L'Actualité économique

Une analyse économique des loteries québécoises
An Economic Analysis of Quebec Lotteries

Michel Boucher

Volume 50, Number 1, janvier–mars 1974

URI: https://id.erudit.org/iderudit/803033ar
DOI: https://doi.org/10.7202/803033ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Boucher, M. (1974). Une analyse économique des loteries québécoises. *L'Actualité économique*, *50*(1), 63–78. https://doi.org/10.7202/803033ar

Article abstract

The focus of this article is to analyse the reasons for the success of the Québec Lotteries. To do it perfectly, we study the technical terms of the lottery, drawing, namely the expected value, the probability of winning a prize and the inequality of the prize distribution. Then we analyse some changes introduced by Loto-Québec and we contrast the results with other more established lotteries and the differences so observed may provide additional reasons for its success.

In the second part, we use the theory of choice involving risk as described by Allais and Tobin to explain the demand for lotteries tickets. We find, by a statistical analysis, where the independent variables are the mean value and the variance of the prize distribution, that people who buy tickets are generally speaking risk-averters and not risk-lovers and they behave as such when Loto-Québec changes the mean value and the variance.

UNE ANALYSE ÉCONOMIQUE DES LOTERIES QUÉBÉCOISES

1. INTRODUCTION

Source de revenus absolument inconnue il y a quelques années seulement, les diverses loteries québécoises ont enrichi le fonds consolidé du Québec d'un montant de 95.2 millions de dollars pour les trois premières années d'opération de Loto-Québec [1]. Toutefois, aucune étude n'a été faite pour expliquer la réussite et le succès de cette entreprise et nous voudrions, dans cette recherche, combler cette lacune en analysant les aspects techniques des diverses loteries en cours actuellement au Québec, en nous inspirant le plus possible de la théorie économique du risque.

En effet, bien que l'analyse actuelle du comportement de l'homme rationnel devant le risque n'ait pas réalisé, loin de là, l'unanimité parmi les économistes, il n'en demeure pas moins qu'une de ces approches peut certainement nous servir de guide et de référence à l'étude économique du système de loteries québécoises. Plus spécifiquement, Allais [2], dans ses critiques sur le recours au critère de Bernoulli tel que préconisé par l'école américaine, démontre qu'il faut dépasser le critère de l'espérance mathématique de l'utilité du gain puisque ce dernier ne tient pas compte des caractéristiques extrêmes d'une perspective aléatoire. En effet, il faut prendre en considération, selon lui, non seulement la moyenne pondérée, suivant leurs probabilités subjectives, des valeurs psychologiques, mais aussi l'ensemble de la distribution des probabilités. M. Allais suggère alors de prendre en compte, en première approximation et par commodité, la dispersion des valeurs psychologiques, « l'élément caractéristique fondamental de la psychologie du risque » [3].

---

1. Ces chiffres proviennent des rapports annuels 1970-71, 1971-72 et 1972-73 de la Société d'exploitation des loteries et courses du Québec (Loto-Québec).

2. Allais, Maurice, « Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axiomes de l'école américaine », *Econometrica*, vol. 21, oct. 1953, n° 4, ainsi que Tobin, James, « Liquidity Preference as Behavior towards Risk », *The Review of Economic Studies*, vol. 25, n° 1, février 1958, pp. 65 à 86.

3. Allais, Maurice, *op. cit.*, p. 511.

En utilisant, dans la description et l'analyse des loteries québécoises, des concepts qui se réfèrent aux notions de valeur moyenne et de dispersion, nous pourrons alors puiser dans le cadre analytique de la théorie de l'homme rationnel devant le risque, approche qui comblera partiellement le fait qu'il n'existe aucune théorie économique qui puisse déterminer clairement et définitivement la structure idéale ou optimale d'une loterie.

Dans la première partie de l'étude, nous décrivons les éléments caractéristiques des loteries québécoises à l'aide de mesures statistiques traditionnelles. De plus, pour en faciliter la compréhension et l'intelligence, nous comparerons les résultats ainsi obtenus à ceux de diverses loteries existant dans quelques autres pays. Dans une deuxième partie, nous chercherons, par des fonctions empiriques de demande agrégée, à analyser les comportements des consommateurs face aux séries de changements introduits par Loto-Québec. Finalement, nous ferons, en guise de conclusion, quelques remarques sur les effets redistributifs des loteries québécoises.

TABLEAU 1

EXEMPLE DU CALCUL DE LA COURBE DE LORENZ ET DU COEFFICIENT DE CONCENTRATION GINI

Lots x_k (dollars)	Fréquences f_k	Les produits $f_k(x_k)$ (dollars)	Fréquences cumulées $F(x_k)$	Somme cumulée des lots $\sum_k f_k(x_k)$ (dollars)	Fréquences cumulées en p.c. p_k	Somme cumulée en p.c. q_k
200,000	1	200,000	3,600	1,361,900	100	100
100,000	1	100,000	3,599	1,161,900	99.97	85.31
50,000	1	50,000	3,598	1,061,900	99.94	77.97
25,000	1	25,000	3,597	1,011,900	99.92	74.30
10,000	8	80,000	3,596	986,900	99.89	72.46
2,000	81	162,000	3,588	906,900	99.67	66.59
1,000	24	24,000	3,507	744,900	97.42	54.69
500	810	405,000	3,483	720,900	96.75	52.93
300	243	72,900	2,673	315,900	74.25	23.19
100	2430	243,000	2,430	243,000	67.50	17.84
	3600	1,361,900				

NOTE : Le nombre de billets vendus s'établissait à 899,979.

