

Modèles d'équations simultanées pour variables endogènes fictives : une formulation par la théorie des jeux avec application à la participation au marché du travail

Paul A. Bjorn and Quang H. Vuong

Volume 73, Number 1-2-3, mars-juin-septembre 1997

L'économétrie appliquée

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/602226ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/602226ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)

1710-3991 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Bjorn, P. A. & Vuong, Q. H. (1997). Modèles d'équations simultanées pour variables endogènes fictives : une formulation par la théorie des jeux avec application à la participation au marché du travail. *L'Actualité économique*, 73(1-2-3), 161-205. <https://doi.org/10.7202/602226ar>

Article abstract

A game theoretic approach for formulating simultaneous equations models for dummy endogenous variables is proposed and applied to a study of husband/wife labor force participation. A distinctive feature of our approach is that the simultaneous model is derived from optimizing behavior as an outcome of a game between two players. The equilibrium concept used is that of Nash. In addition, we show that the logical consistency conditions implied by usual simultaneous equation models with structural shift actually rules out simultaneity for the problem we consider; in our model, no logical consistency conditions are implied on the parameters.

MODÈLES D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES POUR VARIABLES ENDOGÈNES FICTIVES : UNE FORMULATION PAR LA THÉORIE DES JEUX AVEC APPLICATION À LA PARTICIPATION AU MARCHÉ DU TRAVAIL*

Paul A. BJORN
Quang H. VUONG
California Institute of Technology

RÉSUMÉ – Les auteurs proposent une méthode inspirée par la théorie des jeux pour formuler des modèles d'équations simultanées et les appliquer à l'étude de la décision de deux personnes mariées de participer ou pas au marché du travail. Leur démarche se distingue par le fait que le modèle simultané utilise le résultat d'un jeu entre deux joueurs pour obtenir le comportement d'optimisation. Le concept d'équilibre retenu est celui de Nash. Par ailleurs, les auteurs démontrent que les conditions de cohérence logique, sont implicites dans les modèles d'équations simultanées avec glissement structurel, interdiraient en fait la simultanéité dans la modélisation du problème qu'ils considèrent. Par conséquent, leur modèle ne suppose aucune condition de cohérence logique dans les paramètres.

ABSTRACT – A game theoretic approach for formulating simultaneous equations models for dummy endogenous variables is proposed and applied to a study of husband/wife labor force participation. A distinctive feature of our approach is that the simultaneous model is derived from optimizing behavior as an outcome of a game between two players. The equilibrium concept used is that of Nash. In addition, we show that the logical consistency conditions implied by usual simultaneous equation models with structural shift actually rules out simultaneity for the problem we consider; in our model, no logical consistency conditions are implied on the parameters.

* Au moment où nous avons entrepris ce travail, Quang Vuong était invité à l'Université des Sciences sociales de Toulouse où il pu profiter de discussions fructueuses avec J.J. Laffont. D. Lien et R. McKelvey nous ont apporté des éclaircissements utiles sur la partie théorie des jeux de notre travail. Nous sommes reconnaissants envers D. Grether et D. Rivers pour leurs critiques constructives. Nous restons bien sûr seuls responsables des erreurs qui pourraient subsister.

INTRODUCTION

L'étude des décisions économiques impliquant un choix entre un nombre fini d'options s'impose de plus en plus aux économistes. Parmi les phénomènes qui ont retenu l'attention ces dernières décennies, mentionnons la décision sur l'opportunité de participer au marché du travail, le choix d'un mode de déplacement ou la sélection des marques à acheter. Cette tendance de l'économétrie s'explique-elle par la nouvelle disponibilité de grands ensemble de micro-données et la meilleure qualité de celles-ci? De toute façon, les comportements étudiés étant de nature qualitative, les économètres ont dû pour les analyser mettre au point de nouveaux modèles statistiques, dont le modèle logit, maintenant bien connu (McFadden, 1974; Nerlove et Press, 1973, 1976).

Depuis la mise au point du modèle standard d'équations linéaires simultanées (Koopmans et Hood, 1953), la littérature sur les modèles de variables discrètes témoigne de l'évolution rapide de la modélisation simultanée. En particulier, rappelons que les premiers modèles proposés découlaient directement du modèle standard d'équations linéaires simultanées. Plus précisément, ces modèles étaient formulés en termes d'un modèle d'équations linéaires simultanées en variables latentes continues où les variables qualitatives observées étaient générées à l'aide d'une dichotomisation du type $Y_{it} = 1$ si $Y_{it}^* > 0$, et $Y_{it} = 0$ si $Y_{it}^* < 0$ (voir, par exemple, Maddala et Lee, 1976; Nelson et Olson, 1978).

Depuis les travaux de Amemiya (1974) et de Heckman (1978), une nouvelle génération de modèles simultanés pour variables qualitatives/tronquées a vu le jour; les modèles d'équations simultanées sous-jacentes y sont formulés à la fois en termes de variables latentes continues et de variables qualitatives/tronquées observées. On les désigne souvent sous le nom de modèles simultanés avec glissement structurel. Il est toutefois généralement admis qu'ils présentent la grande difficulté que les paramètres doivent satisfaire à certaines conditions de cohérence pour être statistiquement significatifs. (Voir, par exemple, Heckman, 1978; Gouriéroux, Laffont et Monfort, 1980; Schmidt, 1981).

À de rares exceptions près, (Waldman, 1981), les conditions de cohérence logique implicites dans les modèles simultanés avec glissement structurel n'ont pas d'interprétation économique. C'est ce qui explique que ces modèles aient eu si peu d'applications en économie. De plus, comme Schmidt (1981) le faisait remarquer, quand les variables endogènes sont qualitatives, les conditions de cohérence logique qui y sont associées impliquent une certaine récursivité dans les modèles d'équations simultanées, ce qui met en doute leur caractère réellement simultané. Même si Maddala (1983: sections 5.7 et 5.8) met en garde contre la formulation mécaniste des modèles simultanés avec variables latentes continues et s'il soutient qu'il est possible dans bien des cas de spécifier un autre modèle sans conditions de cohérence logique, il reste qu'on ne peut relever dans la littérature que des modèles possédant dans leurs équations à la fois des variables latentes continues et des variables qualitatives.

Nous avons voulu ici aborder différemment la formulation des modèles d'équations simultanées pour variables qualitatives endogènes. Nous croyons que notre démarche représente une première étape dans l'intégration de la théorie des jeux à la modélisation économique de choix discrets. Avec le modèle simple que nous proposerons ci-dessous, des variables latentes continues ainsi que des variables dichotomiques observées peuvent être présentes dans les équations. Contrastant avec les modèles simultanés plus anciens, ce modèle ne dépend pas de l'imposition aux paramètres de contraintes de cohérence logique.

Notre approche se distingue aussi en ce que le modèle simultané est dérivé d'un comportement d'optimisation. Plus précisément, nous obtenons notre modèle à partir du résultat d'un jeu entre deux individus-joueurs et le modèle statistique en invoquant la formule d'utilité aléatoire proposée par McFadden (1974, 1981).

Comme application empirique de notre approche, nous étudierons la décision commune d'un mari et d'une femme de participer ou pas au marché du travail. Nous croyons que notre démarche apporte quelque chose à l'étude de ce problème parce que nous construisons le modèle du comportement d'un couple en le plaçant explicitement dans le cadre de la théorie des jeux. Or, ou bien les travaux effectués jusqu'ici à ce sujet considéraient comme exogène la décision du mari de travailler ou pas (voir, par exemple, Heckman, 1974; Heckman et Macurdy, 1980), ou bien, en spécifiant l'offre de travail du mari et de la femme à partir du résultat d'une fonction d'utilité commune, ils se trouvaient à laisser implicitement de côté le problème de l'agrégation des préférences (voir, par exemple, Ashenfelter et Heckman, 1974; Cotterman, 1981 et Gronau, 1973).

Notre article se divise comme suit. À la section 1, nous démontrerons que les conditions de cohérence logique, implicites dans les modèles d'équations simultanées avec glissement structurel, ont en réalité pour effet d'interdire la simultanéité quand il s'agit du problème simple que nous considérons; la simultanéité étant un trait inhérent à notre problème, il s'ensuit que ces modèles sont inappropriés. À la section 2, nous montrerons que la théorie des jeux peut suggérer une règle naturelle pour générer les variables dichotomiques observées et qu'il ne s'agit pas de la règle de dichotomisation utilisée jusqu'ici. Quand nous dériverons le modèle statistique qui en résulte, nous constaterons qu'aucune condition de cohérence logique n'est implicite dans les paramètres. Nous discuterons ensuite à la section 3 les problèmes d'identification et d'estimation, puis nous consacrerons la section 4 à la présentation de notre exemple empirique. Nous proposons différentes généralisations importantes à la section 5 avant de conclure par la section 6. Nous avons regroupé la démonstration de toutes les propositions dans l'annexe A et tout ce qui touche à la construction des données dans l'annexe B.

1. LES MODÈLES D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES AVEC GLISSEMENT STRUCTUREL : UNE CRITIQUE

Pour simplifier l'analyse, nous ne nous attarderons qu'au cas où il n'y a que deux variables qualitatives endogènes. Simplifiant encore plus, nous supposerons

que ces deux variables sont dichotomiques. Pour illustrer, nous considérerons la décision d'un mari et d'une femme de participer ou non au marché du travail :

$$\begin{aligned} Y_h &= 1 && \text{si le mari travaille} \\ &= 0 && \text{autrement} \\ Y_w &= 1 && \text{si la femme travaille,} \\ &= 0 && \text{autrement.} \end{aligned}$$

(Les indices qui spécifient les observations seront omis dans cette section et la suivante.)

La plupart des études empiriques sur la participation d'un couple au marché du travail postulent la maximisation de la fonction objectif commune. Dans la tradition classique de l'économie, nous postulerons néanmoins que chacun des deux individus maximise sa propre fonction d'utilité.

Les décisions du mari et de la femme ne sont cependant pas nécessairement indépendantes, l'utilité dégagée par chaque individu dépendant de la décision de l'autre. Posons que $\tilde{U}_h(i,j)$ est l'utilité obtenue par le mari quand il accomplit d'action i si sa femme accomplit l'action j , expressions dans laquelle $i = 1$ si le mari travaille et 0 autrement et $j = 1$ si la femme travaille et 0 autrement. L'utilité $\tilde{U}_w(j,i)$ obtenue par la femme qui accomplit j si son mari accomplit i est définie de la même façon.

Pour générer les variables dichotomiques observées Y_h et Y_w , la règle observée des chercheurs qui ont proposé des modèles d'équations simultanées pour des variables endogènes muettes peut être résumée par l'hypothèse suivante :

Hypothèse A1 :

$$\begin{aligned} Y_h &= 1 && \text{si } Y_h^* > 0, \\ &= 0 && \text{autrement,} \\ Y_w &= 1 && \text{si } Y_w^* > 0, \\ &= 0 && \text{autrement.} \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} Y_h^* &= Y_w[\tilde{U}_h(1,1) - \tilde{U}_h(0,1)] + (1 - Y_w)[\tilde{U}_h(1,0) - \tilde{U}_h(0,0)], \\ Y_w^* &= Y_h[\tilde{U}_w(1,1) - \tilde{U}_w(0,1)] + (1 - Y_h)[\tilde{U}_w(1,0) - \tilde{U}_w(0,0)], \end{aligned}$$

Ce modèle se justifie comme suit : si la femme travaille ($Y_w = 1$), alors le mari travaille ($Y_h = 1$) si et seulement si $\tilde{U}_h(1,1) \geq \tilde{U}_h(0,1)$ ¹. Par contre, si la femme ne travaille pas ($Y_w = 0$), le mari travaille si et seulement si $\tilde{U}_h(1,0) \geq \tilde{U}_h(0,0)$. Il s'ensuit de la combinaison de ces deux conditions que $Y_h = 1$ si et seulement si $Y_h^* > 0$ où Y_h^* est défini comme plus haut. La règle de décision pour Y_w est dérivée de la même façon.

1. Quand un individu est indifférent entre le fait de travailler et de ne pas travailler, nous considérons arbitrairement qu'il travaillera, ce qui explique que nous avons retenu l'inégalité faible.

Comme le proposait McFadden (1974, 1981), les utilités $\tilde{U}_h(i,j)$ et $\tilde{U}_w(j,i)$ sont traitées comme si elles étaient aléatoires et elles sont décomposées en composantes déterministes et aléatoires :

$$\tilde{U}_h(i,j) = U_h(i,j) + \eta_h(i,j),$$

$$\tilde{U}_w(j,i) = U_w(j,i) + \eta_w(j,i).$$

Pour compléter la spécification du modèle statistique, il faut faire des hypothèses sur les composantes aléatoires non observées $\eta_h(i,j)$ et $\eta_w(j,i)$. L'observation des expressions pour Y_h^* et Y_w^* montre clairement que seules les différences $\eta_w(1,0) - \eta_w(0,0)$ sont pertinentes. Nous poserons les hypothèses simplificatrices suivantes :

Hypothèse A2 :

$$\eta_h(1,1) - \eta_h(0,1) = \eta_h(1,0) - \eta_h(0,0) = \varepsilon_h,$$

$$\eta_w(1,1) - \eta_w(0,1) = \eta_w(1,0) - \eta_w(0,0) = \varepsilon_w,$$

où les $(\varepsilon_h, \varepsilon_w)$ sont normalement distribuées avec moyennes de zéro, variances unitaires et corrélation de ρ .

Pour simplifier encore, nous supposons que la différence d'utilité que le mari enregistre du fait de travailler plutôt que de ne pas travailler quand sa femme travaille ne diffère que d'une constante β_h de l'utilité qu'il connaît du fait qu'il travaille plutôt que de ne pas travailler quand sa femme ne travaille pas. Nous faisons l'hypothèse simplificatrice parallèle pour la femme. Autrement dit, nous interdisons les effets de second ordre. De manière formelle, nous obtenons :

Hypothèse A3 :

$$U_h(1,1) - U_h(0,1) = \beta_h + U_h(1,0) - U_h(0,0) = \beta_h + \Delta_h,$$

$$U_w(1,1) - U_w(0,1) = \beta_w + U_w(1,0) - U_w(0,0) = \beta_w + \Delta_w.$$

Quand nous appliquons les hypothèses A2 et A3 aux expressions pour Y_h^* et Y_w^* , il s'ensuit que :

$$Y_h^* = \Delta_h + \beta_h Y_w + \varepsilon_h, \tag{1}$$

$$Y_w^* = \Delta_w + \beta_w Y_h + \varepsilon_w. \tag{2}$$

Étant donné ces hypothèses, notre modèle est un modèle d'équations simultanées avec glissement structurel (Heckman, 1978 ; Schmidt, 1981). Or, la condition 12.6 de Schmidt veut que, pour que le modèle soit statistiquement significatif, la condition suivante de cohérence logique doive être satisfaite :

$$\beta_h + \beta_w = 0 \tag{3}$$

autrement dit, β_h ou β_w doit être égal à zéro.

Dans le problème simple que nous considérons ici, la condition de cohérence logique s'interprète d'emblée. Par exemple, « $\beta_h = 0$ » signifie que, en dehors de l'association statistique entre ε_h et ε_w et donc entre ε_h et Y_w , la décision du mari au sujet de sa participation au marché du travail ne dépend pas de ce que décidera réellement sa femme². La condition de cohérence logique (3) implique donc que la décision de l'un ou l'autre des individus doit être structurellement indépendante de la décision de l'autre. Autrement dit, la condition de cohérence logique associée au modèle d'équations simultanées avec glissement structurel présenté ci-dessus introduit de la récursivité structurelle dans le modèle. Étant donné que la simultanéité est inhérente à notre problème et qu'il n'y a pas de raison de poser *a priori* que β_h ou β_w est de zéro, il s'ensuit que la méthode habituellement utilisée pour formuler des équations simultanées avec glissement structurel ne nous convenait pas.

