmétique» s'il est connecté (on connaît une donnée et une relation la mettant en jeu). On peut déduire toutes les autres données sans avoir recours à des raisonnements algébriques. Ce problème va permettre de relever l'engagement des élèves: utilisent-ils un raisonnement arithmétique?
1 problème à 2 branches	*Le camp Torois (2 branches X)* Énoncé: Un camp de jour offre deux activités de plein air. Le soccer regroupe 3 fois plus de jeunes que le tir à l'arc. S'il y a 212 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles? Réponse: soccer: 159, tir à l'arc: 53.		Ce type de problème n'est pas présent dans l'étude de Bednarz et Dufour-Janvier. Marchand l'introduit pour vérifier son hypothèse sur l'influence du nombre de liens dans la complexité des problèmes. Le problème que nous avons choisi possède une relation de comparaison multiplicative.
2 problèmes à 3 branches type source	*Le dépanneur Lève-tôt (source ++)* Énoncé: Martin fait l'inventaire de trois produits de son dépanneur. Il compte 22 produits laitiers de plus que de produits céréaliers et il compte 201 produits en conserve de plus que de produits céréaliers. S'il y a 460 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type? Réponse: céréaliers: 79, laitiers: 111, conserve: 280.		Dans ce type de problème, les deux relations ont la même donnée comme point de départ. Si on regarde l'enchaînement des relations, il y a 4 cas possibles: $((+,+);(+,\times);(\times,+);(\times,\times))$ Nous avons choisi les enchaînements (+,+) et (x,x). Des exemples de problèmes qui mettent en évidence ces relations sont proposés dans les lignes ci-dessous.
	Le dépanneur Douze mois (source XX) Énoncé: Martin fait l'inventaire de trois produits de son dépanneur. Il compte 5 fois plus de produits laitiers que de produits céréaliers et il compte 3 fois plus de produits en conserve que de produits céréaliers. S'il y a 441 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type? Réponse: céréaliers: 49, laitiers: 245, conserve: 147.		

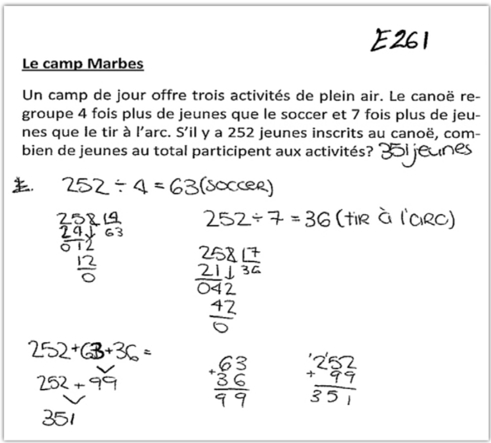
4 problèmes à 3 branches type composition	*J'ai plein d'amis (composition ++)* Énoncé: Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site «facebouille». Carlos a 87 amis de plus que Sophia et François a 85 amis de plus que Carlos. Si au total ils sont 496 amis, combien d'amis ont-ils chacun? Réponse: Sophia: 79, Carlos: 166, François: 251.		Dans ce type de problèmes, une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre relation. Si on regarde l'enchaînement des relations, il y a 4 cas possibles: $((+,+);(+,\times);(\times,+);(\times,\times))^{\cdot}$
	Amis virtuels (composition XX) Énoncé: Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site «facebouille». François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François. Si au total ils sont 494 amis, combien d'amis ont-ils chacun? Réponse: Sophia: 380, Carlos: 38, François: 76.		
	Le réseau social (composition X+) Énoncé: Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site «facebouille». Sophie a 3 fois plus d'amis que Carlos et François a 114 amis de plus que Sophia. Si au total ils sont 380 amis, combien d'amis ont-ils chacun? Réponse: Sophia: 114, Carlos: 38, François: 228.		
	J'aime ou je n'aime plus (composition +X) Énoncé: Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site «facebouille». Carlos a 27 amis de plus que François et Sophia a 4 fois plus d'amis de plus que Carlos. Si au total ils sont 441 amis, combien d'amis ont-ils chacun? Réponse: Sophia: 312, Carlos: 78, François: 51.		