SOURCE : Ces données, comme toutes les autres données utilisées par ailleurs dans le présent texte, proviennent de la publicité faite par la Société Loto-Québec lors des divers tirages.

2. LA STRUCTURE D'UNE LOTERIE

1) *Les éléments d'une loterie*

Nous rappellerons très brièvement le sens et la portée des trois éléments caractéristiques traditionnels [4] de toute loterie et, pour en faciliter une meilleure compréhension, nous les illustrerons par l'analyse du tirage de la Super-Loto de décembre 1972.

Tout d'abord, la probabilité de gagner un prix quelconque (P) s'obtient tout simplement par le rapport du nombre de billets gagnants sur le nombre de billets vendus. Pour ce tirage spécifique, la probabilité de gain est de .004.

D'autre part, il est de notoriété publique qu'une société comme Loto-Québec opère dans le but avoué d'augmenter significativement les revenus généraux de l'Etat du Québec. Sur ce point, la Société d'exploitation des loteries et courses du Québec n'est nullement différente des autres entreprises gouvernementales comme la Société des Alcools du Québec, par exemple. En effet, Loto-Québec, étant la seule à rendre un service spécifique à la population québécoise, maximise ses revenus nets, lesquels peuvent être mieux décrits par la notion de profit de monopole comme dans le cas de la Société des Alcools. Cette constatation implique nécessairement que les loteries québécoises ne sont pas équitables. En d'autres termes, les sommes versées en lots doivent être nécessairement inférieures aux recettes brutes provenant de la vente des billets et c'est le rapport valeur totale des lots sur recettes brutes que nous dénotons par le terme espérance mathématique de gain (E).

Ainsi, en se référant au tableau 1, nous constatons que l'espérance de gain est de .378, c'est-à-dire que 37.8 p.c. des recettes brutes provenant de la vente des billets retournent en lots à attribuer. L'espérance mathématique de gain constitue en somme une mesure de l'équité d'une loterie ou, ce qui revient au même, l'espérance mathématique exprimée comme une valeur numérique représente, dans un certain cas, la valeur d'un billet. Dans ce tirage spécifique, cette dernière était de 1.41 dollar, tandis que le coût d'un billet est de 4 dollars. Une loterie équitable, d'après notre définition, posséderait une espérance de gain égale à l'unité.

Finalement, par l'expression « inégalité de la répartition des lots », nous nous référons à la structure habituelle des loteries, à savoir un gros lot très important, quelques lots de moindre importance et finale-

4. R. Clay Sprowls, « On the Terms of the New York State Lottery », *National Tax Journal*, vol. XXIII, n° 1, mars 1970, pp. 74 à 82 ; *idem*, « A Historical Analysis of Lottery Terms », *Canadian Journal of Economics and Political Science*, vol. XX, n° 3, août 1954, pp. 347 à 356.

ment, beaucoup de petits lots. Une très bonne mesure de l'inégalité d'une telle distribution de lots est l'indice de concentration Gini [5],

$$G = \triangle / 2\mu \qquad (1)$$

où μ est la moyenne arithmétique, tandis que $\triangle$ représente la différence moyenne, c'est-à-dire la moyenne arithmétique des valeurs absolues des différences qui sont formées en associant les observations deux à deux, de toutes les manières possibles, y compris à elles-mêmes, soit :

$$\triangle = 1/N^2 \sum_j \sum_i |x_j - x_i| f(x_j) \quad f(x_i) \qquad (2)$$

où x_j et x_{ii} sont les lots, $f(x_j)$ et $f(x_i)$ sont les fréquences respectives, alors que N^2 représente toutes les différences possibles. Par ailleurs, l'indice de concentration Gini possède une interprétation graphique pertinente en la courbe de Lorenz et, qui plus est, cet indice peut être aussi considéré comme une mesure de dispersion.

En effet, si p_k représente la proportion des billets gagnants dont le lot est inférieur à une somme donnée x_k et si q_k désigne la proportion de la somme cumulée des lots par les gagnants dont le lot est inférieur à x_k, nous obtenons alors sur un graphique un ensemble de points (p_k, q_k) au fur et à mesure que x_k augmente. En les reliant, nous possédons une courbe de Lorenz. En d'autres termes, la courbe de concentration de la distribution des lots est la courbe représentative de q_k en fonction de p_k. La courbe de concentration est inscrite dans le carré de côté 1 puisque p_k et q_k sont des pourcentages qui varient entre 0 et 1. Elle est située en dessous de la diagonale du carré parce que q_k est toujours inférieur à p_k ; en effet, à un gros pourcentage de la population gagnante ne correspond généralement qu'un petit pourcentage du total des lots à répartir. Ainsi dans notre exemple, 67.5 p.c. des billets qui gagnent le moins se partagent une somme cumulée de lots égale à 17.84 p.c. D'une part, si tous les lots sont égaux la courbe de Lorenz se confond alors avec la diagonale dite d'équi-répartition. En d'autres termes, G est égal à zéro puisque la dispersion des gains possibles est alors nulle. D'autre part, plus l'inégalité des lots s'accentue, plus la courbe s'éloigne de la diagonale et se rapproche des côtés. Autrement dit, plus G se rapproche de l'unité, plus la dispersion des gains possibles devient grande. Donc, quand G tend vers l'unité pour un E donné, nous pouvons affirmer que les participants de cette loterie ont une forte préférence pour le risque (*risk-lover*) tandis que l'opposé, c'est-à-dire G se rapprochant de zéro pour un E donné, nous révèle que les participants sont prudents (*risk-averter*).