2. UNE FORMULATION DIFFÉRENTE

Comme le soutenait Heckman (1978), l'utilisation de modèles d'équations simultanées avec glissement structurel se justifie en bonne partie par le fait que ces modèles peuvent distinguer une association structurelle d'une association purement statistique entre des variables endogènes discrètes, ce que d'autres modèles, tels ceux qu'ont proposés Goodman (1970), Haberman (1974), Nerlove et Press (1976), ne savent pas faire³. Nous avons vu toutefois à la section précédente qu'un modèle simultané avec glissement structurel ne peut convenir à notre problème à cause de la condition de cohérence logique qu'il imposerait implicitement.

Même si l'hypothèse A1 définit la dichotomisation cruciale qui génère les variables discrètes observées Y_h et Y_w , cette hypothèse n'a pas été remise en cause par les théoriciens de la modélisation de variables discrètes. Nous soutenons ici que l'hypothèse A1 est en fait la cause des problèmes associés aux conditions de cohérence logique. Notre démarche repose donc plutôt sur l'hypothèse suivante :

Hypothèse A1' : Les variables dichotomiques observées (Y_h, Y_w) sont les résultats en équilibre de Nash (ÉN) d'un jeu joué par deux individus.

Puisque l'utilité obtenue par chacun des deux individus dépend des gestes de l'autre, le contexte naturel est celui d'un jeu entre deux individus. Dans des situations autres que celle que nous considérons ici, les fonctions d'utilité peuvent

2. La condition $\beta_h = 0$ tient si l'on suppose que la fonction d'utilité du mari est additivement séparable, de façon à ce que $U_h(Y_h, Y_w) = U_h(Y_h) + U_w(Y_w)$. Dans ce cas, $\Delta_h = U_h(1) - U_h(0)$. Nous remercions Donald Lien de nous l'avoir fait remarquer. Il faut toutefois noter que le fait de supposer que la fonction d'utilité du mari est additivement séparable fait essentiellement disparaître la simultanéité, comme nous le soutenons dans le texte.

3. Voir toutefois Vuong (1980, 1981, 1982).

évidemment être remplacées par les fonctions appropriées des récompenses résultantes. L'hypothèse A1' retient le concept de l'équilibre non coopératif de Nash, même si d'autres conceptions de l'équilibre pourraient être plus appropriées, comme nous le verrons à la section 5.

L'hypothèse A1' ne suffit toutefois pas à spécifier comment les variables dichotomiques observées (Y_h, Y_w) sont générées. Il en va ainsi parce que, dans bien des jeux et particulièrement dans le problème considéré ici, il pourrait bien ne pas y avoir d'équilibre de Nash ou il pourrait y en avoir plusieurs. Comme nous le verrons ci-dessous, il est possible de résoudre la difficulté en augmentant le nombre de paramètres.

Pour déterminer le résultat ÉN du jeu, nous dérivons les fonctions de réaction de chacun des deux individus. Comme la fourchette des résultats est simplement de $(0,1) \times (0,1)$, il n'y a que quatre fonctions de réaction possibles pour chaque joueur. Nous les désignerons H_1, H_2, H_3, H_4 pour le mari et W_1, W_2, W_3, W_4 pour la femme, comme nous le voyons aux figures 1 et 2. Par exemple, la fonction de réaction H_1 du mari dit que le mari choisira toujours de ne pas travailler, que sa femme décide de travailler ou pas.

FIGURE 1

LA FONCTION DE RÉACTION DU MARI

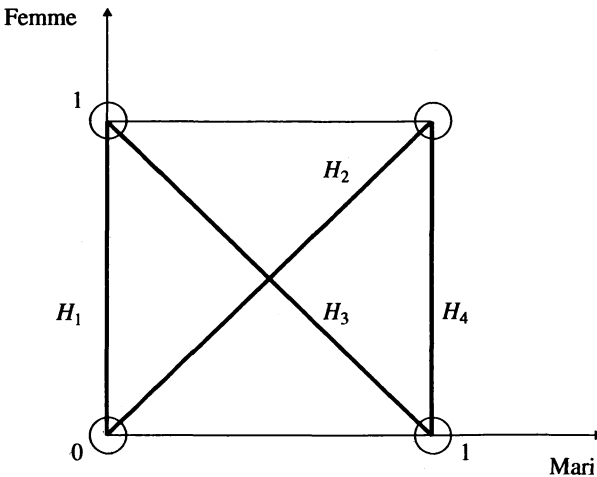
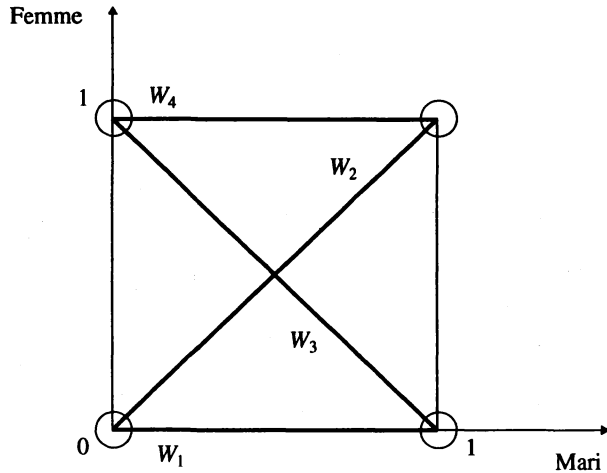


FIGURE 2

LA FONCTION DE RÉACTION DE LA FEMME



Étant donné que H_1 et W_j sont les fonctions de réaction de chacun des deux individus, nous trouvons d'emblée l'équilibre de Nash. Le Tableau 1 précise quel est l'équilibre de Nash (ou note son absence) pour chacune des seize paires de fonctions de réaction possibles :

TABLEAU 1
ÉQUILIBRES DE NASH

Mari \ Femme	W1	W2	W3	W4
H1	(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,1)
H2	(0,0)	(0,0)&(1,1)	Aucun	(1,1)
H3	(1,0)	Aucun	(1,0)&(0,1)	(0,1)
H4	(1,0)	(1,1)	(1,0)	(0,1)

où le premier nombre de de chaque paire concerne le mari et le deuxième la femme.

Comme nous l'avons vu plus haut, il peut se poser une difficulté du fait de la non existence ou de la multiplicité des équilibres de Nash pour les paires (H_2, W_2) , (H_2, W_3) , (H_3, W_2) et (H_3, W_3) . Au lieu d'imposer quelque règle arbitraire, nous distribuerons la probabilité que chacune de ces paires se produise dans les différents résultats en les assortissant de coefficients de pondération. Nous reviendrons à la section 5 sur l'interprétation à donner à ces coefficients de pondération. Pour l'instant, disons que $Pr(i,j)$ est la probabilité que les variables aléatoires Y_h et Y_w prennent les valeurs i et j . D'après le Tableau 1, il s'ensuit que :

$$Pr(0,0) = Pr(H_1 \notin W_1) + Pr(H_1 \notin W_2) + Pr(H_2 \notin W_1) + a_1 Pr(H_2 \notin W_2) + c_1 Pr(H_2 \notin W_3) + d_1 Pr(H_3 \notin W_2) \quad (4)$$

$$Pr(1,0) = Pr(H_3 \notin W_1) + Pr(H_4 \notin W_1) + Pr(H_4 \notin W_3) + b_1 Pr(H_3 \notin W_3) + c_2 Pr(H_2 \notin W_3) + d_2 Pr(H_3 \notin W_2) \quad (5)$$

$$Pr(0,1) = Pr(H_1 \notin W_3) + Pr(H_1 \notin W_4) + Pr(H_3 \notin W_4) + b_2 Pr(H_3 \notin W_3) + c_3 Pr(H_2 \notin W_3) + d_3 Pr(H_3 \notin W_2) \quad (6)$$

$$Pr(0,1) = Pr(H_2 \notin W_4) + Pr(H_4 \notin W_2) + Pr(H_4 \notin W_4) + a_2 Pr(H_2 \notin W_2) + c_4 Pr(H_2 \notin W_3) + d_4 Pr(H_3 \notin W_2) \quad (7)$$

où :

$$a_1 + a_2 = 1 \quad , \quad b_1 + b_2 = 1 \quad ,$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1 \quad , \quad d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 1 \quad ,$$

tous ces paramètres additionnels étant non négatifs.

Chaque fonction de réaction se produira toutefois si certaines des conditions des composantes aléatoires ϵ_h et ϵ_w sont satisfaites. Par exemple, étant donné les hypothèses A2 and A3, la fonction de réaction H_1 se produit si et seulement si :

$$\Delta_h + \epsilon_h < 0 \text{ et } \Delta_h + \beta_h + \epsilon_h < 0.$$

On verra en appendice que les conditions qui doivent être satisfaites par ϵ_h et ϵ_w sont celles qui sont énumérées au Tableau 2.

TABLEAU 2

CONDITIONS DES FONCTIONS DE RÉACTION DU MARI

H_1 :	$\epsilon_h < -\Delta_h - \max(0, \beta_h)$	
H_2 :	$-\Delta_h - \beta_h \leq -\epsilon_h < -\Delta_h$ si $\beta_h \geq 0$;	autrement, ne peut se produire
H_3 :	$-\Delta_h \leq \epsilon_h < -\Delta_h - \beta_h$ si $\beta_h < 0$;	autrement, ne peut se produire
H_4 :	$\epsilon_h < -\Delta_h - \min(0, \beta_h)$	

Les conditions des fonctions de réaction de la femme sont essentiellement les mêmes, l'indice h étant remplacé par w .

Nous pouvons maintenant dériver les probabilités $Pr(i,j)$ en termes des paramètres inconnus. Posons que $F(a,b,\rho)$ est le c.d.f. évalué à (a,b) d'une distribution normale bivariée avec moyenne de zéro, variances unitaires et corrélation de ρ . Posons de plus que $I(a, b, c, \rho)$ est l'intégrale de la densité bivariée correspondante sur la fourchette $a \geq \epsilon_h \geq c, b \geq \epsilon_w \geq d$. À l'aide des équations (4)-(7), nous obtenons :

PROPOSITION 1 : Les probabilités $Pr(i,j)$ sont :

$$\begin{aligned}
 Pr(0,0) &= F(-\Delta_h, -\Delta_w, \rho) - a_2 I_{++} && \text{si } \beta_h \geq 0, \beta_w \geq 0 \\
 &= F(-\Delta_h, -\Delta_w, \rho) + c_1 I_{+-} && \text{si } \beta_h \geq 0, \beta_w < 0 \\
 &= F(-\Delta_h, -\Delta_w, \rho) + d_1 I_{-+} && \text{si } \beta_h < 0, \beta_w \geq 0 \\
 &= F(-\Delta_h, -\Delta_w, \rho) && \text{si } \beta_h < 0, \beta_w < 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 Pr(1,0) &= F(-\Delta_h, -\Delta_w - \beta_w, -\rho) && \text{si } \beta_h \geq 0, \beta_w \geq 0 \\
 &= F(-\Delta_h, -\Delta_w - \beta_w, -\rho) + c_2 I_{+-} && \text{si } \beta_h \geq 0, \beta_w < 0 \\
 &= F(-\Delta_h, -\Delta_w - \beta_w, -\rho) + d_2 I_{-+} && \text{si } \beta_h < 0, \beta_w \geq 0 \\
 &= F(-\Delta_h, -\Delta_w - \beta_w, -\rho) - b_2 I_{--} && \text{si } \beta_h < 0, \beta_w < 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 Pr(0,1) &= F(-\Delta_h, -\beta_h, \Delta_w, -\rho) && \text{si } \beta_h \geq 0, \beta_w \geq 0 \\
 &= F(-\Delta_h, -\beta_h, \Delta_w, -\rho) + c_3 I_{+-} && \text{si } \beta_h \geq 0, \beta_w < 0 \\
 &= F(-\Delta_h, -\beta_h, \Delta_w, -\rho) + d_3 I_{-+} && \text{si } \beta_h < 0, \beta_w \geq 0 \\
 &= F(-\Delta_h, -\beta_h, \Delta_w, -\rho) + b_1 I_{--} && \text{si } \beta_h < 0, \beta_w < 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 Pr(1,1) &= F(\Delta_h + \beta_h, \Delta_w + \beta_w, \rho) - a_1 I_{++} && \text{si } \beta_h \geq 0, \beta_w \geq 0 \\
 &= F(\Delta_h + \beta_h, \Delta_w + \beta_w, \rho) - c_4 I_{+-} && \text{si } \beta_h \geq 0, \beta_w < 0 \\
 &= F(\Delta_h + \beta_h, \Delta_w + \beta_w, \rho) - d_4 I_{-+} && \text{si } \beta_h < 0, \beta_w \geq 0 \\
 &= F(\Delta_h + \beta_h, \Delta_w + \beta_w, \rho) && \text{si } \beta_h < 0, \beta_w < 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

où

$$\begin{aligned}
 I_{++} &= I(-\Delta_h, -\Delta_w, -\Delta_h, -\beta_h, -\Delta_w - \beta_w, \rho) \\
 I_{+-} &= I(-\Delta_h, -\Delta_w, -\beta_w, -\Delta_h, -\beta_h, -\Delta_w, \rho) \\
 I_{-+} &= I(-\Delta_h, -\beta_h, -\Delta_w, -\Delta_h, -\Delta_w - \beta_w, \rho) \\
 I_{--} &= I(-\Delta_h, -\beta_h, -\Delta_w, -\beta_w, -\Delta_h - \Delta_w, \rho)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

On peut vérifier d'emblée que les quatre probabilités $Pr(i,j)$ en reviennent à une seule, quel que soit le signe de β_h et de β_w , et qu'elles sont continues par rapport à tous les paramètres. Il vaut la peine de noter que le modèle proposé n'impose aucune contrainte de cohérence logique aux différents paramètres. Du reste, la condition de cohérence logique (3) posée par Heckman peut être interprétée dans notre modèle.

PROPOSITION 2 : Le fait d'imposer $\beta_h \cdot \beta_w = 0$ équivaut à imposer que la probabilité que n'importe laquelle des quatre paires de fonctions de réaction $(H_2, W_2), (H_2, W_3), (H_3, W_2), (H_3, W_3)$ se produise est *a priori* de zéro.

Compte tenu du Tableau 1, il s'ensuit que la condition de cohérence logique (3) nécessite que l'action du mari ou celle de la femme soit indépendante de celle de l'autre, comme nous l'avons vu à la section 1.

3. IDENTIFICATION ET ESTIMATION

Étant donné les expressions sus-mentionnées pour les probabilités $Pr(i,j)$ des variables dichotomiques observées Y_h et Y_w , la fonction de l'indicateur de maximum de vraisemblance peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_t \log Pr_t(Y_{ht}, Y_{wt}) \\
 &= \sum_t [Y_{ht} Y_{wt} \log Pr_t(1,1) + Y_{ht} (1 - Y_{wt}) \log Pr_t(1,0) \\
 &\quad + (1 - Y_{ht}) Y_{wt} \log Pr_t(0,1) + (1 - Y_{ht})(1 - Y_{wt}) \log Pr_t(0,0)]
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

où l'indice t attribue les observations. Les probabilités portent l'indice t parce que Δ_h et Δ_w sont en général des fonctions de variables explicatives. Nous supposons que :

$$\Delta_{ht} = x'_{ht} \gamma \quad \text{et} \quad \Delta_{wt} = x'_{wt} \gamma_w \tag{14}$$

où x_{ht} peut comprendre les caractéristiques du t -ième ménage en plus des caractéristiques du mari. Il en va de même pour x_{wt} .

