L'Actualité économique

Les fonctions de production dans la littérature économique

Claude Germain

Volume 45, Number 1, April–June 1969

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1003595ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1003595ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Germain, C. (1969). Les fonctions de production dans la littérature économique. *L'Actualité économique*, *45*(1), 28–49. https://doi.org/10.7202/1003595ar

Les fonctions de production dans la littérature économique

« The Production Function
is a Profession of Faith. »
Nicholas Kaldor

Tout bon menuisier doit apprendre à maîtriser un certain nombre d'outils indispensables. Il en va de même pour l'étudiant en économie. Dès ses premiers contacts avec l'analyse économique, il aura constaté la place importante occupée par le concept d'une fonction de production. Elle est l'un des outils principaux, dans l'arsenal de l'économiste. Cet article prendra la forme de variations sur un thème bien connu. Nous y traiterons successivement des aspects suivants :

1) les diverses interprétations de la nature exacte de la fonction de production, telle qu'envisagée par les économistes ;
2) la question de l'homogénéité, et les formes algébriques de la fonction ;
3) une classification en fonction du degré de substitution des facteurs ;
4) théorie des coûts et théorie de la production.

Avant d'aborder le point numéro un, revoyons rapidement les nombreux domaines de la théorie économique où s'infiltre la fonction de production.

On peut mentionner plusieurs secteurs où la notion de fonction de production est importante :

1) dans l'énoncé de la loi des rendements non proportionnels, ou encore « loi des rendements marginaux éventuellement décroissants », comme l'a précisé Boulding ;

2) dans l'analyse des coûts de production d'une firme, et la dérivation de la courbe d'offre de l'entreprise et de l'industrie. La théorie des coûts repose sur les lois de la production. La fonction de production est alors considérée comme un résumé des relations technologiques entre facteurs de production. Il existe toutefois un certain hiatus entre l'analyse de la production et celle des coûts, comme l'a fait remarquer Samuelson dans ses *Foundations* [1] ;

3) dans le chapitre qui traite de la répartition des revenus au niveau micro-économique, on peut dire que la moitié du problème de la formation des prix des facteurs de production repose sur la forme de la fonction de production. En effet, la courbe de demande des facteurs de production s'identifie à la courbe de la valeur de la productivité marginale du facteur ;

4) dans toute étude de l'allocation des ressources, et dans le tracé même d'une courbe de transformation, l'existence de fonctions de production est sous-jacente ;

5) dans un schéma d'interdépendance générale, elle est un lien indispensable entre le marché des biens et le marché des facteurs ;

6) dans le domaine macro-économique nous nous heurtons aussi souvent à la fonction de production. Dans le modèle keynésien, par exemple, elle prend la forme d'une relation [2] entre deux agrégats, le niveau du revenu national, Y, et le niveau de l'emploi, N :

$$Y = \varphi(N)$$

7) dans les nombreuses tentatives pour déterminer la part du revenu national qui est attribuée à chaque catégorie de facteur de production, il est fréquent d'ajuster des fonctions de pro-

1. Paul A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, Harvard University Press, 1961, copyright 1947, p. 83.

2. Il est d'usage de stipuler que cette fonction illustre des rendements décroissants, c'est-à-dire :

$$\frac{d^2Y}{dN^2} < 0$$

Mais comme l'a observé Mishan (au cours d'un exposé à la London School of Economics), cette supposition n'est pas nécessaire. Le signe de cette dérivée seconde peut être positif ou nul sans rien changer au reste du modèle keynésien.

duction à des séries temporelles de la main-d'œuvre, du capital et de la production ;

8) enfin, dans le domaine des modèles de croissance et celui de la théorie du commerce international, on retrouve fréquemment ce concept [3].

Cette liste ne peut pas être exhaustive. Nous avons omis, par exemple, de parler de tout le travail récent accompli dans le domaine de l'économie agricole sur la détermination de fonctions de production empiriques, et en particulier des travaux de Earl O. Heady et I.L. Dillon publiés en 1961 [4]. Cependant, la liste est suffisante pour justifier l'importance des réflexions qui suivront.