5. Kendall, Maurice G. et Stuart, Alan, *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 1, London, 1958, pp. 46 à 51.

Par ailleurs, comme nous travaillons avec des variations statistiques discrètes, nous aurons recours à la formule proposée par Yntema [6], à savoir

$$G = 1/2 \sum_k (p_{k-1}q_k - p_k q_{k-1}) \cdot 1/5{,}000 \qquad (3)$$

Cette formule, en se référant à la notion d'aire de concentration, c'est-à-dire l'aire comprise entre la courbe de concentration et la première bissectrice, se trouve à faire la somme des aires de tous les triangles dont l'un des points est l'origine et dont les deux autres points sont deux observations consécutives. L'indice de concentration (G) obtenu pour la Super-Loto de décembre 1972 est .641.

2) *Analyse des résultats*

Maintenant que nous possédons tous les indices caractéristiques d'une loterie, nous pouvons appliquer l'ensemble de cette technique au système de loteries québécoises.

Nous débuterons par l'analyse de Loto-Perfecta qui est une loterie associée à une course de chevaux. En d'autres termes, le hasard habituel qui intervient dans le résultat d'une loterie est associé à la performance des chevaux en piste. Plus spécifiquement, alors que dans les autres loteries les gens constatent que telle combinaison de chiffres forme le billet gagnant, dans la Loto-Perfecta ils voient se concrétiser les billets gagnants. Cet aspect fort inusité pour une loterie entraîne une forte variabilité de la probabilité de gain. En effet, la probabilité moyenne est de .005134 et l'écart-type, très élevé, est de l'ordre de .002999. Quant à l'espérance mathématique de gain, elle est relativement constante, sauf dans le cas où il existe deux combinaisons de billets gagnants. Une analyse de régression entre la somme des lots accordés (L) et les recettes brutes (RB) pour chaque tirage de Loto-Perfecta nous le corrobore d'une autre manière. Les résultats ainsi obtenus sont [7]:

$$L = -11{,}820.38 + \underset{(2.34)}{.5045}\ RB \qquad (4)$$

$$R^2 = .929 \qquad D.W. = 2.02 \qquad n^{8} = 46$$

6. Yntema, Dwight B., « Measures of the Inequality in the Personal Distribution of Wealth or Income », dans *Journal of the American Statistical Association*, vol. XXVIII, 1933, plus particulièrement les pages 427-428.

7. Dans les diverses équations utilisées au cours de ce texte, les nombres entre parenthèses sous les coefficients sont des valeurs t, alors que R^2 désigne le coefficient de détermination, D.W., le résultat de l'épreuve de Durbin-Watson sur l'autocorrélation des résidus et n, le nombre d'observations. Il ressort, sauf indication contraire, des différentes épreuves de Student, que tous les coefficients des variables sont significatifs au seuil de 5 p.c.

8. Nos observations, pour Loto-Perfecta, débutent le 15 septembre 1972, c'est-à-dire la sixième course officielle et elles se terminent le 26 juillet 1973.

Si nous rapportons la valeur totale des lots (L) sur les recettes brutes (RB), nous obtenons l'espérance mathématique de cette loterie. Or, ce rapport est représenté dans l'équation (4) par la pente de cette droite de régression, à savoir l'estimateur $\hat{\beta}$. Finalement, l'indice de concentration (G) demeure relativement stable, bien qu'il s'accroisse très rapidement lorsque les lots de moindre importance (la valeur des billets gagnants dans le désordre) ne représentent, en termes relatifs, qu'un très faible pourcentage par rapport aux premiers lots accordés pour les billets gagnants dans l'ordre. On trouvera au tableau 2 un résumé des valeurs moyennes prises par les variables pertinentes à l'analyse.

Pour ce qui est de l'analyse de la Mini-Loto, celle-ci sera très rapide puisque cette loterie hebdomadaire possède la structure la plus simple qui soit. En effet, le fait que toute série vendue comprend 90,000 billets et que de ce nombre, il y aura obligatoirement un billet gagnant de 5,000 dollars, 8 billets gagnants de 500 dollars et 81 billets gagnants de 100 dollars, implique que les trois variables spécifiques de notre analyse, à savoir la probabilité de gain, l'espérance mathématique et l'indice de concentration, vont toujours rester constantes quel que soit le nombre de séries vendues. Le tableau 2, à nouveau, nous en livre les résultats.

Quant à la Super-Loto, comme l'Inter-Loto d'ailleurs, sa structure s'est modifiée tout au cours de la période considérée. Les principales modifications introduites par la société furent les suivantes :

1) le nombre de billets gagnants est passé en moyenne à 3,042 pour les 7 derniers tirages alors qu'il n'y avait en moyenne que 566 billets gagnants pour les 5 premiers tirages et [9],

TABLEAU 2

TABIEAU RÉCAPITULATIF

Loteries	$\overline{P}$	$\overline{E}$	$\overline{G}$
Loto-perfecta	.00513	.48121	.4886
Mini-loto	.001	.3600	.4497
Super-loto			
— 1ère série	.00118	.33075	.80132
— 2e série	.00358	.36841	.67310
— l'ensemble	.00258	.35272	.72653
Inter-loto			
— 1ère série	.00027	.19928	.81113
— 2e série	.00126	.30419	.54287
— 3e série	.00299	.34818	.63223
— l'ensemble	.00156	.28926	.64832

9. Nous ne possédons, pour la Super-Loto, que douze observations. En effet, notre échantillon s'étend du tirage du 22 septembre 1970 au tirage du mois de juin 1973. Les cinq premiers tirages s'échelonnent donc jusqu'en septembre 1971 inclusivement.