Les paramètres du modèle sont $(\gamma_h, \beta_h, \gamma_w, \beta_w, \rho)$ ainsi que les coefficients de pondération a, b, c et d introduits dans les équations (4) à (7). Dans un premier temps, nous contraignons *a priori* ces facteurs de pondération de façon à satisfaire :

$$a_1 = a_2 = 1/2, b_1 = b_2 = 1/2, c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1/4, \text{ et} \\ d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1/4.$$

Dans cette section ainsi que dans la suivante, nous poserons que les facteurs de pondération sont contraints. Il faut noter que cela revient à répartir également les quatre paires de fonctions de réaction $(H_2, W_2), (H_2, W_3), (H_3, W_2)$ et (H_3, W_3) entre les résultats appropriés. En plus de simplifier la maximisation de la fonction de maximum de vraisemblance, ces contraintes simplifieront l'identification des paramètres $(\gamma_h, \beta_h, \gamma_w, \beta_w, \rho)$, problème vers lequel nous nous tournons maintenant.

Pour discuter les conditions dans lesquelles notre modèle est identifié, nous devons d'abord introduire une notation. Définissons la matrice partitionnée \tilde{A} comme suit :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \bar{X}_h & D_h^{-1} D_w \bar{X}_w & \\ | & & | \end{bmatrix} \quad \text{où } D_h \text{ et } D_w \text{ sont tous deux}$$

des matrices diagonales en bloc d'ordre $3T$, le t -ième bloc de D_h et de D_w étant donné par :

$$D_{ht} = \begin{bmatrix} e_t^h & f_t^h & 0 \\ 0 & g_t^h & 0 \\ 0 & 0 & h_t^h \end{bmatrix}, D_{wt} = \begin{bmatrix} e_t^w & 0 & f_t^w \\ 0 & g_t^w & 0 \\ 0 & 0 & h_t^w \end{bmatrix} \quad \text{si } B_h > 0, B_w > 0$$

$$D_{ht} = \begin{bmatrix} e_t^h & 0 & 0 \\ 0 & f_t^h & 0 \\ 0 & -g_t^h & h_t^h \end{bmatrix}, D_{wt} = \begin{bmatrix} e_t^w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_t^w \\ 0 & -g_t^w & h_t^w \end{bmatrix} \quad \text{si } B_h < 0, B_w < 0$$

$$D_{ht} = \begin{bmatrix} e_t^h & f_t^h & 0 \\ 0 & (g_t^h + f_t^h) & 0 \\ 0 & f_t^h & h_t^h \end{bmatrix}, D_{wt} = \begin{bmatrix} e_t^w & f_t^w & 0 \\ 0 & (g_t^w + f_t^w) & 0 \\ 0 & f_t^w & h_t^w \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{si } B_h > 0, B_w < 0 \\ \text{ou } B_h < 0, B_w > 0 \end{array}$$

avec

$$e_t^h = \phi(\Delta_{ht} + \beta_h) \Phi(\Delta_{wt}^* + \beta_w^* - \rho(\Delta_{ht}^* + \beta_h^*))$$

$$f_t^h = \phi(\Delta_{ht}) \Phi(-\Delta_{wt}^* + \rho\Delta_{ht}^*)$$

$$g_t^h = \phi(\Delta_{ht}) \Phi(-\Delta_{wt}^* - \beta_w^* + \rho\Delta_{ht}^*)$$

$$h_t^h = -\phi(\Delta_{ht} + \beta_h) \Phi(\Delta_{ht}^* - \rho(\Delta_{ht}^* + \beta_h^*))$$

$$e_t^w = \phi(\Delta_{wt} + \beta_w) \Phi(\Delta_{ht}^* + \beta_h^* - \rho(\Delta_{wt}^* + \beta_w^*))$$

$$f_t^w = \phi(\Delta_{wt}) \Phi(-\Delta_{ht}^* + \rho\Delta_{wt}^*)$$

$$g_t^w = -\phi(\Delta_{wt} + \beta_w) \Phi(\Delta_{ht}^* - \rho(\Delta_{wt}^* + \beta_w^*))$$

$$h_t^w = \phi(\Delta_{wt}) \Phi(-\Delta_{ht}^* - \beta_w^* + \rho\Delta_{wt}^*)$$

où Φ est le c.d.f. normal univarié et ϕ le p.d.f. correspondant. Une quantité de «*» veut dire que cette quantité est divisée par la racine carrée de $1 - \rho^2$, \bar{X}_h et \bar{X}_w sont de dimension $3T$ par $K_h + 1$ et $3T$ par $K_w + 1$, les t -ièmes blocs étant donnés respectivement par :

$$\begin{bmatrix} 1 & x'_{ht} \\ 0 & x'_{ht} \\ 1 & x'_{ht} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & x'_{wt} \\ 1 & x'_{wt} \\ 0 & x'_{wt} \end{bmatrix}$$

PROPOSITION 3 : Les paramètres $(\beta_h, \beta_w, \gamma_h, \gamma_w)$ du modèle sont identifiés si et seulement si \tilde{A} est non singulier.

Comme on le constate facilement, D_h et D_w sont non singuliers dans les quatre cas puisque D_{ht} et D_{wt} sont des matrices triangulaires ou qui peuvent être rendues triangulaires par des permutations appropriées des rangées et des colonnes. L'examen de la matrice \tilde{A} montre clairement que, si \tilde{A} est singulière, elle ne se produira que très rarement pour certaines valeurs spécifiques des paramètres en tant qu'artefact de certaines variables explicatives. (On notera l'exception au corollaire 2).

Quand on les compare aux restrictions nécessaires à l'identifications des modèles linéaires, nos résultats sont très surprenants. Par exemple, même si x'_{ht} et x'_{wt} sont identiques, il ne se produira que rarement que notre modèle ne sera pas identifié, ce qui contraste de manière frappante avec les conditions d'ordre nécessaires à l'identification des modèles linéaires.

D'ailleurs, réfléchissons au pire cas possible pour l'identification des modèles linéaires. Posons que $x'_{ht} = x'_{wt} \equiv x_t$, la t -ième rangée de la matrice non singulière x ; posons de plus que $\gamma_h = \gamma_w$ et $\beta_h = \beta_w$. Il en découle que $\Delta_{ht} = \Delta_{wt} = \Delta_t$, $g_t^h = h_t^w \equiv g_t$, et $h_t^h = g_t^w \equiv h_t$. Nous obtenons alors le résultat suivant :

COROLLAIRE 1 : Si $x'_{ht} = x'_{wt} \equiv x'_t$, X toute la colonne, $\gamma_h = \gamma_w$ et $\beta_h = \beta_w$, le modèle sera identifié si et seulement si la quantité $h_t / (h_t - g_t)$ est une combinaison linéaire de x_t , pour tous les t .

Réfléchissons aux conséquences de ce corollaire. Il n'y aura aucun espoir d'identifier un modèle d'équations simultanées de l'offre et de la demande, par exemple, qui satisfasse aux conditions du corollaire 1 : les courbes d'offre et de demande seront identiques. Dans les mêmes conditions, notre modèle sera presque toujours identifié. Plus important encore, dans les restrictions extrêmes du corollaire 1, nous pouvons tester de manière significative l'égalité des coefficients entre les équations puisque les paramètres sont identifiés.

Un autre corollaire de la proposition 3 nous fournit une condition nécessaire à l'identification, comme nous le verrons maintenant. Supposons que des termes constants soient introduits dans les deux équations de (14). Définissons $\Delta_{ht} = \gamma_h^0 + x'_{ht} \bar{\gamma}_h$ et $\Delta_{wt} = \gamma_w^0 + x'_{wt} \bar{\gamma}_w$, où γ_h^0 est le coefficient pour la constante du mari et x_{ht} un vecteur des variables explicatives pour le t du mari ; γ_w^0 et x_{wt} sont définis de manière analogue pour la femme. Nous obtenons alors :

COROLLAIRE 2 : Si les constantes (γ_h^0 et γ_w^0) sont introduites dans les deux équations et si $\tilde{\gamma}_h = 0$ et $\tilde{\gamma}_w = 0$, le modèle n'est pas identifié.

Par conséquent, si nous voulons estimer le modèle en y incluant les deux constantes (γ_w^0 et γ_h^0), au moins une équation devra inclure d'autres variables explicatives, sans quoi le modèle ne sera certainement pas identifié⁴.

Ce corollaire a une conséquence pratique pour ce qui est de l'estimation : si on ajoute un terme constant à chaque équation ainsi qu'une ou plusieurs variables explicatives additionnelles à au moins une équation, au moins une des valeurs initiales des paramètres associés à ces variables explicatives non-constantes ne devra pas être égale à zéro. Autrement, la matrice d'information sera singulière à la première itération et il sera impossible d'effectuer l'optimisation. Tournons-nous maintenant vers l'estimation.

La routine d'estimation que nous utilisons est une variation de la procédure itérative proposée par Berndt, Hall, Hall et Hausman (1974). En supposant que les paramètres soient identifiés et que les a , b , c et d satisfassent les facteurs de pondération *a priori* énumérés plus haut, la maximisation se fait directement quoique l'indicateur de maximum de vraisemblance prenne quatre formes fonctionnelles horizontales en fonction des signes de β_h et de β_w . Puisque nous ne possédons pas pour le moment d'estimations initiales constantes des paramètres ($\gamma_h, \beta_h, \gamma_w, \beta_w, \rho$), nous fournissons différentes valeurs initiales de ($\gamma_h, \beta_h, \gamma_w, \beta_w$), recherchons dans la grille les valeurs possibles de ρ et effectuons des itérations jusqu'à ce que la convergence soit atteinte.

4. Un argument intuitif à l'appui de ce résultat est que, quand il n'y a d'autres variables explicatives que les deux termes constants, le modèle a quatre paramètres (y compris β_h et β_w) et il faut expliquer quatre probabilités, dont trois seulement sont indépendantes.

4. UN EXEMPLE EMPIRIQUE

4.1 *Le modèle*

Les quatre équations suivantes serviront à décrire le comportement commun d'un couple représentatif :

$$W_h^r = z_h' \gamma_h^r - \beta_h Y_w + \eta_h^r \tag{15}$$

$$W_w^r = z_w' \gamma_w^r - \beta_w Y_h + \eta_w^r \tag{16}$$

$$W_h^m = X_h' \gamma_h^m + \eta_h^m \tag{17}$$

$$W_w^m = X_w' \gamma_w^m + \eta_w^m \tag{18}$$

Les équations (15) et (16) décrivent les salaires de réserve ou, ce qui est équivalent, le prix de référence du temps respectivement pour le mari et pour la femme. Remarquez que, étant donné la variable dichotomique Y_w , la décision de la femme de travailler ou de ne pas travailler influe sur le salaire de réserve du mari en (15). De manière analogue, la décision du mari de travailler ou de ne pas travailler, représentée par Y_h , influe sur le salaire de réserve de la femme en (16). Les équations (17) et (18) décrivent les salaires au marché respectivement pour le mari et pour la femme.

Laissons maintenant le salaire de réserve du mari (de la femme) jouer le rôle de la gratification qu'il (elle) obtient du fait de ne pas travailler étant donné les équations (19) et (20). De même, disons que le salaire au marché du mari (de la femme) joue le rôle de la gratification qu'il (elle) éprouve à travailler, ce qui est représenté respectivement par les équations (21) et (22). Nous obtenons alors :

$$\tilde{U}_h(0, Y_w) = Z_h' \gamma_h^r - \beta_h Y_w + \eta_h^r \tag{19}$$

$$\tilde{U}_w(0, Y_h) = Z_w' \gamma_w^r - \beta_w Y_h + \eta_w^r \tag{20}$$

$$\tilde{U}_h(1, Y_w) = X_h' \gamma_h^m + \eta_h^m \tag{21}$$

$$\tilde{U}_w(1, Y_h) = X_w' \gamma_w^m + \eta_w^m \tag{22}$$

Il faut remarquer que l'hypothèse A2 sur les termes d'erreur est satisfaite naturellement.

Nous avons de plus :

$$U_h(1,1) - U_h(0,1) = \beta_h + U^h(1,0) - U^h(0,0) = X_h' \gamma_h^m - Z_h' \gamma_h^r + \beta_h \tag{23}$$

$$U_w(1,1) - U_w(0,1) = \beta_w + U^w(1,0) - U^w(0,0) = X_w' \gamma_w^m - Z_w' \gamma_w^r + \beta_w \tag{24}$$

L'hypothèse A3 est également satisfaite. Par ailleurs, à propos de la spécification des équations du salaire de réserve du mari (19) et de son salaire au marché (21), notons qu'il est possible que certaines variables explicatives apparaissent dans les deux équations, ce qui traduit le fait que le coefficient associé mesurera dans (23) la différence entre le salaire de réserve et le salaire au marché. Évidemment, cette remarque vaut également pour les équations relatives à la femme.