I — Définition et nature

Une définition qui voudrait répondre à la question : « Qu'est-ce que c'est une fonction de production ? » serait une vaine tentative. Et ceci pour deux raisons. Ou bien nous savons déjà ou nous croyons savoir de quoi il s'agit, et dans ce cas nous serons insatisfaits par toute définition, à des degrés divers ; car aucune définition ne peut résumer la somme des connaissances acquises. Ou bien nous ne savons pas ce que c'est, et, dans ce cas, une définition nous laissera sur notre appétit et ne conduira qu'à d'autres questions du même genre, à savoir, « qu'est-ce qu'un facteur de production ? », etc. C'est là le défaut de toute définition essentialiste, comme l'a démontré Karl Popper [5].

Par ailleurs, une définition qui consisterait à montrer du doigt l'objet à définir serait préférable mais elle ne constitue qu'un point de départ. Il ne suffit pas de montrer *un* ours pour savoir ce que c'est. La grande variabilité de l'espèce ne peut être réduite à un cas particulier. Cette définition est donc trop restrictive.

La seule façon de sortir de cette impasse consiste à poser d'autres questions. Par exemple : quels types de fonctions peut-on distinguer ? Est-ce un concept purement théorique ou ayant une contrepartie empirique ? Qui utilise ces fonctions de production et pour quoi faire ? Ces quelques réflexions n'ont pour but que

3. Voir : R.E. Caves, *Trade and Economic Structure*, Harvard University Press, 1960.

4. Voir : *Agricultural Production Functions*.

5. Karl Popper, *The Logic of Scientific Discovery*.

d'attirer l'attention sur le rôle des définitions dans la théorie de la connaissance.

Par conséquent, dans les définitions imparfaites que nous allons donner présentement, il faut se méfier de croire que nous avons appris quelque chose. Nous donnerons, en appendice, des références à des définitions beaucoup plus élaborées et précises qui seules pourraient satisfaire un examinateur consciencieux, ou subtil, selon les points de vue. Voici deux définitions partielles :

> « Une fonction de production est une relation entre un ensemble de combinaisons de facteurs de production, et l'ensemble correspondant des quantités d'un certain bien produit à partir de ces combinaisons. »
>
> « Une fonction de production est une table de possibilités de production, chaque possibilité étant la production maximale d'un bien obtenu à partir d'une combinaison donnée des facteurs de production. »

Essayons maintenant de nuancer ces définitions en montrant les éléments importants qu'il faut y adjoindre.

a) *La notion de fonction*

Le terme « fonction » dans l'expression fonction de production est emprunté aux mathématiques, et c'est donc là qu'il faut commencer. Toute bonne définition devra donc comporter trois éléments :

1) le domaine sur lequel la fonction est définie, qui comprend l'ensemble E des combinaisons de facteurs de production envisagés ;

2) le domaine dans lequel la fonction prend ses valeurs, qu'on appelle la portée ou l'ensemble image F ;

3) la règle de correspondance, ou la fonction proprement dite, qui assigne à chaque élément x du domaine E où la fonction est définie un élément correspondant y ou $f(x)$ de la portée F.

C'est cette application ou règle de correspondance qui est fournie lorsque l'on spécifie la forme de la fonction de production :

$$y = f(v_1,\ v_2,\ v_3\ \dots\ v_n) \qquad (1)$$

où y est une variable qui représente la production, et $v_1, v_2 \dots v_n$ sont les quantités de facteurs de production. La règle de correspondance f définit un ensemble de couples ordonnés qui constitue le graphe de la fonction. En termes économiques, le domaine E de la fonction est représenté par le « champ factoriel » où chaque élément x représente une combinaison particulière des facteurs v_1, v_2 ... et la portée ou ensemble image F constitue la « surface de production ».

b) *La surface de production : la notion de maximum possible*

La fonction de production représente donc le nombre et l'efficacité relative des méthodes de production disponibles pour la production d'un certain bien ou service. Néanmoins, deux interprétations sont possibles :

1) les quantités de production sont des quantités « possibles » au sens d'anticipées. Tant qu'une certaine méthode n'a jamais été mise en pratique, son résultat n'est que probable, et la fonction de production n'est qu'un plan, ou un projet sur papier ;

2) les données sont le résultat d'expériences passées et on a la certitude que telle combinaison de facteurs donnera tel résultat. Les quantités produites sont « possibles » au sens de réalisables.