2) l'ensemble des lots s'établit maintenant à 1,058,886 dollars comparativement à 638,400 dollars. Ces changements ont alors affecté nos trois variables de la manière suivante :

— la probabilité de gagner un lot quelconque (P) a presque triplé ; elle a bondi de .00118 à .00358 ;
— l'espérance mathématique (E) a légèrement augmenté puisqu'elle s'établit maintenant à .3684 par rapport à .3308 ;
— la courbe de Lorenz, image de l'indice de concentration, s'est sensiblement rapprochée de la bissectrice puisque G a glissé d'une moyenne de .8013 à une moyenne de .6731.

En d'autres termes, Loto-Québec a pressenti, à juste titre d'ailleurs, que cette perspective aléatoire ayant sensiblement une même valeur moyenne que la précédente, mais offrant toutefois une dispersion plus faible, serait préférée de beaucoup puisqu'elle émet implicitement l'hypothèse que le québécois participant à cette loterie préfère la sécurité.

Par cette politique, Loto-Québec cherchait à stimuler la vente de billets et augmenter ainsi les recettes brutes d'une manière plus ou moins proportionnelle. En effet, la philosophie de la société s'appuyait sur la présomption que l'élasticité de la réponse du public à des modifications des éléments structurels de revenus plus attirants serait favorable à Loto-Québec, et la résultante en serait alors une augmentation des recettes nettes (recettes brutes moins la somme des lots accordés). Une analyse de régression entre les lots accordés et les recettes brutes soutient cette proposition et elle nous précise, par surcroît, que la relation entre l'augmentation des lots alloués et la croissance des recettes brutes est moins proportionnelle (c'est-à-dire l'estimateur $\hat{\beta}$ qui représente l'élasticité est inférieur à 1). Les résultats obtenus pour les sept derniers tirages se présentent ainsi :

$$\log RB = 5.741 + \underset{(6.69)}{.658} \log L \qquad (5)$$

$$R^2 = .899 \qquad \text{D.W.} = 1.93 \qquad n = 7$$

Donc, Loto-Québec a agi d'une manière rationnelle puisque son augmentation des sommes allouées en lots a entraîné une croissance des recettes nettes [10]. D'autre part, cette réaction confirme la présomption implicite émise par Loto-Québec sur le milieu québécois, à savoir que les gens jouant à la Super-Loto révèlent une certaine préférence marquée pour la prudence. En effet, Loto-Québec, en augmentant de beaucoup le nombre de lots importants à attribuer, n'a fait que réduire la dispersion

10. Il ne faut jamais perdre de vue que la Société Loto-Québec (comme la Société des Alcools du Québec), est une firme qui maximise ses recettes nettes et non ses recettes brutes, puisque son objectif principal est de remettre le plus d'argent possible au fonds consolidé de la province. En effet, les recettes nettes ont atteint 1.8 million en moyenne par tirage, comparativement à 1.3 million pour la sous-période précédente.

des gains possibles, tout en n'affectant que très marginalement l'espérance mathématique.

Il en est de même pour l'Inter-Loto[11] puisque deux séries de changements quant au nombre de billets gagnants et de lots attribués furent successivement apportées. L'impact de ces modifications successives sur les trois variables d'analyse se trouve condensé au tableau 2. Nous ne ferons ressortir dans nos brefs commentaires que les points les plus marquants. Dans un premier temps, les modifications introduites ont augmenté les probabilités de gain de 10 fois ($\bar{P} = .00027$ à $\bar{P} = .00298$), tandis que l'espérance mathématique se haussait de .19928 à .34818. Cependant, l'indice Gini se comportait d'une manière un peu différente. Tout d'abord, l'introduction de quelques lots supplémentaires de 5,000, de 1,000 et de 250 dollars fit se rapprocher la courbe de Lorenz vers la diagonale ($\bar{G} = .81113$ à $.54287$). Toutefois, en introduisant beaucoup de lots de consolation (tout particulièrement les 100 dollars et les 50 dollars), l'on a haussé l'inégalité de la répartition des lots puisque $\bar{G}$ est maintenant de l'ordre de .63223. Autrement dit, le premier changement en haussant fortement l'espérance mathématique (E) tout en réduisant la dispersion (G) a rendu alléchant à tous (*risk-lovers* comme *risk averters*) la participation à ce jeu de hasard, tandis que le deuxième changement, en modifiant plus la mesure de dispersion que l'espérance mathématique, semble avoir parié sur l'individu aimant le risque.

Comme dans le cas de la Super-Loto, une analyse de régression, considérant les deux sous-périodes comme des entités indépendantes, appuie et corrobore la justesse de l'action de Loto-Québec.

$$\log RB = 7.179 + \underset{(7.11)}{.548} \log L \tag{6}$$

$$R^2 = .783 \qquad n = 15 \qquad \text{D.W.}^* = 1.17$$

$$\log RB = 7.373 + \underset{(6.38)}{.533} \log L \tag{7}$$

$$R^2 = .787 \qquad n = 13 \qquad \text{D.W.}^* = 0.49$$

En effet, bien que l'accroissement successif des lots alloués ait fait croître les recettes brutes moins que porportionnellement, il n'en demeure pas moins que l'objectif recherché, à savoir l'augmentation des recettes, a été atteint. Toutefois, le succès de ce changement ne s'est pas révélé

11. Pour l'Inter-Loto, nous avons effectivement 39 observations qui se subdivisent en trois sous-périodes. La première, comprenant 11 observations, s'échelonne de mai 1970 à mars 1971, alors que la deuxième période s'étend d'avril 1971 à juin 1972 tandis que la troisième période débute en juillet 1972.