4.2 Spécification du modèle

Nous devons maintenant spécifier l'ensemble des variables explicatives des équations du salaire sur le marché et de celles du salaire de réserve autant pour le mari que pour la femme⁵. Les salaires au marché du mari et de la femme sont spécifiés respectivement aux équations (25) et (26); les salaires de réserve du mari et de la femme sont spécifiés aux équations (27) et (28).

$$\tilde{U}_h(1, \cdot) = W_h^m = \gamma_h^0 + \underset{(+)}{\gamma_h^1} AGEH + \underset{(+)}{\gamma_h^2} EDUCH + \underset{(-)}{\gamma_h^3} UNEM + \underset{(-)}{\gamma_h^4} RACE + \eta_h^m \quad (25)$$

$$\tilde{U}_h(1, \cdot) = W_w^m = \gamma_w^0 + \underset{(+)}{\gamma_w^1} AGEW + \underset{(+)}{\gamma_w^2} EDUCW + \underset{(-)}{\gamma_w^3} UNEM + \underset{(-)}{\gamma_w^4} RACE + \eta_w^m \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_h(0, Y_w) = W_h^r = & \tilde{\gamma}_h^0 + \underset{(+)}{\tilde{\gamma}_h^1} AGEH + \underset{(+)}{\tilde{\gamma}_h^2} EDUCH + \underset{(-)}{\tilde{\gamma}_h^3} UNEM + \underset{(+)}{\tilde{\gamma}_h^4} ASSET \\ & + \underset{(?)}{\tilde{\gamma}_h^5} KIDS13 + \underset{(?)}{\tilde{\gamma}_h^6} KIDS14 + \underset{(-)}{\tilde{\gamma}_h^7} RACE - \beta_h Y_w + \eta_h^r \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_w(0, Y_h) = W_w^r = & \tilde{\gamma}_w^0 + \underset{(+)}{\tilde{\gamma}_w^1} AGEW + \underset{(+)}{\tilde{\gamma}_w^2} EDUCW + \underset{(-)}{\tilde{\gamma}_w^3} UNEM + \underset{(+)}{\tilde{\gamma}_w^4} ASSET \\ & + \underset{(+)}{\tilde{\gamma}_w^5} KIDS13 + \underset{(?)}{\tilde{\gamma}_w^6} KIDS14 + \underset{(-)}{\tilde{\gamma}_w^7} RACE - \beta_w Y_h + \eta_w^r \end{aligned} \quad (28)$$

5. L'ensemble de variables explicatives utilisées dans notre analyse empirique n'offre aucune surprise ; la plupart des études empiriques qui utilisent des données croisées pour analyser la décision de participer au marché du travail retiennent à peu près le même ensemble de variables explicatives. (Voir par exemple, Ashenfelter et Heckman, 1974 ; Gronau, 1973 ; Heckman, 1974, 1976 ; Nakamura et Nakamura, 1981).

où

<i>AGEH</i>	Âge du mari
<i>AGEW</i>	Âge de la femme
<i>EDUCH</i>	Nombre d'années de scolarité du mari
<i>EDUCW</i>	Nombre d'années de scolarité de la femme
<i>UNEM</i>	Taux de chômage local
<i>RACE</i>	Variable fictive indiquant la race du couple ; 1 = noire ou hispanique, 0 autrement ⁶
<i>ASSET</i>	Revenus familiaux autre que revenus de salaire ⁷
<i>KIDS13</i>	Nombre d'enfants de moins de 14 ans dans la famille
<i>KIDS14</i>	Nombre d'enfants de 14 ans ou plus dans la famille

Le signe plus ou moins placé sous les variables explicatives des équations (25) à (28) indique le sens de l'effet que nous attendons de chacune des variables dans l'équation respective. Notons que, tandis que la décision de la femme de travailler ou pas n'a pas d'effet sur le salaire au marché du mari, elle joue sur le salaire de réserve de celui-ci. De même, la décision du mari de travailler ou pas influe sur le salaire de réserve de la femme mais pas sur son salaire au marché. À partir de (23) et (24) nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
 U_h(1,1) - U_h(0,1) &= \beta_h + U_h(1,0) - U_h(0,0) \\
 &= (\gamma_h^0 - \tilde{\gamma}_h^0) + (\gamma_h^1 - \tilde{\gamma}_h^1)AGEH + (\gamma_h^2 - \tilde{\gamma}_h^2)EDUCH + (\gamma_h^3 - \tilde{\gamma}_h^3)UNEM \quad (29) \\
 &+ (\gamma_h^4 - \tilde{\gamma}_h^4)RACE - \tilde{\gamma}_h^5ASSET - \tilde{\gamma}_h^6KIDS13 - \tilde{\gamma}_h^7KIDS14 + \beta_h
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 U_w(1,1) - U_w(0,1) &= \beta_w + U_w(1,0) - U_w(0,0) \\
 &= (\gamma_w^0 - \tilde{\gamma}_w^0) + (\gamma_w^1 - \tilde{\gamma}_w^1)AGEW + (\gamma_w^2 - \tilde{\gamma}_w^2)EDUCH + (\gamma_w^3 - \tilde{\gamma}_w^3)UNEM \quad (30) \\
 &+ (\gamma_w^4 - \tilde{\gamma}_w^4)RACE - \tilde{\gamma}_w^5ASSET - \tilde{\gamma}_w^6KIDS13 - \tilde{\gamma}_w^7KIDS14 + \beta_w
 \end{aligned}$$

Les données utilisées dans cette étude sur les couples mariés proviennent de la tranche 1982 d'une étude du *Survey Research Center* de l'Université du Michigan sur la dynamique des revenus entre 1968 et 1982. Nous n'avons conservé que 2020 dossiers relatifs à des couples mariés vivant aux États-Unis dont les deux membres devaient être sains de corps et d'esprit et âgés de moins de 64 ans ;

6. Le *Panel Study of Income Dynamics* ne demandait que la race du chef de famille ; si celui-ci était marié, il supposait que son conjoint était de la même race.

7. On trouvera dans Cotterman (1981) une discussion sur la convenance d'inclure les actifs dans une équation sur l'offre de main-d'œuvre.

il ne devait pas y avoir de personnes non apparentées dans le ménage. On trouvera à l'appendice B une description plus détaillée de l'étude et des critères de sélection que nous avons utilisés.

4.3 Résultats empiriques

Nous avons vu à la section 3 que notre méthode d'estimation exige que nous fournissions les valeurs initiales de $(\gamma_h, \beta_h, \gamma_w, \beta_w)$, que nous recherchions dans la grille les valeurs possibles de ρ et que nous effectuions des itérations jusqu'à ce qu'il y ait convergence. Ne possédant pas d'estimations antérieures solides de ρ , nous avons estimé toutes les valeurs entre $-0,9$ à $+0,9$ par paliers de $0,1$. Comme on peut le voir au Tableau 3, la valeur de ρ qui maximise la fonction de maximum de vraisemblance se situe dans l'intervalle $(-0,9, -0,7)$. Nous avons donc essayé toutes les valeurs contenues dans cet intervalle par paliers de $0,01$. La valeur qui maximise ρ étant de $-0,78$, c'est celle que nous reprenons au Tableau 3.

TABLEAU 3

Coefficient de corrélation (ρ)	Valeur de l'indicateur de maximum de vraisemblance
-0,9	-1 575,01
-0,8	-1 574,44
-0,78	-1 574,43
-0,7	-1 574,64
-0,6	-1 574,91
-0,5	-1 575,31
-0,4	-1 575,71
-0,3	-1 576,14
-0,2	-1 576,53
-0,1	-1 576,92
0	-1 577,30
0,1	-1 577,69
0,2	-1 578,06
0,3	-1 578,44
0,4	-1 578,78
0,5	-1 579,09
0,6	-1 579,48
0,7	-1 579,77
0,8	-1 580,23
0,9	-1 581,13

S'il peut paraître surprenant que la valeur qui maximise ρ ne soit pas positive, il faut se souvenir que ρ n'est pas simplement une mesure de la corrélation entre les variables omises dans les équations de la femme et du mari, mais qu'il dérive d'une relation plus compliquée donnée par l'hypothèse A2. Un test de probabilité de $\rho = 0$ par rapport à $\rho = -,78$ peut facilement être construit à partir du Tableau 3. Comme -2 (la valeur de l'indicateur de maximum de vraisemblance pour $\rho = 0$ – la valeur de l'indicateur de maximum de vraisemblance pour $\rho = -,78$) $\sim \chi^2_1$, nous pouvons rejeter l'hypothèse que $\rho = 0$ au niveau de 95 pour cent.

Le Tableau 5 énumère les coefficients estimés et les statistiques- t qui leur sont associées pour le cas $\rho = -,78$. Une comparaison du Tableau 5 avec le Tableau 4, qui donne les coefficients estimés et les statistiques- t pour $\rho = 0$, permet de constater que les signes des coefficients estimés sont très robustes pour ce qui est de ρ . Par le Tableau 5, nous constatons également que β_h et β_w sont tous deux significativement différents de zéro (β_h seulement au niveau de 90 pour cent), ce qui apporte un commencement de preuve à l'idée que la décision du mari de travailler ou pas dépend de la décision de la femme et vice-versa. Par (15), nous voyons que le coefficient négatif estimé pour β_h au Tableau 5 laisse entendre que, si la femme travaille, le salaire de réserve du mari augmente comme prévu. *A priori*, nous nous attendrions aussi à ce que l'estimation de β_w soit également négative; nous ne pouvons expliquer le résultat déconcertant d'un β_w positif.

Si nous revenons au Tableau 5, nous constatons que la plupart des coefficients qui expliquent la décision de la femme de travailler ou pas concordent avec nos attentes et qu'ils sont hautement significatifs. Par exemple, le revenu familial provenant d'ailleurs que des salaires, (*ASSET*) ainsi que le nombre d'enfants de 13 ans et moins (*KIDS13*) ont l'effet attendu d'augmenter le salaire qu'il faut offrir à une femme pour qu'elle accepte de travailler hors de la maison⁸. Le nombre d'enfants de 14 ans et plus (*KIDS14*) a également l'effet non déterminant que nous attendions sur le salaire de réserve de la femme : si une mère peut hésiter à chercher un emploi à l'extérieur quand elle a de jeunes adolescents, elle peut néanmoins se sentir obligée d'ajouter au revenu familial pour défrayer les études de ces enfants. Le coefficient positif attendu sur la variable fictive femme de race autre que blanche (*RACE*) indique que les femmes des minorités raciales commandent en général un salaire plus élevé sur le marché que celui qu'elle sont prêtes à accepter pour entrer sur le marché du travail; autrement dit, les femmes des minorités valent en moyenne plus sur le marché qu'elles ne croient valoir. Si on peut interpréter ce résultat en disant que la discrimination raciale est moins répandue sur le marché que les femmes des minorités ne sont portées à le croire, l'écart entre le salaire de réserve et le salaire au marché pourrait aussi être le legs de la discrimination passée. Les coefficients pour l'âge des femmes (*AGEW*) et la scolarité (*EDUCW*) concordent

8. Il faut remarquer que $\tilde{\gamma}_w^z$ et $\tilde{\gamma}_w^c$ entrent dans (30) avec des signes négatifs.

également avec nos attentes : si une augmentation de l'âge ou de la scolarité devrait faire augmenter le salaire sur le marché de la femme, les deux devraient aussi augmenter le salaire de réserve.

TABLEAU 4

 $\rho = 0$

Δ_h	Δ_w	Coefficient	Estimation	Statistique-t
		β_h	-1,21	-1,830
		β_w	1,28	2,130
<i>CONSTANT</i>		$(\gamma_h^0 - \tilde{\gamma}_h^0)$	0,886	1,240
<i>AGEH</i>		$(\gamma_h^1 - \tilde{\gamma}_h^1)$	0,018	2,280
<i>EDUCH</i>		$(\gamma_h^2 - \tilde{\gamma}_h^2)$	0,132	3,950
<i>UNEM</i>		$(\gamma_h^3 - \tilde{\gamma}_h^3)$	-0,039	-2,180
<i>RACEH</i>		$(\gamma_h^4 - \tilde{\gamma}_h^4)$	-0,099	-0,720
<i>ASSET</i>		$-\tilde{\gamma}_h^5$	0,383	1,150
<i>KIDS13</i>		$-\tilde{\gamma}_h^6$	-0,161	-2,440
<i>KIDS14</i>		$-\tilde{\gamma}_h^7$	0,111	0,942
	<i>CONSTANT</i>	$(\gamma_w^0 - \tilde{\gamma}_w^0)$	-0,667	-1,150
	<i>AGEW</i>	$(\gamma_w^1 - \tilde{\gamma}_w^1)$	-0,009	-2,500
	<i>EDUCW</i>	$(\gamma_w^2 - \tilde{\gamma}_w^2)$	0,032	2,610
	<i>UNEM</i>	$(\gamma_w^3 - \tilde{\gamma}_w^3)$	-0,008	-0,993
	<i>RACEW</i>	$(\gamma_w^4 - \tilde{\gamma}_w^4)$	0,398	5,220
	<i>ASSET</i>	$-\tilde{\gamma}_w^5$	-0,015	-2,670
	<i>KIDS13</i>	$-\tilde{\gamma}_w^6$	-0,262	-9,000
	<i>KIDS14</i>	$-\tilde{\gamma}_w^7$	-0,061	-1,290

NOTE : La valeur de l'indicateur de maximum de vraisemblance = - 1 577,30

TABLEAU 5

$\rho = -0,78$

Δ_h	Δ_w	Coefficient	Estimation	Statistique-t
		β_h	- 1,010	- 1,800
		β_w	2,400	7,780
<i>CONSTANT</i>		$(\gamma_h^0 - \tilde{\gamma}_h^0)$	0,649	0,974
<i>AGEH</i>		$(\gamma_h^0 - \tilde{\gamma}_h^0)$	0,018	2,170
<i>EDUCH</i>		$(\gamma_h^2 - \tilde{\gamma}_h^2)$	0,142	4,420
<i>UNEM</i>		$(\gamma_h^3 - \tilde{\gamma}_h^3)$	- 0,038	- 2,090
<i>RACEH</i>		$(\gamma_h^4 - \tilde{\gamma}_h^4)$	- 0,157	- 1,100
<i>ASSET</i>		$-\tilde{\gamma}_h^5$	0,383	1,240
<i>KIDS13</i>		$-\tilde{\gamma}_h^6$	- 0,085	- 1,500
<i>KIDS14</i>		$-\tilde{\gamma}_h^7$	0,172	1,440
	<i>CONSTANT</i>	$(\gamma_w^0 - \tilde{\gamma}_w^0)$	- 1,760	- 5,050
	<i>AGEW</i>	$(\gamma_w^1 - \tilde{\gamma}_w^1)$	- 0,010	- 2,790
	<i>EDUCW</i>	$(\gamma_w^2 - \tilde{\gamma}_w^2)$	0,030	2,530
	<i>UNEM</i>	$(\gamma_w^3 - \tilde{\gamma}_w^3)$	- 0,005	- 0,622
	<i>RACEW</i>	$(\gamma_w^4 - \tilde{\gamma}_w^4)$	0,412	5,550
	<i>ASSET</i>	$-\tilde{\gamma}_w^5$	- 0,014	- 2,640
	<i>KIDS13</i>	$-\tilde{\gamma}_w^6$	- 0,250	- 8,610
	<i>KIDS14</i>	$-\tilde{\gamma}_w^7$	- 0,062	1,320

NOTE : La valeur de l'indicateur de maximum de vraisemblance = - 1 574,43

Si nous nous tournons maintenant vers les variables que nous avons utilisées pour expliquer la décision du mari de travailler ou pas, nous constatons que, si certains coefficients n'ont pas de signification, les variables au sujet desquelles nous avons le plus d'attentes semblent significatives. Par exemple, les coefficients attachés à l'âge du mari (*AGEH*) et au taux de chômage local (*UNEM*) mesurent la différence entre le salaire sur le marché et le salaire de réserve ; si le mari se comporte rationnellement, ces deux coefficients devraient se rapprocher de zéro et c'est le cas ici. Le coefficient positif estimé à propos du niveau de scolarité du mari (*EDUCH*) est déconcertant ; on s'attendrait *a priori* à ce qu'une augmentation de la scolarité fasse augmenter aussi bien le salaire au marché du mari que son salaire de réserve. Serait-il possible que la scolarité additionnelle soit perçue davantage comme un bien de consommation que comme un bien d'investissement⁹?

5. GÉNÉRALISATIONS

En premier lieu, il est évident que notre modèle peut être généralisé pour permettre aux coefficients de pondération (a_i, b_i, c_j, d_k) de dépendre de variables explicatives quelconques. Par exemple :

$$\log a_{1t} = \mu_t^a + z_t' \delta^a$$

où μ_t^a est un paramètre normalisateur qui fait en sorte que $a_{1t} + a_{2t} = 1$ et que z_t représente certaines caractéristiques choisies des ménages. (La forme fonctionnelle du logit est choisie de façon à ce que $0 < a_{1t} < 1$ et que $0 < a_{2t} < 1$.) Le modèle simultané obtenu ainsi contient notre modèle précédent qui suppose que les coefficients de pondération des paramètres sont constants pour toutes les observations ou, ce qui est équivalent, que les paramètres $\delta^a, \delta^b, \delta^c$, et δ^d sont égaux à zéro à l'exception des paramètres associés au terme constant. Il s'ensuit que cette hypothèse peut être testée. Il serait également intéressant de vérifier si $\delta^a = \delta^b = \delta^c = \delta^d = 0$ (y compris le terme constant). De fait, si cette hypothèse n'est pas rejetée, cela voudrait dire que les données justifieraient la conclusion que, quand il y a deux équilibres de Nash ou qu'il n'y en a aucun, ces deux équilibres de Nash ou tous les quatre résultats possibles sont respectivement également probables, comme nous le supposions.