2 problèmes à 3 branches type puits	*Le dépanneur du coin (puits ++)* Énoncé: Martin fait l'inventaire de trois produits de son dépanneur. Il compte 46 produits laitiers de plus que de produits céréaliers et 194 de plus que de produits en conserve. S'il y a 483 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type? Réponse: céréaliers: 241, laitiers: 195, conserve: 47.		Dans ce type de problèmes, les deux relations ont la même donnée comme point d'arrivée. Comme pour les autres problèmes à 3 branches, les différents enchaînements possibles des relations sont: $((+,+);(+,\times);(\times,+);(\times,\times))$ Nous avons souhaité vérifier une hypothèse: est-ce que le fait de répéter ou non le générateur dans l'énoncé du problème a une influence sur la complexité du problème? Ici, nous nous attaquons à une question de compréhension de la langue française. D'après nous, le premier problème ci-dessous (puits sans répétition) est plus compliqué pour un élève que le deuxième problème (puits avec répétition). La difficulté réside dans le premier problème, à savoir s'il y a 194 produits céréaliers ou produits laitiers de plus que de produits en conserve. Ce doute n'est pas présent dans la deuxième formulation.
	Pétro-Québec (puits XX) Énoncé: Martin fait l'inventaire de trois produits de son dépanneur. Il compte 7 fois plus de produits en conserve que de produits laitiers et 4 fois plus que de produits céréaliers. S'il y a 429 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type? Réponse: céréaliers: 77, laitiers: 44, conserve: 308.		
2 problèmes à 3 branches avec et sans répétition	*Le camp Vifranc (puits ++ avec répétition)* Énoncé: Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles? Réponse: tir à l'arc: 82, canoë: 53, soccer: 180.		
	Le camp Tinçon (composition XX sans répétition) Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 4 fois plus de jeunes que le canoë qui regroupe 3 fois plus de jeunes que le tir à l'arc. S'il y a 336 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles? Réponse: tir à l'arc: 21, canoë: 63, soccer: 252.		

Annexe 2: Analyse des résolutions d'élèves au regard de la grille

Raisonnements de type non analytique

Calcul direct

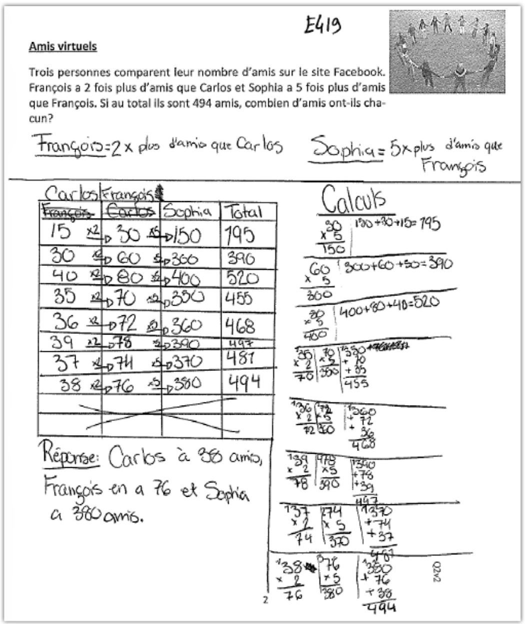


- Le problème est un problème connecté de type puits* (Marchand et Bednarz, 1999).

- L'élève calcule les valeurs des deux inconnues nombre de jeunes inscrits au soccer et nombre de jeunes inscrits au tir à l'arc en utilisant les relations connues entre ces deux inconnues et le nombre connu de jeunes inscrits au canoë (252). Il déduit alors le total des jeunes inscrits aux trois activités. Le registre utilisé est le registre numérique.

* Pour désigner la nature de l'enchaînement des relations dans des problèmes de partage inéquitable, Marchand et Bednarz (1999) distinguent trois types de problèmes: source, composition de relation et puits. Un problème est de type source si les différentes grandeurs inconnues peuvent être générées directement par une même inconnue. Un problème est de type puits si une des inconnues peut être générée à partir des autres inconnues. Finalement, un problème est de type composition de relations si une des inconnues est générée par une composition des relations entre les inconnues.