* Le test de Durbin-Watson révèle l'existence d'autocorrélation positive entre les résidus.

aussi marquant que celui qui a été observé dans le cas de l'Inter-Loto. En effet, les recettes nettes moyennes sont passées successivement de 1.31 million de dollars à 1.34 million de dollars à la suite des premières modifications, pour descendre finalement à 1.33 million par tirage depuis le dernier accroissement des lots à allouer.

Notre explication de la faible réaction des gens à la deuxième modification réside dans le fait que Loto-Québec, en augmentant la dispersion des gains possibles, est allée à l'encontre de la préférence (presque avouée) des gens pour la prudence, c'est-à-dire pour un indice G qui tend à se rapprocher plutôt de zéro que de l'unité.

Finalement, nos diverses études statistiques nous induisent à avancer le théorème suivant : toute modification des lots à attribuer dans une loterie entraîne nécessairement un changement des recettes nettes lorsque l'élasticité des lots par rapport aux recettes brutes est supérieure à l'espérance mathématique de gain, toutes choses demeurant égales par ailleurs.

La démonstration est très simple. En effet, si nous dénotons, par exemple,

p = le prix d'un billet

q = le nombre total de billets vendus

ΣL_i = la somme totale à attribuer

la deuxième partie de l'énoncé s'exprime de la manière suivante :

$$d(pq)/d(\Sigma L_i) \,.\, \Sigma L_i/pq > \Sigma L_i/pq \qquad (8)$$

ce qui revient à affirmer que les recettes nettes vont augmenter si et seulement si la pente de la droite reliant les recettes brutes à l'ensemble des lots est positive :

$$d(pq)/d(\Sigma L_i) > 0 \qquad (9)$$

3) *Comparaison internationale*

Maintenant que nous avons décrit la mécanique interne des loteries québécoises et que nous avons explicité l'essence des diverses modifications introduites au long de la période d'analyse, nous chercherons à situer le système de loteries québécoises par rapport à celles qui existent un peu partout ailleurs, élément supplémentaire qui nous permettra d'expliquer le franc succès de cette entreprise.

Nous constatons au tableau 3 que, dans l'ensemble, la probabilité de gain des loteries québécoises est toujours supérieure à ceux de la loterie de New-York et du Irish Sweepstake, mais de beaucoup inférieure aux deux loteries françaises considérées. L'espérance mathématique de gain des loteries québécoises est légèrement supérieure à la loterie new-yorkaise, mais de beaucoup inférieure aux deux loteries françaises. Finalement, l'indice de concentration des trois loteries est moins inégal que sa contrepartie de New-York, tandis que par rapport aux deux loteries françaises, nous constatons que les deux loteries québécoises possèdent un indice Gini légèrement plus élevé, sauf naturellement la Mini-Loto.

A partir de cette brève comparaison internationale, comment pouvons-nous expliquer la réussite de Loto-Québec ? Tout d'abord, il convient de noter que le système québécois de loterie possède (l'expérience le prouve) une structure apte à générer des recettes nettes. En effet, durant les 2 premières années de fonctionnement de la loterie de l'Etat de New-York, les recettes nettes escomptées furent très maigres puisque les gens semblaient être très conscients du degré d'inéquité de cette loterie, à savoir la très faible probabilité de gagner ($P = .00024$), que seulement 30 p.c. de tout l'argent provenant de la vente des billets leur revenait ($E = .3$) et finalement la très forte dispersion de l'ensemble des lots à gagner, c'est-à-dire le grand nombre de petits lots comparativement à l'ensemble des lots ($G = .835$). En d'autres termes, les gens qui participent à une loterie n'ont pas une préférence inconditionnelle pour le risque. En effet, bien que l'espérance mathématique (E) puisse être très petite, il n'en demeure pas moins que l'indice de dispersion ne doit pas être trop élevé. Il semblerait que ces derniers chiffres constituent, à notre point de vue, un seuil d'inéquité à ne point franchir et le fait que les trois loteries concernées soient à l'intérieur de ces bornes explique une bonne partie de la réussite de Loto-Québec. Une autre partie du succès des loteries québécoises découlerait du fait que cette initiative semble correspondre à une demande de la population.

TABLEAU 3

QUELQUES EXEMPLES DE LOTERIES ÉTRANGÈRES

Loteries	$\bar{P}$	$\bar{E}$	$\bar{G}$
La New York State Lottery	.00048	.3	.730
Les loteries nationales françaises — « Tranche spéciale du vendredi 13 »	.207	.55 — .60	.502
— « Tirage de la 44e tranche »	.258	.52 — .59	.48
Irish Sweepstake Cambridgeshire	.000725 — .00087	.5 — .6	.763
Mini-loto	.001	.3600	.4497
Super-loto (2e série)	.00358	.36841	.67310
Inter-loto (3e série)	.00298	.34818	.63223

NOTE : Les données sur les loteries étrangères proviennent de R. Clay Sprowls, *National Tax Journal*.