Kaldor semble adhérer à la première interprétation lorsqu'il affirme : « *The technical possibilities shown by the production function of any one period are in fact nothing more than the reflection of the yet unexploited inventions and innovations of the past.* » [6]

Par ailleurs, une supposition implicite de la fonction de production est que les quantités de produits représentées par la surface de production sont des quantités maximales. L'économiste suppose que l'ingénieur a déjà résolu le problème technique et que l'on connaît la quantité maximale d'un bien que chaque procédé ou méthode de production peut procurer.

En réalité, cependant, un certain procédé technique peut donner des résultats bien différents selon celui qui administre la firme ou selon ceux qui coordonnent les activités de l'entreprise. Mais comment tenir compte de la structure d'organisation dans notre fonction de production ? Ce facteur n'est pas directement mesurable. N'aurions-nous pas, ici, une méthode indirecte pour évaluer

6. N. Kaldor, « A Model of Economic Growth », *Economic Journal*, décembre 1957, p. 596. N.I.

ce facteur nébuleux « la qualité d'entrepreneur », désigné en anglais par *entrepreneurship* ? Lorsque deux firmes, utilisant les mêmes quantités de facteurs mesurables, obtiennent des résultats différents, cette différence ne pourrait-elle pas constituer une mesure de l'efficacité du facteur « entreprise » ? Nous avons, ici, un problème analogue à celui de la mesure de l'achalandage dans l'évaluation des actifs d'une compagnie [7].

Soyons plus précis. Le « maximum » dont il est question dans les meilleures définitions de la fonction de production n'a rien à voir avec la question de savoir si la fonction elle-même a un maximum ou non. Le point à souligner est que chaque possibilité de production est elle-même un maximum. Ceci laisse supposer qu'il y a un principe de maximisation à l'œuvre dans les calculs de l'ingénieur, c'est tout. Il ne s'ensuit pas que les isoquants en dehors de la « région économique » de la fonction sont des droites parallèles aux axes de coordonnées. Les auteurs Borts et Mishan semblent affirmer que cette conclusion découle de la définition donnée par Carlson d'une fonction de production. Ceci est une erreur d'interprétation.

On peut résumer l'argumentation ci-haut en tenant compte d'une observation de Ragnar Bentzel [8]. Dans une analyse dynamique, il faut modifier la fonction de la façon suivante :

$$y = \varphi(v_1, v_2, \dots) - z$$

où z représente la déviation entre la quantité effectivement produite au cours d'une période, et la quantité « idéale » *prédite* par la fonction de production.

Nous terminerons cette section avec les observations sérieuses et même sévères de T.C. Koopmans au sujet de cette maximisation. Après avoir rappelé combien cette maximisation supposée par l'économiste représente un problème complexe qui a donné naissance aux techniques de la programmation linéaire et à l'analyse d'activités, il dit ce qui suit :

> « *The science of management should therefore start at the beginning of the problem, with a description of the range of alternatives open to*

7. Sur cette question, voir : « Entrepreneurship as a Productive Factor », E. Fels et R. Richter dans *Weltwirtchaftliches Archiv*, 1957, vol. I, pp. 203-222.
8. Ragnar Bentzel, « On the Aggregation of Production Functions », *International Economic Papers*, no 8, 1958, p. 81.

the production manager, and use it in deriving prescriptions for achieving the physical maximization presupposed in the production function. Economists have often regarded such management problems as outside the domain of economics and more properly entrusted to the production engineer or manager... Without a more thorough analysis of the choices open to the productive establishment, the economist's prescriptions for profit maximization are non operational, and his descriptive assumption of profit maximization is not subject to direct empirical test. Rare is the industrial firm that knows and charts its own production function as the economist defines it » [9]

II — Homogénéité et formes algébriques des fonctions de production

Nous essayerons de clarifier, ici, de façon définitive, cette question d'homogénéité qui est souvent mal traitée dans beaucoup d'ouvrages. La confusion est surtout frappante dans l'utilisation du terme « linéaire homogène ».