Notre deuxième généralisation n'est pas sans rapport avec la précédente. Elle concerne l'interprétation à donner aux coefficients de pondération. Dans les développements précédents, nous nous sommes limités aux équilibres de Nash dans des stratégies pures. Or, une classe de stratégies plus vaste est généralement retenue en théorie des jeux (voir, par exemple, Owen, 1982). Dans cette démarche plus générale, le hasard pénètre le modèle statistique pour deux raisons : (i) la nature aléatoire de l'échantillonnage (ou, de manière équivalente, l'ignorance de

9. On trouvera notamment dans Lazear (1977) une discussion de cette hypothèse.

l'économètre) et (ii) le caractère aléatoire des stratégies. Comment le modèle simultané que nous proposons peut-il être interprété quand les stratégies mixtes sont permises ?

Premièrement, il vaut la peine de rappeler que, dans douze cas sur seize, il n'y a qu'un seul équilibre de Nash (voir le tableau 1). De plus, il peut être établi que, quand il y a un seul équilibre de Nash dans les stratégies pures, il n'y a aucun équilibre de Nash dans les stratégies mixtes (voir l'appendice 1, lemme 1). Il s'ensuit que, dans ces douze cas, le fait de nous restreindre aux stratégies pures n'a aucune importance.

En revanche, quand il y a deux équilibres de Nash, ce qui est le cas quand les fonctions de réaction du mari et de la femme sont de (H_2, W_2) ou (H_3, W_3) , il peut y avoir un équilibre de Nash dans une stratégie mixte. On peut toutefois démontrer que, lorsqu'il en est ainsi, les utilités (attendues) enregistrées par chaque individu qui applique les stratégies mixtes d'équilibre de Nash sont moindres que les utilités qu'il obtiendrait s'il jouait au moins une des deux stratégies pures d'équilibre de Nash dont il dispose (voir l'appendice 1, lemme 2). Cela justifie qu'on distribue, comme nous l'avons fait, la probabilité de (H_2, W_2) seulement sur, disons, les résultats (1,1) et (0,0) (voir le tableau 1 et les équations (4) et (7)).

La troisième possibilité est qu'il n'y ait aucun équilibre de Nash dans les stratégies pures. Cela se produit quand les fonctions de réaction du mari et de la femme sont (H_2, W_3) ou (H_3, W_2) . Dans ce cas, il peut être démontré qu'il y a un seul équilibre de Nash dans les stratégies mixtes (Voir l'appendice 1, lemme 3). Posons (q_{h0}, q_{h1}) , où $q_{h0} + q_{h1} = 1$, caractérise le caractère aléatoire de travailler ou ne pas travailler pour le mari; (q_{w0}, q_{w1}) est défini de la même façon. Les coefficients de pondération c_1, c_2, c_3 et c_4 que nous avons définis à la section 3 peuvent alors s'interpréter comme suit :

$$\begin{aligned} c_1 &= q_{h0} q_{w0} & , & & c_2 &= q_{h1} q_{w0} & , \\ c_3 &= q_{h0} q_{w1} & , & & c_4 &= q_{h1} q_{w1} & . \end{aligned}$$

Une interprétation semblable se justifie pour les coefficients de pondération d_1, d_2, d_3, d_4 , associés à la paire (H_3, W_2) . Il s'ensuit que le modèle proposé à la section 2 peut être interprété comme un modèle dans lequel les coefficients de pondération c et d restent non contraints. Il est évidemment possible d'effectuer une spécification plus étroite du modèle. De fait, puisque l'équilibre de Nash des stratégies mixtes est unique, il s'ensuit que les q et donc les c (ou les d) sont des fonctions des paramètres structurels $(\gamma^h, \beta^h, \gamma^w, \beta^w, \rho)$.

CONCLUSION

Nous avons proposé ici une méthode différente pour formuler des modèles d'équations simultanées pour variables endogènes qualitatives. Contrairement aux modèles simultanés plus anciens, notre modèle n'impose pas de conditions de cohérence logique aux paramètres. En outre, il se distingue par le fait que le modèle simultané découle d'un comportement d'optimisation au sein du cadre d'utilité aléatoire.

Notre approche met également l'accent sur le concept d'équilibre utilisé pour définir le processus de production des variables observées Y_h et Y_w . Nous avons vu à la section précédente que le modèle proposé peut admettre d'emblée les équilibres de Nash dans les stratégies mixtes. D'autres conceptions de l'équilibre sont toutefois envisageables. Par exemple, on pourrait imaginer qu'un des joueurs joue d'abord, en auquel cas un équilibre de Stackelbert pourrait être utilisé (voir Vuong, 1982). Il serait également possible de supposer que les individus jouent en coopération de façon à maximiser la fonction d'utilité ou la récompense commune. Ces derniers modèles auraient certes pour effet de détruire la simultanéité, mais il serait intéressant d'imaginer les procédures statistiques qui permettraient de discriminer entre eux. S'il reste incontestablement beaucoup de travail à faire, nous croyons que le modèle que nous avons proposé ici représente une première étape dans l'intégration des résultats de la théorie des jeux et ceux de la modélisation des choix discrets.

Finalement, nous avons présenté une application empirique, celle de la décision commune d'un mari et d'une femme de participer ou non au marché du travail. Nous pensons que notre étude apporte quelque chose à ce problème parce que nous avons modélisé explicitement le comportement d'un couple dans un cadre de théorie des jeux, alors que les travaux sur le sujet avaient jusqu'ici, ou bien tenu la décision du mari comme exogène, ou bien spécifié les décisions du mari et de la femme de participer ou non au marché du travail en tant que résultat d'une fonction d'utilité commune. Même si notre modèle est franchement compliqué, comme on le constatera par les exigences de programmation expliquées à l'appendice A, nous sommes très encouragés par la robustesse des résultats que nous avons obtenus, tant pour ce qui est du signe des coefficients que nous pouvions prévoir à cause de nombreux éléments de preuve antérieurs que des statistiques- t hautement significatives.

ANNEXE A

A. CONDITIONS DES FONCTIONS DE RÉACTION DU MARI

À l'aide de la figure 1, nous pouvons caractériser la fonction de réaction H_1 par les deux conditions suivantes : $\tilde{U}_h(1,0) - \tilde{U}_h(0,0) < 0$ et $\tilde{U}_h(1,1) - \tilde{U}_h(0,1) < 0$. En appliquant les hypothèses 1 et 2, nous pouvons dire que ces conditions sont respectivement équivalentes à $\epsilon_h < -\Delta_h$ et $\epsilon_h < -\Delta_h - \beta_h$; ces expressions peuvent être combinées de façon à nous donner : $\epsilon_h < -\Delta_h - \max(0, \beta_h)$.

La fonction de réaction H_2 est caractérisée par $\tilde{U}_h(1,0) - \tilde{U}_h(0,0) < 0$ et par $\tilde{U}_h(1,1) - \tilde{U}_h(0,1) \geq 0$, ce qui est équivalent à $\epsilon_h < -\Delta_h$ et $\epsilon_h \geq -\Delta_h - \beta_h$, respectivement. Quand nous combinons ces expressions, nous obtenons le résultat rapporté dans le texte.

La fonction de réaction H_3 est caractérisée par $\tilde{U}_h(1,1) - \tilde{U}_h(0,1) < 0$ et par $\tilde{U}_h(1,0) - \tilde{U}_h(0,0) \geq 0$. En appliquant les hypothèses 1 et 2, nous pouvons dire que ces conditions sont équivalentes à $\epsilon_h < -\Delta_h - \beta_h$ et $\epsilon_h \geq -\Delta_h$, respectivement. Quand nous combinons ces expressions, nous obtenons le résultat rapporté dans le texte.

La fonction de réaction H_4 est caractérisée par $\tilde{U}_h(1,0) - \tilde{U}_h(0,0) \geq 0$ et $\tilde{U}_h(1,1) - \tilde{U}_h(0,1) \geq 0$, ce qui est équivalent à $\epsilon_h \geq -\Delta_h$ and $\epsilon_h \geq -\Delta_h - \beta_h$, respectivement. Quand nous combinons ces expressions, nous obtenons $\epsilon_h \geq -\Delta_h - \min(0, \beta_h)$.

Les fonctions de réaction de la femme sont dérivées de la même façon.

B. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1

Il découle du tableau 2 et des conditions des fonctions de réaction de la femme que certaines fonctions de réaction ne peuvent se produire conformément aux signes de β_h et de β_w . Par exemple, quand $\beta_h \geq 0$ et $\beta_w \geq 0$, les fonctions de réaction H_3 et W_3 ne peuvent se produire. Il s'ensuit des équations (4) à (7) que, quand $\beta_h \geq 0$ et $\beta_w \geq 0$, nous obtenons :

$$Pr(0,0) = Pr(H_1, W_1) + Pr(H_1, W_2) + Pr(H_2, W_1) + a_1 Pr(H_2, W_2),$$

$$Pr(1,0) = Pr(H_4, W_1),$$

$$Pr(0,1) = Pr(H_1, W_4),$$

$$Pr(1,1) = Pr(H_2, W_4) + Pr(H_4, W_2) + Pr(H_4, W_4) + a_2 Pr(H_2, W_2).$$

De même, quand $\beta_h \geq 0$ et que $\beta_w < 0$, les fonctions de réaction H_3 et W_2 ne se produisant jamais, nous avons :

$$Pr(0,0) = Pr(H_1, W_1) + Pr(H_2, W_1) + c_1 Pr(H_2, W_3),$$

$$Pr(1,0) = Pr(H_4, W_1) + Pr(H_4, W_3) + c_2 Pr(H_2, W_3),$$

$$Pr(0,1) = Pr(H_1, W_3) + Pr(H_1, W_4) + c_3 Pr(H_2, W_3),$$

$$Pr(1,1) = Pr(H_2, W_4) + Pr(H_4, W_2) + Pr(H_4, W_4) + c_4 Pr(H_2, W_3).$$

Quand $\beta_h < 0$ et que $\beta_w \geq 0$, les fonctions de réaction H_2 et W_3 ne se produisant jamais, nous avons :

$$Pr(0,0) = Pr(H_1, W_1) + Pr(H_1, W_2) + d_1 Pr(H_3, W_2),$$

$$Pr(1,0) = Pr(H_3, W_1) + Pr(H_4, W_1) + d_2 Pr(H_3, W_2),$$

$$Pr(0,1) = Pr(H_1, W_4) + Pr(H_3, W_4) + d_3 Pr(H_3, W_2),$$

$$Pr(1,1) = Pr(H_4, W_2) + Pr(H_4, W_4) + d_4 Pr(H_3, W_2).$$

Enfin, quand $\beta_h < 0$ et que $\beta_w < 0$, les fonctions de réaction H_2 et W_2 ne se produisant jamais, nous avons :

$$Pr(0,0) = Pr(H_1, W_1),$$

$$Pr(1,0) = Pr(H_3, W_1) + Pr(H_4, W_1) + Pr(H_4, W_3) + b_1 Pr(H_3, W_3),$$

$$Pr(0,1) = Pr(H_1, W_3) + Pr(H_1, W_4) + Pr(H_3, W_4) + b_2 Pr(H_3, W_3),$$

$$Pr(1,1) = Pr(H_4, W_4).$$

Il suffit maintenant d'utiliser les conditions appliquées à ϵ_h et ϵ_w pour obtenir des fonctions de réaction particulières pour le mari et la femme. Pour chacune des quatre paires de signes possibles de β_h et de β_w , les figures 3a à 3d montrent les aires sur lesquelles la densité bivariée normale de (ϵ_h, ϵ_w) doit être intégrée pour obtenir les quatre probabilités $Pr(0,0)$, $Pr(1,0)$, $Pr(0,1)$ et $Pr(1,1)$. (Ces aires sont délimitées par des traits épais, tandis que des traits plus fins séparent les aires correspondant aux réalisations des paires particulières de fonctions de réaction.)

Il s'ensuit que les probabilités $Pr(0,0)$, $Pr(1,0)$, $Pr(0,1)$ et $Pr(1,1)$ sont données par les équations (8) à (11).

C.Q.F.D.

FIGURE 3A

$$\beta_H \geq 0, \beta_w \geq 0$$

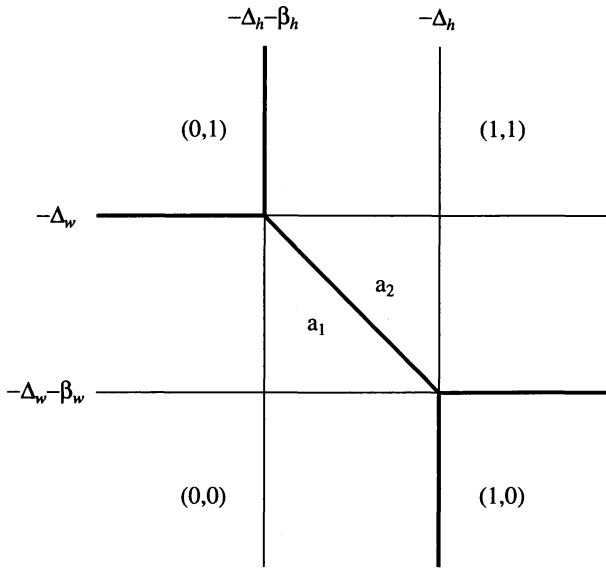


FIGURE 3B

$$\beta_H \geq 0, \beta_w < 0$$

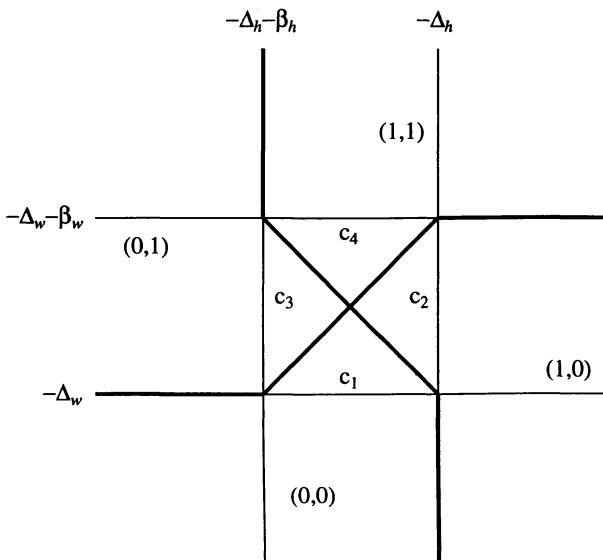


FIGURE 3C

$$\beta_H < 0, \beta_w \geq 0$$

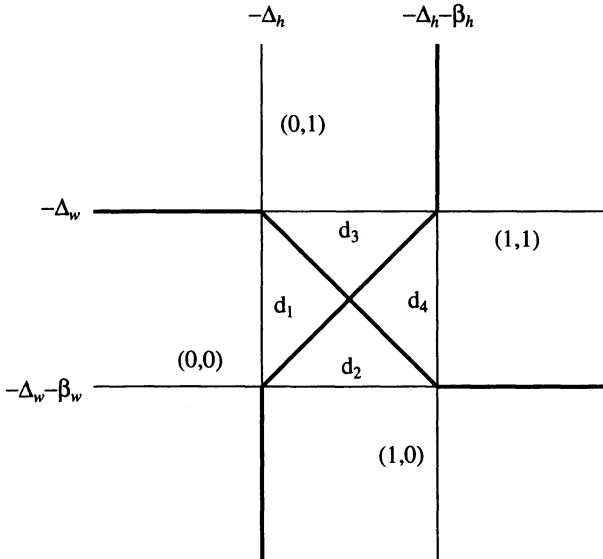
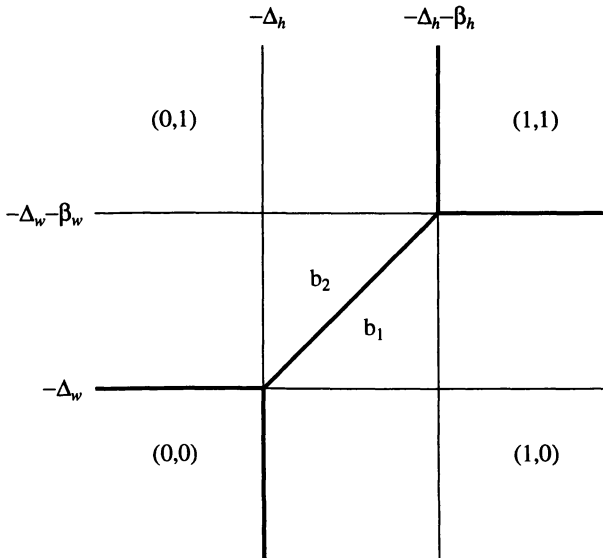


FIGURE 3D

$$\beta_H < 0, \beta_w < 0$$



C. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2

Puisque (ϵ_h, ϵ_w) ont une distribution conjointe continue, il découle des conditions des fonctions de réaction du mari et de la femme (Tableau 2) que, si $\beta_h = 0$ ou si $\beta_w = 0$, H_2, H_3, W_2 ou W_3 auront zéro probabilité de se produire.