En effet, une enquête effectuée par Loto-Québec confirme cette hypothèse puisque 96 p.c. des répondants se sont manifestés favorables à son égard.

3. ANALYSE DE LA DEMANDE

Notre approche fut jusqu'à présent très descriptive puisque nous nous sommes contenté d'expliquer l'existence de Loto-Québec par des mesures de moyennes et de dispersion ordinaires. De plus, nous avons cherché à expliquer le comportement de Loto-Québec, lors de ses modifications, dans la seule perspective de cette Société, sans trop nous préoccuper de la réaction détaillée de la demande. En d'autres termes, notre équation décrivant la réaction des consommateurs suite à des modifications, était très grossière et ne faisait nullement intervenir la distinction entre un changement dans des recettes brutes provenant de la hausse du nombre de gagnants de lots à attribuer, via une baisse du lot moyen, et un changement qui tire sa source de la baisse de la mesure de variation [12].

Nous pensons maintenant être en mesure de combler cette lacune en nous référant plus directement à la théorie de l'homme rationnel devant le risque. A partir de la fonction d'utilité possédant comme arguments principaux non seulement la moyenne pondérée suivant leurs probabilités subjectives des valeurs psychologiques, mais aussi du moment d'ordre deux de la distribution des valeurs psychologiques, le prix des billets demeurant constant, nous arrivons à une fonction empirique de demande agrégée de la forme [13] :

$$D = f(m_1 m_2) \tag{10}$$

Nous expliciterons très brièvement les divers éléments de cette fonction de demande en faisant de la statistique comparative avec cette fonction :

$$dD = (\partial D/\partial m_1)\, dm_1 + (\partial D/\partial m_2)\, dm_2 \tag{11}$$

Ainsi, pour une valeur donnée de m_2, i.e. $dm_2 = 0$, nous pouvons facilement montrer qu'il est nécessaire et suffisant que la fonction D soit une fonction croissante de m_1, i.e. :

$$\partial D/\partial m_1 > 0 \tag{12}$$

12. Dans le modèle précédent, Loto-Québec évaluait la demande ou ces recettes brutes en fonction de la somme des lots à attribuer *ceteris paribus*, tandis qu'ici, nous émettons explicitement l'hypothèse que la demande est fonction des 2 premiers moments de la distribution des lots.

13. Nous avons tenté de spécifier des équations ou, en plus des moments d'ordre un (m_1) et d'ordre deux (m_2) de la distribution des lots, nous trouverions, soit le nombre de billets gagnants, soit la somme des lots à attribuer, mais ce fut en vain.

D'autre part, pour une valeur de m_1 considérée comme constante, i.e. $dm_1 = 0$, la fonction D sera une fonction croissante de m_2 :

$$\partial D/\partial m_2 > 0 \tag{13a}$$

si et seulement si les participants à ces jeux de hasard aiment le *risque*, et elle sera une fonction décroissante de m_2 :

$$\partial D/\partial m_2 < 0 \tag{13b}$$

si et seulement si les participants sont *prudents* ou possèdent une aversion à l'égard du risque. Par contre, si la modification de la demande est la résultante tant des modifications de la moyenne que de la variance, nous pourrons avoir les cas suivants :

1) si l'on réduit le lot moyen à attribuer $(dm_1 < 0)$ ainsi que la variance de cette distribution $(dm_2 < 0)$, la demande augmentera, en général, si l'augmentation de billets vendus occasionnée par la réduction de cette dernière variable dépasse la baisse de billets vendus entraînée par la modification de la variable moyenne, c'est-à-dire si

$$(\partial D/\partial m_2)dm_2 > (\partial D/\partial m_1)dm_1$$

2) si l'on fait décroître m_1 $(dm_1 < 0)$ et que l'on augmente m_2 $(dm_2 > 0)$, la demande diminuera, que les participants aiment le risque ou non, puisque $(\partial D/\partial m_1)dm_1$ et $(\partial D/\partial m_2)dm_2$ agissent dans le même sens ; toutefois, la demande peut augmenter si les gens aimant le risque dépassent dans la distribution les prudents et que cet effet réussit à contrer la baisse de m_1 ;

3) si l'on augmente m_1 $(dm_1 > 0)$ et que l'on diminue m_2 $(dm_2 < 0)$, la demande augmentera soit parce que $(\partial D/\partial m_1)dm_1$ et $(\partial D/\partial m_2)dm_2$ vont dans la même direction ou parce que nous aurons le plus vraisemblablement :

$$(\partial D/\partial m_1)dm_1 > (\partial D/\partial m_2)dm_2.$$

Cependant, comme nous venons de l'affirmer préalablement, la possibilité d'exceptions existe de sorte que nous pouvons toujours imaginer théoriquement le cas où la demande diminuera parce que

$$(\partial D/\partial m_2)dm_2 > (\partial D/\partial m_1)dm_1$$

4) si l'on accroît m_1 $(dm_1 > 0)$ et m_2 $(dm_2 > 0)$, la demande augmentera certainement pour les gens aimant le risque, tandis que pour les prudents la demande augmentera si

$$(\partial D/\partial m_1)dm_1 > (\partial D/\partial m_2)dm_2.$$

Le cadre théorique étant explicité, nous passerons maintenant à l'analyse des résultats statistiques.