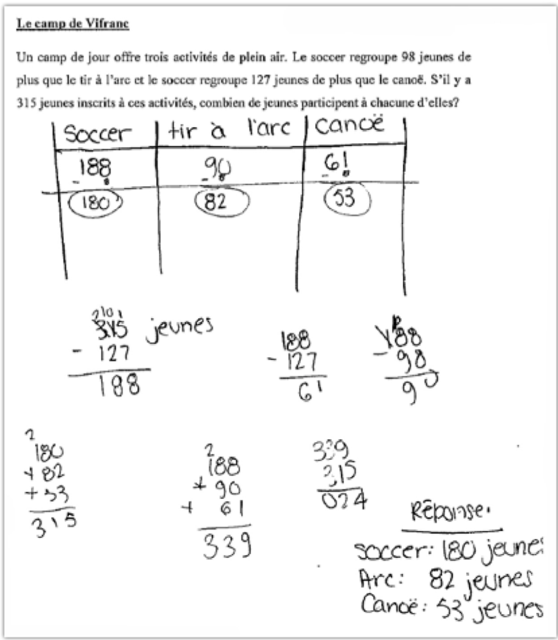
Raisonnements de type essais-erreurs avec ajustement simple



- Le problème est déconnecté, de type composition de deux relations multiplicatives.

- L'élève écrit les relations entre les inconnues, organise ses essais au moyen d'une table de valeurs. Il ordonne ses inconnues de la plus petite à la plus grande (après un premier essai non fructueux). Il donne une valeur à l'inconnue relative à Carlos (15), génère celle relative à François (30) et ensuite celle relative à Sophia (150). Il obtient un total (195) inférieur à celui désiré (494). Il reprend cette procédure, en ajustant la valeur de l'inconnue relative à Carlos jusqu'à ce qu'il réussisse à obtenir le total désiré 494.

Essais-erreurs avec ajustement raisonné



Le camp de Vifranc

Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles?

Soccer	tir à l'arc	canoë
188	90	61
180	82	53

315 jeunes − 127 = 188

188 − 127 = 61

188 − 98 = 90

180 + 82 + 53 = 315

188 + 90 + 61 = 339

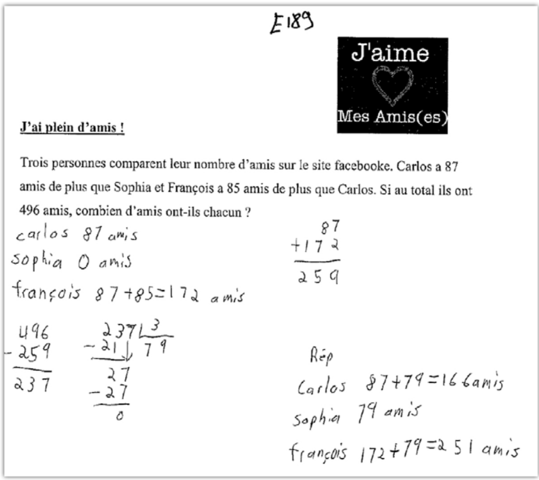
339 − 315 = 024

Réponse:
Soccer: 180 jeunes
Arc: 82 jeunes
Canoë: 53 jeunes

- Ce problème est déconnecté de type puits. Les relations sont des relations de comparaison additives.
- L'élève commence par opérer sur les nombres donnés en effectuant 315 – 127 et il essaie la valeur trouvée 188 comme valeur de l'inconnue en lien avec le soccer. À l'aide de cette valeur et des relations précisées dans le problème, il calcule ensuite les valeurs des deux autres inconnues (90 pour le tir à l'arc et 61 pour le canoë) ainsi que le total des trois nombres obtenus (339). Il calcule la différence entre le total obtenu et le total désiré: 339 – 315 = 24. Pour ajuster les valeurs des trois inconnues, il réduit chacune des valeurs du tiers de 24 soit 8. Il vérifie alors que le total des trois nombres obtenus (180, 82 et 53) est bien 315.

Raisonnements à tendance analytique

Raisonnements de type fausse position, registre numérique



E189

J'ai plein d'amis !