À l'inverse, si la paire (H_2, W_2) a zéro probabilité de se produire, il découle du tableau 2 que, ou bien $\beta_h \leq 0$, ou bien $\beta_w \leq 0$, c'est-à-dire que $\beta_h \cdot \beta_w \geq 0$. De même, si la paire (H_2, W_3) a zéro probabilité de se produire, il en découle que, ou bien $\beta_h \leq 0$, ou bien $\beta_w \geq 0$, c'est-à-dire que $\beta_h \cdot \beta_w \leq 0$. Par conséquent, $\beta_h \cdot \beta_w = 0$.

C.Q.F.D.

D. PREMIÈRES DÉRIVÉES PARTIELLES DES PROBABILITÉS $Pr(i,j)$

Pour plus de concision, récrivons les quatre probabilités $Pr(i,j)$ énumérées dans la proposition 1 en utilisant les variables indicatrices I_h et I_w que nous définissons comme suit :

$$I_h = \begin{matrix} 1 & \text{si } \beta_h > 0 \\ 0 & \text{si } \beta_h < 0 \end{matrix} \quad \text{et } I_w = \begin{matrix} 1 & \text{si } \beta_w > 0 \\ 0 & \text{si } \beta_w < 0 \end{matrix} .$$

Nous obtenons alors :

$$Pr(0,0) = F(-\Delta_h, -\Delta_w, \rho) - I_h I_w a_2 I_{++} + I_h (1 - I_w) c_1 I_{+-} + (1 - I_h) I_w d_1 I_{-+},$$

$$Pr(1,0) = F(\Delta_h, -\Delta_w - \beta_w, -\rho) + I_h (1 - I_w) c_2 I_{+-} + (1 - I_h) I_w d_2 I_{-+} - (1 - I_h) (1 - I_w) b_2 I,$$

$$Pr(0,1) = F(-\Delta_h - \beta_h, \Delta_w, -\rho) + I_h (1 - I_w) c_3 I_{+-} + (1 - I_h) I_w d_3 I_{-+} - (1 - I_h) (1 - I_w) b_1 I,$$

$$Pr(1,1) = F(\Delta_h + \beta_h, \Delta_w + \beta_w, \rho) - I_h I_w a_1 I_{++} + I_h (1 - I_w) c_4 I_{+-} + (1 - I_h) I_w d_4 I_{-+}.$$

Posons que Φ est le c.d.f. normal univarié et que ϕ est le p.d.f. correspondant

En utilisant les identités $\frac{\partial F(x, y, \rho)}{\partial x} = \phi(x)\Phi(y^* - \rho x^*)$ et $\frac{\partial F(x, y, \rho)}{\partial y} = \phi(y)\Phi(x^* - \rho y^*)$,

dans lesquelles une quantité assortie d'un «*» signifie que cette quantité est divisée par la racine carrée de $1 - \rho^2$, nous obtenons les premières dérivées partielles des probabilités $Pr(i,j)$:

$$\frac{\partial F(-\Delta_h, -\Delta_w, \rho)}{\partial \beta_h} = 0$$

$$\frac{\partial F(-\Delta_h, -\Delta_w, \rho)}{\partial \beta_w} = 0$$

$$\frac{\partial F(-\Delta_h, -\Delta_w, \rho)}{\partial \gamma_h} = -\phi(\Delta_h)\Phi(-\Delta_w^* - \rho\Delta_h^*)x_h,$$

$$\frac{\partial F(-\Delta_h, -\Delta_w, \rho)}{\partial \gamma_w} = -\phi(\Delta_w)\Phi(-\Delta_h^* - \rho\Delta_w^*)x_w;$$

$$\frac{\partial F(\Delta_h, -\Delta_w - \beta_w, -\rho)}{\partial \beta_h} = 0,$$

$$\frac{\partial F(\Delta_h, -\Delta_w - \beta_w, -\rho)}{\partial \beta_w} = -\phi(\Delta_w + \beta_w)\Phi(\Delta_h^* - \rho(\Delta_w^* + \beta_w^*)),$$

$$\frac{\partial F(\Delta_h, -\Delta_w - \beta_w, -\rho)}{\partial \gamma_h} = \phi(\Delta_h)\Phi(\Delta_w^* - \beta_w^* + \rho\Delta_h^*)x_h,$$

$$\frac{\partial F(\Delta_h, -\Delta_w - \beta_w, -\rho)}{\partial \gamma_w} = -\phi(\Delta_w + \beta_w)\Phi(\Delta_h^* - \rho(\Delta_w^* + \beta_w^*))x_w;$$

$$\frac{\partial F(-\Delta_h - \beta_h, \Delta_w, -\rho)}{\partial \beta_h} = -\phi(\Delta_h + \beta_h)\Phi(\Delta_w^* - \rho(\Delta_h^* + \beta_h^*)),$$

$$\frac{\partial F(-\Delta_h - \beta_h, \Delta_w, -\rho)}{\partial \beta_w} = 0,$$

$$\frac{\partial F(-\Delta_h - \beta_h, \Delta_w, -\rho)}{\partial \gamma_h} = -\phi(\Delta_h + \beta_h)\Phi(\Delta_w^* - \rho(\Delta_h^* + \beta_h^*))x_h,$$

$$\frac{\partial F(-\Delta_h - \beta_h, \Delta_w, -\rho)}{\partial \gamma_w} = \phi(\Delta_w)\Phi(-\Delta_h^* - \beta_h^* + \rho\Delta_w^*)x_w;$$

$$\frac{\partial F(\Delta_h + \beta_h, \Delta_w + \beta_w, \rho)}{\partial \beta_h} = \phi(\Delta_h + \beta_h)\Phi(\Delta_w^* + \beta_w^* - \rho(\Delta_h^* + \beta_h^*)),$$

$$\frac{\partial F(\Delta_h + \beta_h, \Delta_w + \beta_w, \rho)}{\partial \beta_w} = \phi(\Delta_w + \beta_w)\Phi(\Delta_h^* + \beta_h^* - \rho(\Delta_w^* + \beta_w^*)),$$

$$\frac{\partial F(\Delta_h + \beta_h, \Delta_w + \beta_w, \rho)}{\partial \gamma_h} = \phi(\Delta_h + \beta_h)\Phi(\Delta_w^* + \beta_w^* - \rho(\Delta_h^* + \beta_h^*))x_h,$$

$$\frac{\partial F(\Delta_h + \beta_h, \Delta_w + \beta_w, \rho)}{\partial \gamma_w} = \phi(\Delta_w + \beta_w)\Phi(\Delta_h^* + \beta_h^* - \rho(\Delta_w^* + \beta_w^*))x_w;$$

et

$$\frac{\partial I_{++}}{\partial \beta_h} = -\phi(\Delta_h + \beta_h)\Phi(-\Delta_w^* - \beta_w^* + \rho(\Delta_h^* + \beta_h^*)) + \phi(\Delta_h + \beta_h) \Phi(-\Delta_w^* + \rho(\Delta_h^* + \beta_h^*)),$$

$$\frac{\partial I_{++}}{\partial \beta_w} = -\phi(\Delta_w + \beta_w)\Phi(-\Delta_h^* - \beta_h^* + \rho(\Delta_w^* + \beta_w^*)) + \phi(\Delta_w + \beta_w) \Phi(-\Delta_h^* + \rho(\Delta_w^* + \beta_w^*)),$$

$$\frac{\partial I_{++}}{\partial \gamma_h} = \left[-\phi(\Delta_h)\Phi(-\Delta_w^* + \rho\Delta_h^*) - \phi(\Delta_h + \beta_h)\Phi(-\Delta_w^* - \beta_w^* + \rho(\Delta_h^* + \beta_h^*)) \right. \\ \left. + \phi(\Delta_h)\Phi(-\Delta_w^* - \beta_w^* + \rho\Delta_h^*) + \phi(\Delta_h + \beta_h)\Phi(-\Delta_w^* + \rho(\Delta_h^* + \beta_h^*)) \right] x_h,$$

$$\frac{\partial I_{++}}{\partial \gamma_w} = \left[-\phi(\Delta_w)\Phi(-\Delta_h^* + \rho\Delta_w^*) - \phi(\Delta_w + \beta_w)\Phi(-\Delta_h^* - \beta_h^* + \rho(\Delta_w^* + \beta_w^*)) \right. \\ \left. + \phi(\Delta_w)\Phi(-\Delta_h^* - \beta_h^* + \rho\Delta_w^*) + \phi(\Delta_w + \beta_w)\Phi(-\Delta_h^* + \rho(\Delta_w^* + \beta_w^*)) \right] x_w,$$

avec

$$\frac{\partial I_{+-}}{\partial(\cdot)} = \frac{\partial I_{-+}}{\partial(\cdot)} = \frac{\partial I_{++}}{\partial(\cdot)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial I_{--}}{\partial(\cdot)} = \frac{\partial I_{++}}{\partial(\cdot)}.$$

E. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3

Posons que $Z_t = (Y_{ht}, Y_{wt}, X'_{ht}, X'_{wt})$ et que $\theta = (\beta_h, \beta_w, \gamma_h, \gamma_w)$. Définissons :

$$B \equiv E \left[\sum_{t=1}^T \frac{\partial \log f(Z_t, \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \log f(Z_t, \theta)}{\partial \theta'} \right] = \sum_{t=1}^T B_t.$$

Reprenons de la section 3, mais en omettant l'indice t , les expressions suivantes :

$$\frac{\partial \log f(Z, \theta)}{\partial \theta} = \frac{Y_h Y_w}{Pr(1, 1)} \frac{\partial Pr(1, 1)}{\partial \theta} + \frac{Y_h (1 - Y_w)}{Pr(1, 0)} \frac{\partial Pr(1, 0)}{\partial \theta} \\ + \frac{(1 - Y_h) Y_w}{Pr(0, 1)} \frac{\partial Pr(0, 1)}{\partial \theta} + \frac{(1 - Y_h) (1 - Y_w)}{Pr(0, 0)} \frac{\partial Pr(0, 0)}{\partial \theta}.$$

B_i est donc donné par :

$$E \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{\partial \log f}{\partial \beta_h} & \frac{\partial \log f}{\partial \beta_h} & \frac{\partial \log f}{\partial \beta_h} & \frac{\partial \log f}{\partial \beta_w} & \frac{\partial \log f}{\partial \beta_h} & \frac{\partial \log f}{\partial \gamma'_h} & \frac{\partial \log f}{\partial \beta_h} & \frac{\partial \log f}{\partial \gamma'_w} \\ \frac{\partial \log f}{\partial \log f} & \frac{\partial \log f}{\partial \log f} & \frac{\partial \log f}{\partial \log f} & \frac{\partial \log f}{\partial \log f} & \frac{\partial \log f}{\partial \log f} & \frac{\partial \log f}{\partial \log f} & \frac{\partial \log f}{\partial \log f} & \frac{\partial \log f}{\partial \log f} \\ \frac{\partial \beta_w}{\partial \log f} & \frac{\partial \beta_h}{\partial \log f} & \frac{\partial \beta_w}{\partial \log f} & \frac{\partial \beta_w}{\partial \log f} & \frac{\partial \beta_h}{\partial \log f} & \frac{\partial \gamma'_h}{\partial \log f} & \frac{\partial \beta_w}{\partial \log f} & \frac{\partial \gamma'_w}{\partial \log f} \\ \frac{\partial \gamma_h}{\partial \log f} & \frac{\partial \beta_h}{\partial \log f} & \frac{\partial \gamma_h}{\partial \log f} & \frac{\partial \beta_w}{\partial \log f} & \frac{\partial \gamma_h}{\partial \log f} & \frac{\partial \gamma'_h}{\partial \log f} & \frac{\partial \gamma_h}{\partial \log f} & \frac{\partial \gamma'_w}{\partial \log f} \\ \frac{\partial \beta_w}{\partial \beta_h} & \frac{\partial \beta_h}{\partial \beta_h} & \frac{\partial \beta_w}{\partial \beta_h} & \frac{\partial \beta_w}{\partial \beta_h} & \frac{\partial \beta_w}{\partial \beta_h} & \frac{\partial \gamma'_h}{\partial \beta_h} & \frac{\partial \beta_w}{\partial \beta_h} & \frac{\partial \gamma'_w}{\partial \beta_h} \end{array} \right].$$

Par exemple, $\frac{\partial \log f}{\partial \beta_h} \frac{\partial \log f}{\partial \beta_h}$ est donné par :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{Y_h Y_w}{Pr(1,1)} \frac{\partial Pr(1,1)}{\partial \beta_h} \right]^2 + \left[\frac{Y_h(1-Y_w)}{Pr(1,0)} \frac{\partial Pr(1,0)}{\partial \beta_h} \right]^2 \\ & + \left[\frac{(1-Y_h)Y_w}{Pr(0,1)} \frac{\partial Pr(0,1)}{\partial \beta_h} \right]^2 + \left[\frac{(1-Y_h)(1-Y_w)}{Pr(0,0)} \frac{\partial Pr(0,0)}{\partial \beta_h} \right]^2 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que Y_h et Y_w ne peuvent prendre que les valeurs zéro ou un. Y_h et Y_w étant des variables aléatoires où $Y_h = i$, $Y_w = j$ avec une probabilité de $Pr(i,j), i,j \in \{0,1\}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\partial \log f}{\partial \beta_h} \frac{\partial \log f}{\partial \beta_h} \right] &= \frac{1}{Pr(1,1)} \left[\frac{\partial Pr(1,1)}{\partial \beta_h} \right]^2 \\ &+ \frac{1}{Pr(1,0)} \left[\frac{\partial Pr(1,0)}{\partial \beta_h} \right]^2 + \frac{1}{Pr(0,1)} \left[\frac{\partial Pr(0,1)}{\partial \beta_h} \right]^2 + \frac{1}{Pr(0,0)} \left[\frac{\partial Pr(0,0)}{\partial \beta_h} \right]^2. \end{aligned}$$