Nous débuterons par l'analyse de la Super-Loto. Comme nous l'avons précédemment affirmé dans la partie descriptive de ce texte, la société a modifié la structure des lots pour augmenter la demande de son produit et faire croître ses recettes brutes. Ceci a été effectivement possible par une diminution des moments d'ordre un et d'ordre deux de la distribution des lots.

Initialement, la demande pour des billets de la Super-Loto était, pour les 5 premiers tirages, la suivante :

$$D^1 = 789{,}535.69 + \underset{(1.16)^{14}}{415.06m_1} - \underset{(-1.05)^{14}}{.0082m_2} \tag{14}$$

$$n = 5 \qquad \text{D.W.} = 1.93 \qquad R^2 = .403$$

Bien que la puissance explicative de cette équation soit très faible et qu'aucun des coefficients ne soit significatif statistiquement au seuil de 5 p.c., il s'en dégage que le coefficient de m_1 est positif tandis que celui de m_2 laisse entrevoir que les gens sont prudents.

Pour les 7 autres tirages, suite évidemment aux changements qui ont réduit tant le moment d'ordre un que celui d'ordre deux, la demande s'exprime par :

$$D^2 = 531{,}926.72 + \underset{(3.03)}{1677.36m_1} - \underset{(-3.36)}{.0230m_2} \tag{15}$$

$$n = 7 \qquad \text{D.W.} = 1.69 \qquad R^2 = .804$$

Cette fois-ci, le pouvoir explicatif de la relation fonctionnelle est élevé et cette équation laisse clairement entrevoir, outre le fait que le coefficient de m_1 soit positif, par le coefficient négatif de m_2, que les gens sont prudents. De plus, ces deux droites de régression démontrent définitivement que l'accroissement de la demande est la résultante du fait que $(\partial D^1/\partial m_2)dm_2$ a largement dépassé $(\partial D^1/\partial m_1)dm_1$. Un seul regard sur les élasticités nous en donne une preuve rapide. En effet, l'élasticité de la demande par rapport à la valeur moyenne étant peu élastique ($\varepsilon_1 = \partial D^1/\partial m_1 \,.\, m_1/D = .98$), la diminution de cette dernière a entraîné peu de retraits à la participation de la Super-Loto tandis qu'au contraire l'élasticité de la demande par rapport à la variance étant relativement élevée ($\varepsilon_2 = \partial D^1/\partial m_2 \,.\, m_2/\mathrm{D} = -1.60$), la baisse de cette dernière mesure de dispersion a entraîné de nouveaux arrivants de sorte que l'effet escompté s'est produit. L'élasticité de la demande par rapport à ces 2 variables pour les 7 derniers tirages est maintenant $\varepsilon_1 = .72$ et $\varepsilon_2 = -.70$ et nous estimons que toute nouvelle modification serait très mal venue.

14. Ce terme n'est pas significatif du point de vue statistique, c'est-à-dire au seuil de 5 p.c.

Quant aux demandes de l'Inter-Loto, elles sont :

$$D^1 = 1{,}926{,}657.85 + \underset{(2.87)}{2{,}777.6m_1} - \underset{(-2.87)}{.0158m_2} \qquad (16)$$

$$n = 11 \qquad \text{D.W.}^{15} = 1.35 \qquad R^2 = .478$$

$$D^2 = 1{,}024{,}434.29 + \underset{(5.82)}{2145.03m_1} - \underset{(-9.06)}{.0657m_2} \qquad (17)$$

$$n = 15 \qquad \text{D.W.} = 1.66 \qquad R^2 = .966$$

$$D^3 = 4{,}160{,}969.22 + \underset{(1.48)^{16}}{4{,}243.60m_1} - \underset{(-3.47)}{0.341m_2} \qquad (18)$$

$$n = 13 \qquad \text{D.W.}^{17} = .61 \qquad R^2 = .557$$

La première équation nous décrit pour ainsi dire l'état d'esprit des participants à l'Inter-Loto avant les changements. Les premières modifications, c'est-à-dire $dm_1 < 0$ et $dm_2 < 0$, ont eu un effet bénéfique sur la demande, tel que reflété par l'équation (17), puisque cette dernière a augmenté. En effet, la hausse de billets vendus provenant de la réduction de la variance a largement surpassé la baisse de billets découlant de la diminution de la valeur moyenne, c'est-à-dire $(\partial D^1/\partial m_2)dm_2 > (\partial D^1/\partial m_1)dm_1$. Les élasticités de la demande par rapport à la valeur moyenne et la variance nous le corroborent et elles nous indiquent la réaction à ces modifications :

$$\partial D^1/\partial m_1 \,.\, m_1/D = 4.94 \text{ et } \partial D^1/\partial m_2 \,.\, m_2/\mathrm{D} = -1.65.$$

Toutefois, les deuxièmes modifications n'ont pas eu les résultats escomptés puisque la demande a diminué. En effet, on a fait décroître la valeur moyenne ($dm_1 < 0$) tout en augmentant la variance ($dm_2 > 0$) et la demande a diminué parce que $(\partial D^2/\partial m_1)dm_1$ et $(\partial D^2/\partial m_2)dm_2$ agissent dans la même direction (c'est-à-dire les effets s'additionnent plutôt que de se contrebalancer). Si nous considérons les élasticités de la demande par rapport à la moyenne et à la variance, qui sont respectivement de 3.01 et de —1.99, nous saisissons immédiatement pourquoi la réaction enregistrée a été à la baisse. Finalement, la résultante de tous ces changements, l'équation (18), semble nous révéler que Loto-Québec n'aurait pas intérêt à continuer à modifier ces deux variables dans la direction jusqu'ici entreprise. A cela peut s'ajouter le fait que les élasticités de la demande par rapport à la moyenne et à la variance sont maintenant de l'ordre de .75 et —1.67.