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site facebooke. Carlos a 87 amis de plus que Sophia et François a 85 amis de plus que Carlos. Si au total ils ont 496 amis, combien d'amis ont-ils chacun ?

carlos 87 amis
sophia 0 amis
françois 87 + 85 = 172 amis

87 + 172 = 259

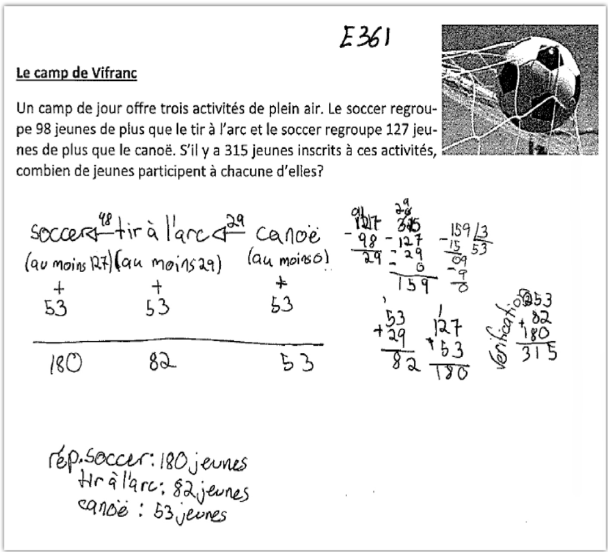
496 − 259 = 237

237 ÷ 3 = 79

Rép
Carlos 87 + 79 = 166 amis
Sophia 79 amis
françois 172 + 79 = 251 amis

- Le problème est déconnecté, de type composition de deux relations, ces relations étant des relations de comparaisons additives.
- L'élève identifie et nomme les trois inconnues par les noms des personnes. Il comprend que l'inconnue Sophia a la plus petite valeur. Il lui affecte la valeur 0 et génère les valeurs des deux autres inconnues à partir des relations. Il calcule le total des trois valeurs et obtient 259. Il soustrait cette valeur du total des amis des trois personnes: 496 – 259 = 237. Il divise le résultat par trois: 237 ÷ 3 = 79. Il ajuste les trois valeurs initiales des trois inconnues en leur ajoutant 79.

Raisonnements de type fausse position, registre intermédiaire



E361

Le camp de Vifranc

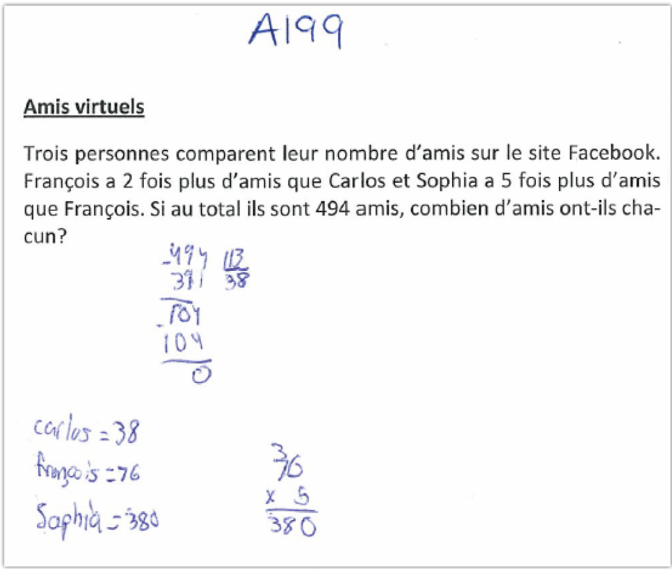
Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles?

soccer →98 tir à l'arc →29 canoë
(au moins 127) (au moins 29) (au moins 0)
+ 53 + 53 + 53
180 82 53

rép. soccer : 180 jeunes
tir à l'arc : 82 jeunes
canoë : 53 jeunes

- L'élève ordonne les inconnues de la plus grande à la plus petite, réécrit les relations entre les inconnues successives, en les schématisant par des flèches; en s'appuyant sur cette représentation son raisonnement aurait alors été le suivant: la valeur de l'inconnue canoë est au moins 0. Il s'ensuit que la valeur de l'inconnue ***tir à l'arc*** est au moins 29 et celle du ***soccer*** au moins 127. Si l'on soustrait ces valeurs du total réel de ces trois inconnues (315) on trouve 159. Il manquerait donc 159 au total des trois valeurs initiales des trois inconnues. Pour maintenir vraies les relations schématisées par les flèches, il faut répartir équitablement ce manque sur les trois valeurs initiales. Ce qui revient à augmenter ces valeurs de 159 ÷ 3 = 53.