Rappelons, tout d'abord, la règle bien connue qui suffit à nous sortir des difficultés dans tous les cas. Si on peut prouver que :

$$f(\lambda x, \lambda y, ...) = \lambda^m f(x, y, ...) \qquad (2)$$

pour λ quelconque, alors, et alors seulement, la fonction $f(x, y, ...)$ est dite homogène de degré m. Mais il existe une autre règle souvent plus simple qui est applicable à tous les polynômes. Or, il arrive que la plupart des fonctions que l'on retrouve dans les travaux économiques sont des polynômes. Dans ce cas, *la fonction est homogène si tous les termes contenant les variables indépendantes sont du même degré.* Le degré d'homogénéité est égal au degré de chaque terme. Voilà une règle facile d'application.

Voici quelques exemples pour illustrer ce principe. Dans ces exemples, z est la variable dépendante, x et y, les variables indépendantes, et a, b, A, B, H des constantes.

(1) $z = ax + by$ .... Homogène de degré 1

(2) $z = \sqrt{xy} = x^{1/2}y^{1/2}$ .... Homogène de degré 1

(3) $z = a + \dfrac{x}{y} = ax^0 + xy^{-1}$ .... Homogène de degré 0

(4) $z = 2Hxy - Ax^2 - By^2$ .... Homogène de degré 2

---

9. T.C. Koopmans, *Three Essays on the State of Economic Science*, McGraw-Hill, 1957, pp. 69-70.

(5) $z = \dfrac{x^2y^2}{ax^3 + by^3}$ .... Homogène de degré 1

(6) $z = Ax^2y^2 - Bx^3y^3$ .... Non homogène

(7) $z = ax + b$ .... Non homogène.

Est-il nécessaire de souligner qu'il ne faut pas confondre le degré d'un polynôme avec le degré d'homogénéité de ce même polynôme ? Le degré d'un polynôme est égal au degré de sa plus grande puissance. Ainsi, (6) est un polynôme du troisième degré, mais n'est pas homogène. En général, les polynômes avec un terme constant ne sont pas homogènes, à l'exception du cas (3). Par ailleurs, la non-homogénéité n'implique pas la présence d'un terme constant : qu'il suffise de considérer (6).

Finalement, on devrait éviter l'expression boiteuse « linéaire-homogène pour désigner une fonction homogène de degré un ; on peut même lire parfois « linéaire et homogène » dans un contexte tout à fait erroné. Puisque le terme linéaire est la source de toutes ces difficultés, précisons deux choses. Il faut distinguer, d'une part, *la propriété de linéarité* d'une fonction (ou d'une application) qui nécessite deux conditions :

a) l'additivité : $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;

b) l'homogénéité de degré un : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$;

et, d'autre part, le fait que le graphe de la fonction soit une droite. Certaines fonctions sont représentées par une droite et pourtant ne sont pas « linéaires » au sens où a) et b) sont vérifiés.

Exemple 1 : $z = ax$ est une fonction linéaire.

Exemple 2 : $z = ax + b$ n'est pas homogène, et n'est pas additive. Pourtant, son graphe est une droite. C'est pourquoi, afin d'éviter les confusions, on lui réserve le nom de fonction affine.

Nous avons insisté, de façon un peu excessive, sur ces relations ; sur le plan économique, ce sont les propriétés des fonctions homogènes qui sont importantes. Celles-ci sont amplement décrites par R.D.G. Allen, dans *Mathematical Analysis for Economists,* et nous renvoyons le lecteur à ce grand maître. Nous ne mentionnerons, ici, qu'une seule de ces propriétés ayant une signification économique et qui concerne le concept de sentier d'expansion. Le rapport des prix des facteurs étant constant, on peut prouver que,

pour toute fonction de production homogène, le sentier de production est une droite passant par l'origine des axes. De ce théorème, on peut déduire une série de propositions équivalentes :
— une condition suffisante pour que le sentier d'expansion soit une droite à partir de l'origine est que la fonction soit homogène. La condition n'est pas nécessaire, cependant, car on peut avoir une fonction non homogène avec un sentier d'expansion linéaire dans le champ factoriel ;
— une condition nécessaire pour que le sentier d'expansion ne soit pas une droite dans le champ factoriel, est que la fonction soit non homogène. Quelle serait la condition suffisante ?
— une condition nécessaire pour une fonction homogène est que son sentier d'expansion soit une droite à partir de l'origine.
Ce n'est pas suffisant, cependant.