Procédant de manière analogue, les termes restants de B sont donnés par :

$$E \left[\frac{\partial \log f}{\partial \theta_k} \frac{\partial \log f}{\partial \theta_h} \right] = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \frac{1}{Pr(i,j)} \frac{\partial Pr(i,j)}{\partial \theta_k} \frac{\partial Pr(i,j)}{\partial \theta_h}$$

Remarquons que B peut se décomposer en $B = A'DA$ quand A est de dimension $4T$ par K , $K = k_h + K_w + 2$, qui a dans son t -ième bloc :

$$E \begin{bmatrix} \frac{\partial Pr_t(1,1)}{\partial \beta_h} & \frac{\partial Pr_t(1,1)}{\partial \beta_w} & \frac{\partial Pr_t(1,1)}{\partial \gamma'_h} & \frac{\partial Pr_t(1,1)}{\partial \gamma'_w} \\ \frac{\partial Pr_t(1,0)}{\partial \beta_h} & \frac{\partial Pr_t(1,0)}{\partial \beta_w} & \frac{\partial Pr_t(1,0)}{\partial \gamma'_h} & \frac{\partial Pr_t(1,0)}{\partial \gamma'_w} \\ \frac{\partial Pr_t(0,1)}{\partial \beta_h} & \frac{\partial Pr_t(0,1)}{\partial \beta_w} & \frac{\partial Pr_t(0,1)}{\partial \gamma'_h} & \frac{\partial Pr_t(0,1)}{\partial \gamma'_w} \\ \frac{\partial Pr_t(0,0)}{\partial \beta_h} & \frac{\partial Pr_t(0,0)}{\partial \beta_w} & \frac{\partial Pr_t(0,0)}{\partial \gamma'_h} & \frac{\partial Pr_t(0,0)}{\partial \gamma'_w} \end{bmatrix}$$

et que D est un bloc diagonal d'une matrice d'ordre $4T$, le t -ième bloc étant donné par :

$$\begin{bmatrix} Pr_t(1,1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Pr_t(1,0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pr_t(0,1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Pr_t(0,0) \end{bmatrix}^{-1}$$

Le modèle sera identifié si et seulement si B est non singulier (voir, par exemple, Rothenberg, 1971 et Bowden, 1973). Puisque D est de plain rang et que $4T > K$, une condition nécessaire et suffisante est que A ait plein rang de colonne. À la partie D de l'annexe A, nous avons vu que les dérivées partielles de $Pr_t(i,j)$ relatives au vecteur θ dépendent des signes de β_h et de β_w ; nous devons donc vérifier que la matrice A est non singulière dans tous les cas.

Cas 1 : $\beta_h > 0, \beta_w > 0$.

Si nous substituons dans A_t les dérivées partielles en utilisant la notation $e^i, f^i, g^i, h^i, i = h, w$, établie dans le texte, la matrice A_t peut s'écrire comme suit :

$$\begin{bmatrix} e_t^h - a_1(e_t^h + h_t^h) & e_t^w - a_1(e_t^w + g_t^w) & [e_t^h - a_1(e_t^h - f_t^h + g_t^h + h_t^h)]x'_{ht} \\ 0 & g_t^w & g_t^h x'_{ht} \\ h_t^h & 0 & h_t^h x'_{ht} \\ -a_2(e_t^h + h_t^h) & -a_2(e_t^w + g_t^w) & [-f_t^h - a_2(e_t^h - f_t^h + g_t^h + h_t^h)]x'_{ht} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [e_t^w - a_1(e_t^w - f_t^w + g_t^w + h_t^w)] \\ g_t^w x'_{wt} \\ h_t^w x'_{wt} \\ [-f_t^w - a_2(e_t^w - f_t^w + g_t^w + h_t^w)]x'_{wt} \end{bmatrix}$$

Effectuons maintenant les opérations algébriques suivantes :

- (i) Soustrayons la ligne 4 de la ligne 1 en notant que $a_1 = a_2 = 1/2$.
- (ii) Additionnons $1/2$ de la ligne 1 à la ligne 4,
- (iii) Additionnons $1/2$ (ligne 2 + ligne 3) à la ligne 4.
- (iv) Intervenons les colonnes 2 et 3.

Si nous omettons la ligne 4, qui est devenu identiquement nulle, nous obtenons :

$$\bar{A}_t = \begin{bmatrix} e_t^h & (e_t^h + f_t^h)x'_{ht} & e_t^w & (e_t^w + f_t^h)x'_{wt} \\ 0 & g_t^h x'_{ht} & g_t^w & g_t^w x'_{wt} \\ h_t^h & h_t^h x'_{ht} & 0 & h_t^w x'_{wt} \end{bmatrix}.$$

Décomposons maintenant la matrice résultante \tilde{A} en matrice partitionnée.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline D_h \bar{X}_h & D_w \bar{X}_w \\ \hline \end{array} \right]$$

où D_h et D_w sont toutes deux des matrices à bloc diagonal d'ordre $3T$, les t -ièmes blocs de D_h et de D_w étant D_{ht} et D_{wt} , respectivement, comme nous l'avons vu dans le texte. Puisque D_h et D_w sont tous deux non singulières, \bar{A} peut se récrire pour fins d'identification sous la forme :

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline \bar{X}_h & D_h^{-1} D_w \bar{X}_w \\ \hline \end{array} \right].$$

Cas 2 : $B_h < 0, B_w < 0$.

Substituant dans A_t les dérivées partielles que nous avons obtenues à l'appendice A et utilisant une fois de plus les $e_t^i, f_t^i, g_t^i, h_t^i, i = h, w$, que nous avons établis dans le texte, effectuons les opérations algébriques suivantes sur la matrice A :

- (i) Soustrayons de la ligne 3 $1/2$ de la ligne 2, en notant que $b_1 = b_2 = 1/2$.
- (ii) Additionnons $1/2$ (ligne 1 + ligne 3 + ligne 4) à la ligne 2.
- (iii) Multiplions la ligne 2 par 2 et additionnons-la à la ligne 4
- (iv) Inversons les colonnes 2 et 3.

Omettant une fois de plus le rang 4 qui est identiquement nul, nous obtenons :

$$\bar{A}_t = \begin{bmatrix} e_t^h & e_t^h x'_{ht} & e_t^w & e_t^w x'_{wt} \\ 0 & f_t^h x'_{ht} & 0 & f_t^w x'_{wt} \\ h_t^h & (h_t^h - g_t^h) x'_{ht} & -g_t^w & (h_t^w - g_t^w) x'_{wt} \end{bmatrix}$$

qui peut s'écrire sous la forme \tilde{A} .

Cas 3 : $\beta_h > 0, \beta_w < 0$.

Procédant comme dans le cas 2, effectuons les opérations algébriques suivantes :

- (i) Soustrayons la ligne 4 des lignes 1, 2 et 3, en notant que :
 $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1/4$.
- (ii) Additionnons $1/4$ (ligne 1 + ligne 2 + ligne 3) à la ligne 4.
- (iii) Inversons les colonnes 2 et 3.

Nous effaçons le rang 4 puisqu'il est nul et nous obtenons :

$$\bar{A}_t = \begin{bmatrix} e_t^h & (e_t^h + f_t^h) x'_{ht} & e_t^w & (e_t^w + f_t^w) x'_{wt} \\ 0 & (g_t^h + f_t^h) x'_{ht} & g_t^w & (g_t^w + f_t^w) x'_{wt} \\ h_t^h & (h_t^h + f_t^h) x'_{ht} & 0 & (h_t^w + f_t^w) x'_{wt} \end{bmatrix}$$

qui peut s'écrire sous la forme \tilde{A} .

Cas 4 : $\beta_h < 0, \beta_w > 0$.

Le cas 4 est identique au cas 3, comme on peut le constater facilement à la partie D de l'annexe A où il est noté que $c_i = d_i = 1/4, i = 1,2,3,4$.

C.Q.F.D.

Démonstration du corollaire 1

Cas 1 : $\beta_h > 0, \beta_w > 0$.

Puisque $x'_{ht} = x'_{wt} \equiv x'_t$ et $\gamma_h = \gamma_w$, il s'ensuit que $\Delta_{ht} = \Delta_{wt} \equiv \Delta_t$. Puisque $\beta_h = \beta_w \equiv \beta$, il s'ensuit de plus que $e_t^h = e_t^w \equiv e_t > 0, f_t^h = f_t^w \equiv f_t > 0, g_t^h = h_t^w \equiv g_t > 0$, et $h_t^h = g_t^w \equiv h_t < 0$. De la démonstration de la proposition 3, il découle que \bar{A}_t peut s'écrire comme suit :

$$\bar{A}_t = \begin{bmatrix} e_t & (e_t + f_t) x'_t & e_t & (e_t + f_t) x'_t \\ 0 & g_t x'_t & h_t & h_t x'_t \\ h_t & h_t x'_t & 0 & g_t x'_t \end{bmatrix}$$

Effectuons maintenant les opérations suivantes sur la matrice \bar{A}_t . Soustrayons la colonne 4 de la colonne 2; soustrayons la colonne 3 de la colonne 1; additionnons la ligne 3 à la ligne 2; multiplions la ligne 3 par -2 ; additionnons la ligne 2 et la ligne 3; additionnons $1/2$ de la colonne 2 à la colonne 4; multiplions la ligne 3 par $-1/2$; additionnons $1/2$ de la colonne 1 à la colonne 3; divisons la ligne 1 par $(e_t + f_t)$, $(e_t + f_t \neq 0)$; enfin, divisons la ligne 3 par $(h_t - g_t)$, $(h_t - g_t \neq 0)$. Nous appelons cette nouvelle matrice \tilde{A}_t , et nous obtenons :

$$\tilde{A}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_t \wedge (e_t + f_t) & x'_t \\ 0 & 0 & h_t & (h_t + g_t)x'_t \\ h_t \wedge (h_t - g_t) & x'_t & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ où}$$

ligne \bar{A} = ligne \tilde{A} = ligne M_2 , M_1 et M_2 étant T par $(K + 1)$ et $2T$ par $(K + 1)$, respectivement. Le t -ième élément de M_1 est donné par $h_t / (h_t - g_t)$. x'_t le t -ième élément de M_2 par :

$$\begin{bmatrix} e_t \wedge (e_t + f_t) & x'_t \\ h_t & (h_t + g_t)x'_t \end{bmatrix}.$$

Nous démontrons maintenant *a contrario* que M_2 a plein rang de colonne. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il y a alors des $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_K \neq (0, 0, \dots, 0)$ tels que pour tous les t

$$\lambda_0 \frac{e_t}{(e_t + f_t)} + \lambda_1 x_{1t} + \dots + \lambda_K x_{Kt} = 0$$

et

$$\lambda_0 h_t + (h_t + g_t)[\lambda_1 x_{1t} + \dots + \lambda_K x_{Kt}] = 0.$$

Mais, par hypothèse, la matrice X est de plein rang de colonne, si bien que $\lambda_0 \neq 0$. Si l'on utilise les deux équations ci-dessus, nous obtenons :

$$h_t - e_t(h_t + g_t)/(e_t + f_t) = 0 \text{ ou } e_t g_t = h_t f_t \text{ pour tous les } t.$$

Mais $e_t g_t > 0$ et $h_t f_t < 0$. Il y a contradiction. Il est clair que la possibilité que $h_t / (h_t - g_t)$ se produise comme linéaire de x'_t , pour tous les t , est extrêmement faible.

Cas 2 : $\beta_h < 0$, $\beta_w < 0$.

La démonstration du cas 2 procède comme celle du cas 1. Cette fois encore, nous utilisons la démonstration de la proposition 3 et écrivons \bar{A}_t sous la forme :

$$\bar{A}_t = \begin{bmatrix} e_t & e_t x'_t & e_t & e_t x'_t \\ 0 & f_t x'_t & 0 & f_t x'_t \\ h_t & (h_t - g_t)x'_t & -h_t & (g_t - h_t)x'_t \end{bmatrix}.$$

Effectuons maintenant la série d'opérations suivante sur \bar{A}_t . Soustrayons la colonne 1 de la colonne 3 ; soustrayons la colonne 2 de la colonne 4 ; additionnons 1/2 de la colonne 4 à la colonne 2 ; additionnons 1/2 de la colonne 3 à la colonne 1 ; divisons la ligne 3 par -2 ; divisons la ligne 1 par e_t ; divisons la ligne 2 par f_t ; finalement, divisons la ligne 3 par $(h_t - g_t)$, $(h_t - g_t \neq 0)$. Une fois de plus, nous appelons la nouvelle matrice \tilde{A}_t et nous écrivons :

$$\tilde{A}_t = \begin{bmatrix} 1 & x'_t & 0 & 0 \\ 0 & x'_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_t/(h_t - g_t) & x'_t \end{bmatrix} \text{ où}$$

ligne \bar{A} = ligne \tilde{A} = ligne $M_1 T$ + ligne M_2 , M_1 et M_2 étant dimensionnés comme au cas 1. Le t -ième élément de M_1 est donné par $h_t/(h_t - g_t)$, comme au cas 1 ; le t -ième élément de M_2 est donné par $\begin{bmatrix} 1 & x'_t \\ 0 & x'_t \end{bmatrix}$. L'examen montre que M_2 a plein rang de colonne.

C.Q.F.D.

Démonstration du corollaire 2

Notons que, lorsque seuls les termes constants sont inclus, \bar{X}_h et \bar{X}_w en reviennent respectivement à T répétitions de :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notons aussi que les blocs comprenant D_h sont maintenant identiques, comme le sont les blocs comprenant D_w . (Cela, parce que Δ_{ht} , Δ_{ht}^* , Δ_{wt} et Δ_{wt}^* ne dépendent plus de t). Par la suite, la matrice \tilde{A} se répète toutes les trois lignes. Puisque $K = 4 > 3$, B est singulier.

C.Q.F.D.

Lemme 1 : Pour un jeu normal à deux personnes et deux stratégies, s'il y a un seul équilibre de Nash (désigné par la suite É.N.) dans les stratégies pures, il n'y a pas d'équilibre de Nash dans les stratégies mixtes.

Démonstration : (*a contrario*) Posons que la matrice des récompenses est donnée par :

		Joueur B	
		1'	2'
Joueur A	1	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}
	2	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}

Sans perte de généralité, posons que (1,1) est le seul É.N. ; nous obtenons donc : $a_{11} \geq a_{21}$ et $b_{11} \geq b_{12}$. Supposons qu'il y a une stratégie mixte É.N. quand le joueur A applique la stratégie 1 avec une probabilité p et la stratégie 2 avec une probabilité $(1-p)$, $0 < p < 1$. De même, le joueur B applique la stratégie 1' avec une probabilité q et la stratégie 2' avec une probabilité $(1-q)$, $0 < q < 1$. Pour choisir une stratégie mixte, les joueurs A et B doivent résoudre respectivement :

$$\max_p E\pi_A = pqa_{11} + p(1-q)a_{12} + (1-p)qa_{21} + (1-p)(1-q)a_{22}$$

$$\max_p E\pi_B = pqb_{11} + p(1-q)b_{12} + (1-p)qb_{21} + (1-p)(1-q)b_{22}$$

Pour qu'il y ait stratégie mixte de É.N., il faut que :

$$\frac{\partial E\pi_A}{\partial p} = 0 \Rightarrow a_{11}q + a_{12}(1-q) = a_{21}q + a_{22}(1-q) \quad (1)$$

et

$$\frac{\partial E\pi_B}{\partial q} = 0 \Rightarrow b_{11}p + b_{21}(1-p) = b_{12}p + b_{22}(1-p) \quad (2)$$

Cas 1 : $a_{11} = a_{21} \Rightarrow a_{12} = a_{22}$ par (1),

$$b_{11} = b_{12} \Rightarrow b_{21} = b_{22} \text{ par (2)}$$

Nous constatons que (1,1) aussi bien que (2,2) sont des É.N. Il y a contradiction.