Raisonnements à tendance analytique, inconnues non représentées explicitement, registre numérique



A199

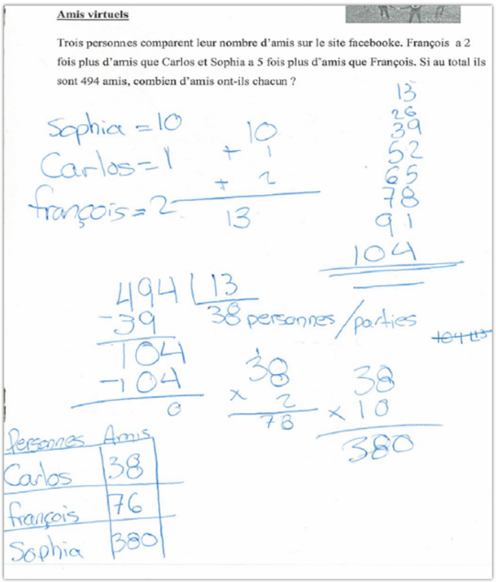
Amis virtuels

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site Facebook. François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François. Si au total ils sont 494 amis, combien d'amis ont-ils chacun?

carlos = 38
françois = 76
Sophia = 380

- La division du nombre total d'amis par 13 et l'affectation du résultat de cette division au nombre d'amis de Carlos montrent que l'élève saisit bien l'équation du problème: le nombre total d'amis est 13 fois le nombre d'amis de Carlos. Cette équation découle d'une bonne interprétation des relations entre les trois inconnues: si Sophia a 5 fois plus d'amis que François et que ce dernier a 2 fois plus d'amis que Carlos, alors Sophia a 10 fois plus d'amis que Carlos. Le total des amis des trois personnes est donc 13 fois celui de Carlos.

Raisonnements à tendance analytique, inconnue intermédiaire, registre numérique



Amis virtuels

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site facebooke. François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François. Si au total ils sont 494 amis, combien d'amis ont-ils chacun ?

Sophia = 10
Carlos = 1
françois = 2

10 + 1 + 2 = 13

13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104

494 ÷ 13 = 38 personnes / parties

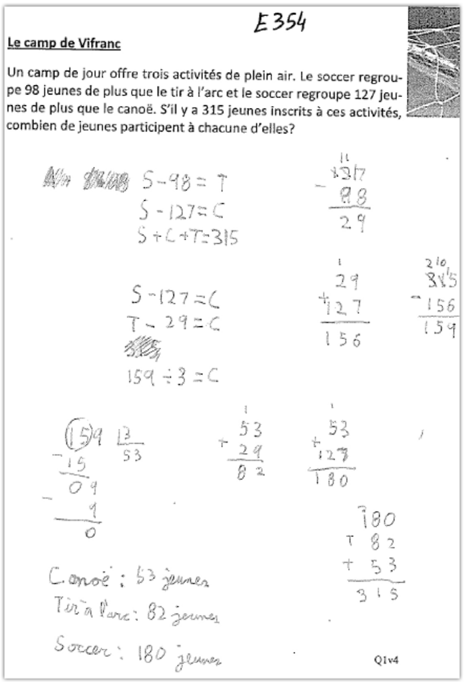
38 × 2 = 76
38 × 10 = 380

Personnes	Amis
Carlos	38
françois	76
Sophia	380

- L'élève désigne les inconnues par les noms des trois personnes. Il détermine que Carlos est l'inconnue ayant la plus petite valeur. Il lui affecte la valeur 1. Dans le cours de la résolution, nous comprenons que le 1 désigne une partie du total des amis. Il génère alors les valeurs des deux autres inconnues et calcule le total des valeurs des trois inconnues. Il trouve 13 (parties). Il entreprend alors la division du nombres total des amis (494) par 13. Il trouve 38 personnes/partie. Il en déduit alors les valeurs des trois inconnues.
- Dans son exécution de l'algorithme de division de 498 par 13, il utilise la technique de l'addition réitérée de 13 pour trouver le multiplicateur 8; l'addition réitérée s'arrête quand l'élève obtient 104 qui est le reste intermédiaire.

Raisonnements à tendance analytique, inconnues explicites, registre algébrique

Inconnues ou équations explicites mais sans opération sur ces représentations



E354

Le camp de Vifranc

Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles?