III — Vers une classification

Plusieurs critères peuvent être proposés pour classifier les fonctions de production, selon qu'elles sont :
— homogènes on non homogènes ;
— statiques ou dynamiques ;
— soumises à des rendements à l'échelle constants, avec ou sans point d'inflexion (!) ;
— micro-économiques, c'est-à-dire au niveau de la firme, ou macro-économiques.
Évidemment, plusieurs de ces critères sont superficiels et n'attirent pas l'attention sur une caractéristique économique fondamentale : *le degré de substitution* entre les facteurs et les procédés de production. C'est ce critère qui nous semble être la base d'une classification significative et tout à fait générale. Avant même de nous interroger sur le degré de « réalisme » de certains types de fonction de production, nous établirons l'ensemble des cas « logiquement possibles », en essayant de donner une interprétation à chaque cas. Nous croyons que ce genre d'exercice, de zéro à l'infini, est plus satisfaisant pour l'esprit.

Nous envisageons cinq cas, selon que les facteurs sont considérés comme plus ou moins substituables dans la production d'un certain bien ou service. Dans chaque cas, on se référera au schéma général de la page 38.

1er cas : *Facteurs absolument complémentaires*

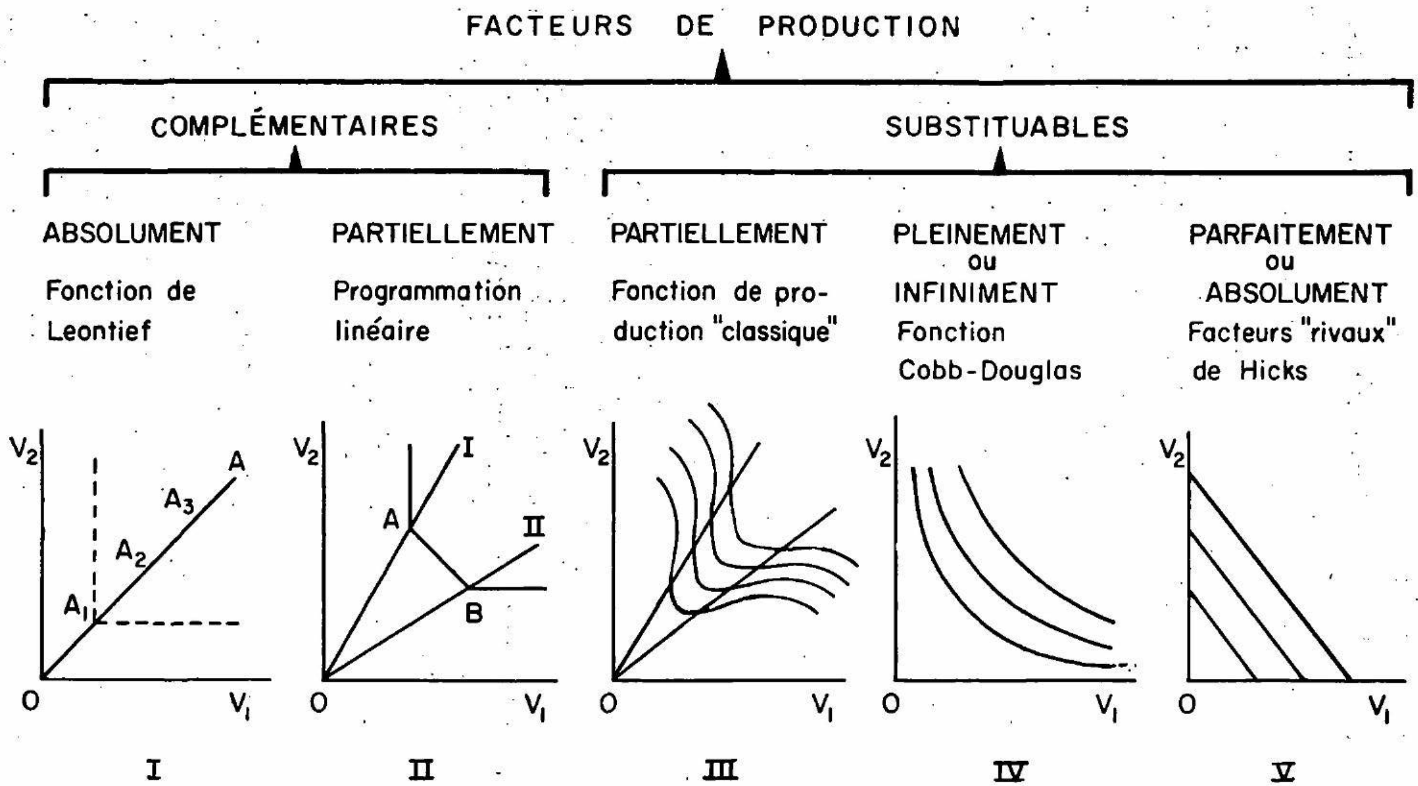
Dans ce cas, les proportions entre les facteurs, d'une part, et les proportions entre les facteurs et la production, d'autre part, sont considérées comme fixes. Frisch et Schneider ont désigné ce type de facteurs « facteurs limitatifs », indiquant par là que la production est limitée par le facteur le plus rare. Décrire un processus de production à l'aide d'une fonction dans laquelle les facteurs sont de cette nature, revient à dire qu'il n'y a qu'une seule méthode pour produire un certain bien. Ainsi, il n'y a qu'une seule « méthode » pour réussir un parfait Zombie ou un poulet vallée d'Auge. La compagnie Miron utilise environ douze ingrédients dans son béton et les proportions de ces ingrédients sont rigidement fixées par la technologie du béton et la qualité du produit. Toute variation de ces proportions résulterait dans un changement de la nature du produit.