Cas 2 : $a_{11} > a_{21} \Rightarrow a_{12} < a_{22}$ par (1),

$$b_{11} = b_{12} \Rightarrow b_{21} = b_{22} \text{ par (2)}$$

(1,1) et (2,2) sont tous deux des É.N. Il y a contradiction.

Cas 3 : $a_{11} = a_{21} \Rightarrow a_{12} = a_{22}$ par (1),

$b_{11} > b_{12} \Rightarrow b_{21} < b_{22}$ par (2)

(1,1) et (2,2) sont tous deux des É.N. Il y a contradiction.

Cas 4 : $a_{11} > a_{21} \Rightarrow a_{12} < a_{22}$ par (1),

$b_{11} > b_{12} \Rightarrow b_{21} < b_{22}$ par (2)

Il y a contradiction.

C.Q.F.D.

Lemme 2 : Dans un jeu de forme normale à deux joueurs et deux stratégies, s'il y a un équilibre de Nash en plus d'une stratégie mixte d'équilibre de Nash, cette stratégie mixte est dominée par l'une des deux solutions suivantes :

(1) une des deux stratégies pures d'équilibre de Nash ;

(2) une solution coopérative.

Démonstration : Posons que la matrice des récompenses des joueurs A et B est la même que celle que nous avons utilisée pour démontrer le lemme 1. Supposons deux stratégies pures d'équilibre de Nash ; sans perte de généralité, posons qu'il s'agit de (1.1') dont la récompense est de (a_{11}, b_{11}) et de (2.2') avec récompense de (a_{22}, b_{22}) . Pour qu'il y ait stratégie mixte, nous savons par le lemme 1 qu'il faut avoir :

$$\frac{\partial E\pi_A}{\partial p} = a_{11}q - a_{21}q + a_{12}(1 - q) - a_{22}(1 - q) = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}} \text{ avec } 0 < q < 1 \quad (2)$$

et

$$\frac{\partial E\pi_B}{\partial q} = b_{11}p + b_{21}(1 - p) - b_{12}p - b_{22}(1 - p) = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow p = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} + b_{22} + b_{21}} \text{ avec } 0 < p < 1. \quad (4)$$

Pour que (2) et (4) tiennent, il faut que soient satisfaites les conditions nécessaires et suffisantes suivantes :

$$\begin{aligned} a_{22} - a_{12} > 0, b_{22} - b_{21} > 0 \\ a_{11} - a_{21} > 0, b_{11} - b_{12} > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Si nous substituons (2) dans (1), nous obtenons la récompense du joueur A :

$$\pi_A = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

De même, si nous substituons (4) dans (2), nous obtenons la récompense du joueur B :

$$\pi_B = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{b_{11} + b_{12} - b_{22} - b_{21}}.$$

Par conséquent, les récompenses des joueurs A et B qui appliquent une stratégie mixte sont données par (π_A, π_B) . Pour faciliter la notation, disons que $(C_1, C_2) \equiv (\pi_A, \pi_B)$. Nous voulons comparer (a_{11}, b_{11}) et (a_{22}, b_{22}) avec (C_1, C_2) .

Nous avons maintenant :

$$a_{11} - C_1 = \frac{(a_{11} - a_{12})(a_{11} - a_{21})}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

et

$$a_{22} - C_2 = \frac{(a_{22} - a_{21})(a_{22} - a_{12})}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Par (5), nous savons que :

$$\text{sgn}(a_{11} - C_1) = \text{sgn}(a_{11} - a_{12})$$

$$\text{sgn}(a_{22} - C_2) = \text{sgn}(a_{22} - a_{21}).$$

Si $a_{12} > a_{11}$, $a_{11} < C_1$. De plus, $a_{22} > a_{12} > a_{11} > a_{21} \Rightarrow a_{22} > C_1$. Si $a_{22} > a_{21}$, $a_{22} < C_1$. De plus, $a_{11} > a_{21} > a_{22} > a_{12} \Rightarrow a_{11} > C_1$. Dans un cas comme dans l'autre, $\{a_{11}, a_{22}\} > C_1$.

$$\text{De plus, } b_{11} - C_2 = \frac{(b_{11} - b_{21})(b_{11} - b_{12})}{b_{11} + b_{22} - b_{12} - b_{21}}, \text{ et } b_{22} - C_2 = \frac{(b_{22} - b_{21})(b_{22} - b_{12})}{b_{11} + b_{22} - b_{21} - b_{12}}.$$

Une fois de plus, nous savons par (5) que :

$$\text{sgn}(b_{11} - C_2) = \text{sgn}(b_{11} - b_{21})$$

$$\text{sgn}(b_{22} - C_2) = \text{sgn}(b_{22} - b_{12}).$$

Si $b_{11} < b_{21}$, $b_{11} < C_2$. De plus, $b_{22} > b_{21} > b_{11} > b_{12} \Rightarrow b_{22} > C_2$. Si $b_{22} < b_{12}$, $b_{22} < C_2$. De plus, $b_{11} > b_{12} > b_{22} > b_{21} \Rightarrow b_{11} > C_2$. Dans un cas comme dans l'autre, $\max\{b_{11}, b_{22}\} > C_2$. Or, si $\max\{a_{11}, a_{22}\} = a_{11}$ et $\max\{b_{11}, b_{22}\} = b_{11}$ ou si $\max\{a_{11}, a_{22}\} = a_{22}$ et $\max\{b_{11}, b_{22}\} = b_{22}$, nous concluons que la stratégie mixte de É.N. est dominée par la stratégie pure. En revanche, si $\max\{a_{11}, a_{22}\} = a_{11}$ et $\max\{b_{11}, b_{22}\} = b_{22}$ ou $\max\{a_{11}, a_{22}\} = a_{22}$ et $\max\{b_{11}, b_{22}\} = b_{11}$, nous en revenons à la solution de négociation des jeux coopératifs et celle-ci domine la stratégie mixte de É.N. Dans les deux cas, la stratégie mixte sera dominée par une quelconque des solutions de théorie des jeux.

C.Q.F.D.

Lemme 3 : Pour un jeu de forme normale à deux joueurs et deux stratégies, s'il n'y a pas d'équilibre de Nash dans les stratégies pures, il n'y a qu'un seul É.N. dans les stratégies mixtes. Ce fait est bien connu (voir, par exemple, Owen 1982 : 126). Par le lemme 1, nous savons que, pour qu'il y ait une stratégie mixte É.N., nous devons avoir :

$$\frac{\partial E\pi_A}{\partial p} = 0 \Rightarrow q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{12}}; a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} \neq 0 \quad (1)$$

et

$$\frac{\partial E\pi_B}{\partial q} = 0 \rightarrow p = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}}, b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} \neq 0. \quad (2)$$

Il nous suffit de montrer que $q \neq 0$, $q \neq 1$, $p \neq 0$ et $p \neq 1$. Si nous supposons que $q = 0 \Rightarrow a_{22} = a_{12} \Rightarrow$, il y a une stratégie pure de É.N. Si nous supposons que $q = 1 \Rightarrow a_{11} = a_{21} \Rightarrow$, il y a une stratégie pure de É.N. De même, il existe une stratégie pure de É.N. pour $p = 0$ et $p = 1$. Il y a contradiction.

C.Q.F.D.

ANNEXE B

MOYENNES ET VARIANCES DES VARIABLES EXPLICATIVES

	Variables explicatives	Moyenne	Variance
<i>AGEH</i>	Âge du mari	36,7	109,0
<i>AGEW</i>	Âge de la femme	34,3	97,4
<i>EDUCH</i>	Scolarité du mari (années)	12,6	4,32
<i>EDUCW</i>	Scolarité de la femme (années)	12,7	6,65
<i>UNEM</i>	Taux de chômage local	9,49	13,8
<i>ASSETS</i>	Revenus familiaux autres que salaires (en milliers de dollars)	0,986	22,6
<i>KIDS13</i>	Nombre d'enfants de 13 ans ou moins	1,22	1,28
<i>KIDS14</i>	Nombre d'enfants de 14 ans ou plus	0,296	0,458
<i>RACE</i>	Variable fictive (1 pour noirs ou hispaniques, 0 autrement)	0,252	-

Les critères de sélection que nous avons utilisés sont énumérés ci-dessous. Après sélection, nous avons conservé 2 020 observations sur les 6 742 dont nous disposions au départ.

1. Les changements à la composition des familles ne provenaient en 1982 que du fait que des enfants quittaient la maison ou y revenaient. Le mari et la femme restaient mariés et ils habitaient le même logement. Perte : 2 295 observations.
2. La famille était limitée au mari, à la femme et à leurs enfants. Perte : 1 349 observations.
3. Le mari et la femme devaient avoir moins de 65 ans. Perte : 219 observations.
4. Nous avons exclu les maris qui déclaraient être à la retraite, handicapés de manière permanente, mis à pied temporairement ou étudiants. Nous avons classé comme « travaille » ceux qui déclaraient travailler actuellement, et comme « ne travaille pas » ceux qui déclaraient qu'ils cherchaient du travail ou qu'ils étaient au chômage. Perte : 331 observations.
5. Nous avons exclu les femmes qui déclaraient être à la retraite, handicapées de manière permanente, mises à pied temporairement, au chômage mais à la recherche de travail ou étudiantes. Nous avons classé comme « travaille » les femmes qui déclaraient qu'elles travaillaient et comme « ne travaille pas » celles qui déclaraient être des femmes au foyer. Perte : 174 observations.

6. Si le mari ou la femme étaient atteints d'une maladie physique ou mentale qui limitaient le type ou la quantité de travail qu'ils pouvaient accomplir, nous avons exclu le couple de l'échantillon. Perte : 287 observations.
7. Nous avons exclu de plus tout dossier où il manquait des données relativement aux dix variables explicatives utilisées dans l'analyse. Perte : 67 observations.

Le tableau suivant contient la répartition numérique du statut d'emploi des maris et des femmes dans les 2 020 observations qui nous sont restées après sélection.

		Mari	
		Travaille	Ne travaille pas
Femme	Travaille	1 204	48
	Ne travaille pas	739	29

BIBLIOGRAPHIE

- AMEMIYA, T. (1974), « Multivariate Regression and Simultaneous Equation Models When the Dependent Variables Are Truncated Normal », *Econometrica*, 42 : 999-1012.
- ASHENFELTER, O., et HECKMAN, J. (1974), « The Estimation of Income and Substitution Effects in a Model of Family Labor Supply », *Econometrica*, 42 : 73-85.
- BERNDT, E. R. HALL, B.H., HALL, R.E., et HAUSMAN, J.A. (1974), « Estimation and Inference in Non-Linear Structural Models. », *Annals of Economic and Social Measurement*, 3 : 653-665.
- BOWDEN, R. (1973), « The Theory of Parametric Identification », *Econometrica*, 41 : 1069-1074.
- COTTERMAN, R.F. (1981), « The role of Assets in Labor Supply Functions », *Economic Inquiry*, 19 : 495-505.
- GOODMAN, L.A. (1970), « The Multivariate Analysis of Qualitative Data : Interactions Among Multiple Classifications », *Journal of the American Statistical Association*, 65 : 226-256.
- GRONAU, R. (1973), « The Effect of Children on the Housewife's Value of Time », *Journal of Political Economy Supplement*, 81 : 168-199.
- GOURIEROUX, C., LAFFONT, J.J., et MONFORT, A. (1980), « Coherency Conditions in Simultaneous Linear Equations Models with Endogenous Switching Regimes », *Econometrica*, 48 : 675-695.
- HABERMAN, S.J. (1974), *The Analysis of Frequency Data*. Chicago, University of Chicago Press.
- HECKMAN, J. (1974), « Shadow Prices, Market Wages, and Labor Supply », *Econometrica*, 42 : 679-694.
- HECKMAN, J. (1976), « The Common Structure of Statistical Models of Truncation, Sample Selection and Limited Dependent Variables and a Simple Estimator for such Models », *Annals of Economic and Social Measurement*, 5 : 475-492.
- HECKMAN, J. (1978), « Dummy Endogenous Variables in a Simultaneous Equation System », *Econometrica*, 46 (1978):931-959.
- HECKMAN, J., et Macurdy, T. (1980), « A Life Cycle Model of Female Labour Supply », *Review of Economic Studies*, 47 : 47-74.
- KOOPMANS, T.C., et Hood, W.C. (1953), *Studies in Econometric Method*, New York, Wiley.
- LAZEAR, E. (1977), « Education : Consumption or Production ? », *Journal of Political Economy*, 85 : 569-597.
- McFADDEN, D. (1974), « Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior », *In Frontiers of Econometrics*, P. ZAREMBKA (ed.), New York : Academic Press.

- McFADDEN, D. (1981), «Economic Models of Probabilistic Choice», in *Structural Analysis of Discrete Data with Econometric Applications*, C. MANSKI et D. McFADDEN (ed.) Cambridge : Massachusetts Institute of Technology Press.
- MADDALA, G.S., (1983), *Limited-Dependent and Qualitative Variables in Econometrics*, Cambridge, Cambridge University Press.
- MADALA, G.S., et LEE, L.F. (1976), «Recursive Models with Qualitative Endogenous Variables», *Annals of Economic and Social Measurement*, 5 : 525-545.
- NAKAMURA, A, et NAKAMURA, M. (1981), «A Comparison of the Labor Force Behavior of Married Women in the United States and Canada, with Special Attention to the Impact of Incomes Taxes», *Econometrica*, 49 : 451-489.
- NELSON, F.D., et OLSEN, L. (1978), «Specification and Estimation of a Simultaneous Equation Model with Limited Dependent Variables», *International Economic Review*, 19 : 695-710.
- NERLOVE, M., et PRESS, S.J. (1973), *Univariate and Multivariate Log-Linear and Logistic Models*, Santa Monica, Rand Corporation.
- NERLOVE, M., et PRESS, S.J. (1976), «Multivariate Log-Linear Probability Models for the Analysis of Qualitative Data», Discussion Paper no. 1. Center for Statistics and Probability, Northwestern University.
- OWEN, G. (1982), *Game Theory*. New York : Academic Press.
- ROTHENBERG, T.J. (1971), «Identification in Parametric Models», *Econometrica*, 39 : 577-591.
- SCHMIDT, P. (1981), «Constraints on the Parameters in Simultaneous Tobit and Probit Models», In *Structural Analysis of Discrete Data with Econometric Applications*, C. MANSKI and D. McFADDEN (ed.). Cambridge : Massachusetts Institute of Technology Press.
- VUONG, Q.H. (1980), «Heckman's Criticism of the Nerlove-Press Model : A Reply», Mimeographed paper.
- VUONG, Q.H. (1981), «Structural log-linear Probability Models», Working paper 8114, GREMAQ, Université des Sciences Sociales, Toulouse.
- VUONG, Q.H. (1982), «Conditional Log-Linear Probability Models : A Theoretical Development with an Empirical Application», Ph.D. dissertation, Northwestern University.
- VUONG, Q.H. (1982), «Probability Feedback in a Recursive System of Probability Models», Social Science Working Paper no. 443, Pasadena, California Institute of Technology, September.
- WALDMAN, D.M. (1981), «An Economic Interpretation of Parameter Constraints in a Simultaneous Equations Model with Limited Dependent Variables», *International Review*, 22 : 731-739.