S − 98 = T
S − 127 = C
S + C + T = 315

127 − 98 = 29

S − 127 = C
T − 29 = C

29 + 127 = 156
315 − 156 = 159

159 ÷ 3 = C

159 ÷ 3 = 53

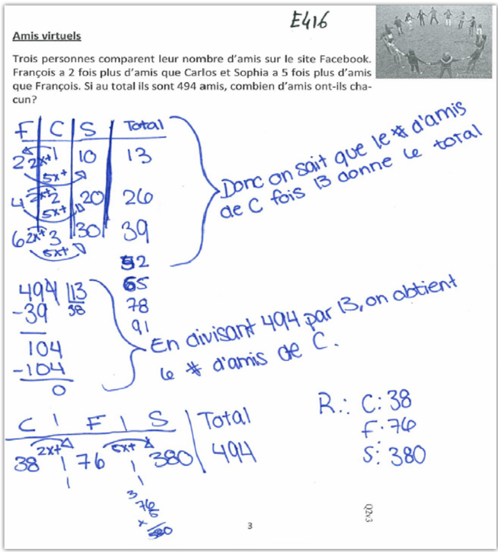
53 + 29 = 82
53 + 127 = 180
180 + 82 + 53 = 315

Canoë : 53 jeunes
Tir à l'arc : 82 jeunes
Soccer : 180 jeunes

QIv4

- L'élève traduit les trois relations entre les inconnues en représentant explicitement les inconnues par des lettres (première lettre du nom de l'activité): S - 98 = T, S - 127 = C et S + C + T = 315.
- Son calcul 127 - 98 = 29 montre qu'il veut calculer l'écart entre les inconnues C et T. Cela lui permet de récrire les relations entre les inconnues en fonction de l'inconnue C: S - 127 = C et T - 29 = C. Il a maintenant trois inconnues dont deux présentent des surplus par rapport à C de 29 et 127 et dont la somme vaut 315. En soustrayant le total des surplus de 315, on obtient le triple de la valeur de C. Ce raisonnement explique les calculs: 29 + 127 = 156; 315 - 156 = 159; 159 ÷ 3 = 53.
- Il déduit alors la valeur de l'inconnue C = 53 et ensuite celles des deux autres inconnues.

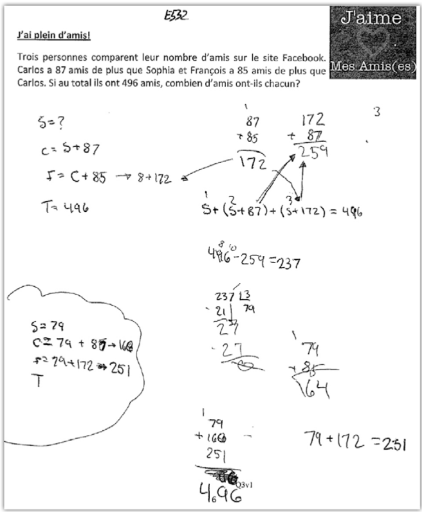
Raisonnements fonctionnels, registre table de valeurs numériques



- L'élève dresse une table de valeurs et donne les valeurs 1, 2 et 3 à la variable nombre d'amis de Carlos. En faisant fonctionner les relations, il génère dans chaque cas les valeurs correspondantes des deux autres ainsi que le total.
- En comparant les valeurs de la variable nombre d'amis de Carlos et la variable dépendante total des amis des trois personnes, il déduit la relation fonctionnelle: Le nombre d'amis de Carlos fois 13 donne le total. Sachant que le total vaut 494, il divise ce nombre par 13 pour trouver le nombre d'amis de Carlos et déduit alors les nombres d'amis de François et de Sophie et vérifie que le total donne bien 494.

Raisonnements analytiques

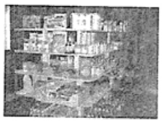
Raisonnement analytique - Inconnues et équations explicites sans perte de lien avec le contexte



- L'élève entame sa résolution comme dans le cas d'une démarche de résolution algébrique conventionnelle. Il traduit les relations dans le problème en représentant les inconnues par la première lettre du nom des personnes et le total par la lettre T. Il exprime les deux autres inconnues en fonction de S, l'inconnue ayant la plus petite valeur. Il exprime ensuite l'équation mathématisant le problème en fonction de l'inconnue S. Il compte le nombre d'occurrences de l'inconnue S et la valeur totale des deux nombres dans l'équation. Puis il réalise les calculs numériques pour trouver la valeur de l'inconnue comme dans le cas des raisonnements à tendance analytique où l'inconnue est muette (voir par exemple la démarche de l'élève A199).