La complémentarité n'est pas toujours une question purement technique. Martin Bronfenbrenner a montré comment des facteurs pouvaient être rendus « limitatifs » par des moyens artificiels. Ainsi, les syndicats peuvent exiger une certaine proportion d'ouvriers par rapport au produit, par exemple le nombre de musiciens dans un orchestre. On trouvera facilement d'autres exemples.

C'est Léontief qui a le plus utilisé cette hypothèse de complémentarité dans les tableaux d'input-output. Pour décrire chaque industrie, il faut autant d'équations linéaires qu'il y a de facteurs de production utilisés par cette industrie ; ainsi, soit X, l'output de l'industrie no 1, et x_{12}, la quantité d'input en provenance de l'industrie no 2 :

$$\begin{aligned} x_{12} &= a_{12}X_1 \\ x_{13} &= a_{13}X_1 \\ x_{1n} &= a_{1n}X_1 \end{aligned}$$

a_{12} est un coefficient de production qui représente la quantité fixe du facteur no 2 utilisé dans la fabrication d'une unité du bien X_1. Il est nécessaire de souligner que l'hypothèse de la fixité des coefficients de production a été retenue par Léontief comme une nécessité pratique, et non pas une supposition de théorie économique. C'est une hypothèse qui rend les calculs abordables, voilà tout. De toute façon, on connaît de façon empirique encore trop peu de



La présentation de ce tableau comme outil pédagogique nous fut suggérée à la lecture de l'excellent article de A.E. Ott : « Production Functions, Technical Progress and Economic Growth », *International Economic Papers*, no 11, 1962.

choses sur les procédés industriels pour faire des suppositions plus « réalistes ». La controverse, ici, ne peut être résolue que par un appel à l'évidence. Et il faut faire, ici, une distinction entre le tableau d'input-output, et l'analyse d'input-output. Lorsque l'analyse est utilisée pour fins de prédiction, il faut essayer de tenir compte des changements technologiques qui modifient les coefficients d'input-output.

Il est d'usage courant de représenter la carte d'iso-produits dans le cas de facteurs limitatifs par une série d'isoquants à 90° dans le champ factoriel v_2Ov_1 ; dans notre schéma, ces isoquants sont en pointillés pour indiquer leur nature virtuelle. Strictement, nous n'avons qu'une série de points dans le champ v_2Ov_1, le long d'un rayon factoriel OA, dont la pente définit la méthode de production unique. Les points A_1, A_2, A_3 sont équidistants, illustrant la supposition additionnelle de rendements constants à l'échelle. De toute façon, on voit que l'élasticité de substitution σ est nulle [10].