15. Le test Durbin-Watson n'est pas concluant.

16. Ce terme n'est pas significatif du point de vue statistique, c'est-à-dire au seuil de 5 p.c.

17. Le test Durbin-Watson révèle l'existence d'autocorrélation positive entre les résidus.

La demande de billets pour la loterie Loto-Perfecta est :

$$D = 538{,}296.77 + \underset{(.487)^{18}}{241.77m_1} - \underset{(-1.55)^{18}}{.0277m_2} \qquad (19)$$

$$n = 44 \qquad R^2 = .151 \qquad \text{D.W.} = 1.88$$

Bien que le pouvoir explicatif soit très faible, il n'en demeure pas moins, bien que le coefficient de $\partial D/\partial m_1$ ne soit pas significatif du point de vue statistique, qu'il est tout de même positif tandis que le coefficient de $\partial D/\partial m_2$ reflète une aversion à l'égard du risque. En ce qui regarde les élasticités par rapport à la moyenne et la variance, elles sont de l'ordre de .04 et de —0.7 respectivement, dévoilant, nous semble-t-il, le peu d'intérêt que Loto-Québec aurait à modifier sa formule.

4. CONCLUSION

Nous aimerions, en guise de conclusion, analyser les résultats de cette enquête socio-économique [19] citée précédemment, en tant qu'éléments permettant de vérifier les aspects distributifs des loteries. En d'autres termes, nous désirons savoir qui achète des billets de loterie. Car un objectif important du système d'imposition du gouvernement ainsi que de son programme de dépenses est, en excluant l'offre normale de services publics, de mieux répartir le revenu national entre les diverses composantes de la société. Ainsi, les effets progressifs des dépenses gouvernementales peuvent être facilement contrecarrés si les sources de revenu puisent beaucoup plus dans les goussets des défavorisés que dans ceux des riches. En se référant à ce sondage de Loto-Québec, nous pourrons savoir si les défavorisés achètent plus de billets que les autres couches de la société. En d'autres termes, nous nous référons, comme critère, aux revenus de ceux qui encouragent les loteries pour savoir si ce nouveau mode de financement par l'Etat est régressif ou non. Ainsi, en se référant à l'ensemble des acheteurs habituels qui représentent 51 p.c. de la population de l'enquête, nous constatons : a) que 37.2 p.c. des acheteurs habituels, soit 19 p.c. sur 51 p.c., ont moins de 5,000 dollars de revenus. Or, l'édition de *Statistique fiscale* [20] pour l'année 1970 nous révèle que 54.20 p.c. de la population québécoise ayant fait une déclaration d'impôt se situaient dans la tranche des moins de 5,000 dollars. En rapportant le nombre d'acheteurs habituels de cette classe de revenus sur son importance relative dans la distribution des revenus, nous obtenons alors un coefficient d'incidence

18. Ce terme n'est pas significatif du point de vue statistique, c'est-à-dire au seuil de 5 p.c.

19. *Le rapport annuel* de Loto-Québec pour l'exercice du 1er avril 1971 au 31 mars 1972, partie intitulée : étude du marché.

20. *Statistique fiscale,* Analyse des déclarations des particuliers pour l'année d'imposition 1970, ministère du Revenu National, Ottawa, 1972.

nettement inférieur à l'unité, plus particulièrement de .686, indiquant ainsi que les défavorisés n'achètent pas d'une manière disproportionnée des billets de loteries ;
b) que 47.1 p.c. des acheteurs habituels, soit 24 p.c. sur 51 p.c., se situent dans la tranche de revenu comprise entre 5,000 et 10,000 dollars, alors que cette dernière tranche de revenu, d'après *Statistique fiscale*, ne comprend que 35.79 p.c. de la population québécoise ayant fait une déclaration d'impôt. En répétant la même opération, le coefficient d'incidence alors obtenu est de 1.316 et il révèle la très grande participation de cette classe de revenu aux divers jeux de hasard créés par l'Etat du Québec ;
c) que 15.7 p.c. des acheteurs habituels, à savoir 8 p.c. sur 51 p.c., touchent 10,000 dollars et plus de revenus de toute sorte, tandis que *Statistique fiscale* nous dévoile que cette classe de revenus ne constitue que 10.01 p.c. de la population québécoise ayant fait une déclaration d'impôt, nous donnant ainsi un coefficient d'incidence de l'ordre de 1.568. A nouveau, nous constatons le très fort encouragement de la classe moyenne supérieure aux jeux de hasard québécois, bien qu'une restriction s'impose puisque cette catégorie des 10,000 dollars et plus est probablement trop vaste pour détecter le point où le jeu ne veut plus rien dire.

Ces résultats vont absolument dans le même sens que les études de marché effectuées au New Jersey où il existe un système de loteries. En effet, les diverses études démontrent que très peu de gens ayant un revenu de 5,000 dollars achètent des billets et que la médiane des revenus familiaux participant aux loteries est d'environ 10,000 dollars [21].

Michel BOUCHER.

21. Pour de plus amples renseignements sur l'expérience américaine, veuillez consulter Watson, R.D., « Lotteries : Can the Public and State Both Win ? dans *Business Review* de la Federal Reserve Bank of Philadelphia, juillet 1973, pp. 3 à 14.