Raisonnement analytique - Inconnues et équations explicites avec perte de lien avec le contexte

E153



Dépanneur douze mois

Martin fait l'inventaire de trois produits de son dépanneur. Il compte 5 fois plus de produits laitiers que de produit céréalier et il compte 3 fois plus de produits en conserve que de produit céréalier. S'il y a 441 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type ?

n.b de produit laitiers : ~~x~~ 3x

n.b de produit céréalier : x

n.b de produit en conserve ; 3x

$$3x + x + 3x = 441$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{441}{7}$$

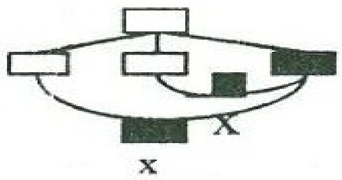
441 | 7 ◁— « Je me souviens plus »

- La résolution de l'élève E153 illustre une démarche algébrique conventionnelle. L'élève n'hésite pas à opérer sur l'équation pour la simplifier et isoler l'inconnue x utilisant les transformations algébriques sans rattachement au contexte.

Annexe 3: Analyse de deux problèmes

Le camp Marbes (problème connecté – arithmétique)

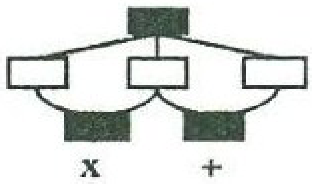
Énoncé: Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le canoë regroupe 4 fois plus de jeunes que le soccer et 7 fois plus de jeunes que le tir à l'arc. S'il y a 252 jeunes inscrits au canoë, combien de jeunes au total participent aux activités? Réponse: tir à l'arc: 36, soccer: 63, total: 351.



Le problème propose de déterminer le nombre total de jeunes qui pratiquent trois activités: «soccer», «tir à l'arc» et «canoë». Le problème précise le nombre de jeunes pratiquant le canoë (252) et il explicite deux types de relations multiplicatives entre le nombre de jeunes pratiquant le canoë et le soccer, et d'autre part le nombre de jeunes pratiquant le canoë et *le tir à l'arc. (Le canoë regroupe 4 fois plus de jeunes que le soccer et 7 fois plus de jeunes que le tir à l'arc.)*

Le réseau social (problème déconnecté – composition X +)

Énoncé: Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site «facebouille». Sophie a 3 fois plus d'amis que Carlos et François a 114 amis de plus que Sophia. Si au total ils sont 380 amis, combien d'amis ont-ils chacun? Réponse: Sophia: 114, Carlos: 38, François: 228.



Le problème met en évidence trois inconnues *(le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia).* Le problème met une inconnue (le pont: le nombre d'amis de François) en relation avec les deux autres et les relations sont données et elles sont de types multiplicatif et additif. Condition: Carlos et François et Sophia n'ont pas d'amis communs. Ils ne sont pas amis entre eux. 494 est le total de leurs amis.

Si *n représente le nombre d'amis de Carlos, 3n le nombre d'amis de Sophia (Sophie a 3 fois plus d'amis que Carlos) et par 3n + 114 le nombre d'amis de François (François a 114 amis de plus que Sophia).* On a l'équation suivante:

n + 3n + (3n + 114) = 380 et la résout 7n + 114 = 380, qu'on transforme en 7n = 380 − 114, 7n = 266 et on déduit en divisant les deux membres de l'égalité par 7, 7n/7 = 266/7.

On trouve n = 38 et on déduit ensuite le nombre d'amis de François en faisant le calcul: 3 x n = 3 x 38 = 144 et le nombre d'amis de Sophie en faisant 3 x n + 114 = 3 x 38 + 114 = 228. L'analyse met en évidence le fait qu'il y a un pont entre les inconnues. Le symbolisme ou l'usage des lettres facilite la pose d'équation et sa résolution.