Une dernière observation concerne l'utilisation du terme « complémentaire » pour désigner les facteurs limitatifs. En réalité, le terme est ambigu. Tout d'abord, parce que, d'une certaine façon, les facteurs de production sont toujours complémentaires. Ensuite, parce que cette expression désigne toute autre chose que la fixité des proportions, dans les cas où il y a justement une substitution possible entre les facteurs, là où les facteurs sont « continus » selon l'expression de Frisch [11].

Un facteur continu est un facteur dont la productivité marginale est partout une fonction continue de toutes les quantités de facteurs. La notion de facteurs complémentaires, qui s'oppose à celle de facteurs concurrents ou alternatifs, se définit par rapport aux dérivées secondes de la fonction de production :

$$x = f(v_1, v_2, \dots v_i, \dots v_j, \dots v_n).$$

Les facteurs sont complémentaires lorsque $f''_{ij} > 0$, c'est-à-dire lorsqu'une augmentation de la quantité d'un facteur entraîne une

10. Rappelons que σ se définit comme le rapport :

$$\frac{\Delta\left(\frac{v_1}{v_2}\right) \Big/ \frac{v_1}{v_2}}{\Delta\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \Big/ \frac{p_1}{p_2}}$$

11. Voir : *Lois techniques et économiques de la production*, Dunod, 1963.

augmentation de la productivité marginale de l'autre, pris indifféremment. Prenant deux facteurs v_1 et v_2, ils sont complémentaires dans une combinaison donnée si on a la relation :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v_1 \ \partial v_2} > 0$$

ce qui signifie qu'on doit avoir à la fois :

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\left[\frac{\partial x}{\partial v_2}\right] > 0 \text{ et, } \frac{\partial}{\partial v_2}\left[\frac{\partial x}{\partial v_1}\right] > 0$$

Ceci dit, on constate que *le cas le plus général pour deux facteurs continus, est qu'ils sont complémentaires dans la zone de substitution du champ factoriel,* zone comprise entre les isoclines pour lesquels la productivité marginale de l'un des facteurs est nulle. Ce paradoxe apparent provient donc de la double interprétation donnée au terme « complémentaire » dans la littérature économique. Mais dans le cas présent, je ne crois pas que cette double acception puisse vraiment entraîner un malentendu ou un quiproquo sérieux ; le contexte est trop différent dans chaque cas.

2ème cas : *Facteurs partiellement complémentaires*

Dans ce cas, les rapports entre les facteurs peuvent varier d'un procédé à l'autre. Ils sont fixes dans chacun des procédés. Le modèle de production qui correspond à cette hypothèse est celui de la programmation linéaire. Ici, ce sont les procédés ou les « activités » qui sont substituables plutôt que les facteurs. Dans notre schéma général, on voit que deux procédés (I et II) peuvent être utilisés dans la production d'un certain bien, l'un ou l'autre, indépendamment. L'échelle de mesure de la production le long des rayons *OA* et *OB* n'est pas nécessairement la même. Cette échelle dépend de la productivité des facteurs lorsqu'ils sont utilisés dans un procédé particulier. Supposons que les points *A* et *B* représentent la même quantité de production. On peut prouver que tout point, le long de *AB*, consiste à utiliser une combinaison des deux procédés I et II et donnera le même montant de production [12]. Donc la courbe brisée *A'ABB'* est un isoquant. Ce modèle

12. Voir : R. Dorfman, « Mathematical or Linear Programming », *American Economic Review*, 1953.

est, sans doute, le plus « réaliste » des cinq cas présentés ici ; car nous allons maintenant faire un bond en avant et supposer que nous n'avons pas seulement une méthode, ou deux ou trois méthodes fondamentales pour produire un bien, mais une infinité de méthodes, les facteurs étant continus, et la production étant une fonction continue des quantités de facteurs.

3ème cas : *Facteurs partiellement substituables*

Les préceptes de l'analyse marginale n'étaient pas applicables aux deux cas précédents. Mais, si l'on suppose un certain degré partiel de substitution entre les facteurs continus et la variabilité des rapports entre les facteurs, nous obtenons le cas de la fonction de production classique dont les propriétés n'ont pas encore été épuisées ; à preuve les multiples communications des trois dernières années dans l'*American Economic Review*. Nous disposons maintenant de formes algébriques spécifiques nous permettant d'illustrer les différentes lois de production requises par la théorie économique. Si nous voulons une fonction de production devant illustrer la loi des rendements non proportionnels « à la Turgot », c'est-à-dire avec point d'inflexion et un maximum, on peut utiliser la forme proposée par Frisch :

$$y = \frac{100(v_1 v_2 v_3)^2}{v_1^4 + v_2^4 + v_3^4} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} \right)$$

ou encore une fonction du même genre pour deux facteurs seulement proposée par Rowe et Sato dans l'*American Economic Review* [13] :

$$y = \frac{v_1^2 \, v_2^2}{av_1^3 + bv_2^3}$$

ou, finalement, la fonction suivante utilisée par Borts et Mishan [14] :

$$y = \frac{5v_1^2}{v_2} - \frac{v_1^3}{3v_2^2}$$

Toutes ces fonctions sont homogènes de degré un et possèdent des rendements constants à l'échelle. De plus, elles possèdent le

13. « Diminishing Returns and Linear Homogeneity : Comment », *The American Economic Review*, septembre 1964.

14. « Exploring the Uneconomic Region of the Production Function », *Review of Economic Studies*, vol. 29, no 4.

fameux point d'inflexion correspondant à la valeur maximale de la productivité marginale de chaque facteur. Par conséquent, les isoquants ont une forme très particulière correspondant aux propriétés mathématiques des fonctions de cette famille. Les trois fonctions ci-haut possèdent une région de substitution caractéristique où les productivités marginales de tous les facteurs sont positives. Une autre variété de fonction de production moins « classique » exclut le point d'inflexion mais conserve un maximum pour chaque courbe de productivité totale. Elle est utilisée par R.G.D. Allen et est de la forme :

$$y = \sqrt{2Hv_1v_2 - Av_1^2 - Bv_2^2} \quad (H^2 > AB)$$

Cette fonction de production « classique », sous l'une de ces variantes, sert à illustrer plusieurs principes qui sont au cœur de la théorie de la firme et au cœur de l'analyse économique en général. Elle doit être considérée comme un cadre à l'intérieur duquel l'économiste formule un certain nombre de concepts et de relations qui constituent la base d'un langage cohérent ; à l'aide de ce langage et de cet outil, l'économiste peut développer des modèles dans lesquels des questions précises sont posées à la réalité concrète. Parmi ces concepts et relations, mentionnons la notion fondamentale de substitution, la possibilité de plusieurs méthodes alternatives de production, la notion d'économies d'échelle, la notion d'efficacité, la notion d'optimum, le concept de productivité marginale, la notion d'élasticité partielle de la production à une variation dans un facteur.

C'est pourquoi, en fonction de ce point de vue, je ne crois pas qu'il faille abandonner la partie devant la critique de ceux qui disent : « Avez-vous jamais vu une fonction de production ? » ou encore : « Nommez-moi une seule compagnie qui dresse un tableau analogue à celle que vous décrivez dans vos manuels ». Ce que je reproche à ce genre de question, ce n'est pas tant qu'elle colle son adversaire au pied du mur — c'est là un aspect positif car la science progresse grâce à cette attitude critique —, mais bien qu'elle oublie ou rejette dans l'ombre un aspect important de toute construction théorique. En voulant trop rechercher une contrepartie empirique de la fonction de production dans les tiroirs d'une usine prise au hasard, elle rejoint l'attitude d'un positiviste célèbre qui déclarait : « Je ne tiendrai pour certain que ce que j'aurai découvert sous mon scalpel ». Il y a donc, ici, un conflit méthodologique. Mais même si on n'est pas prêt à souscrire au point de vue théorétique ci-haut, les exemples abondent de fonctions empiriques dans le domaine agricole.

4ème cas : *Facteurs infiniment substituables*

Deux termes équivalents peuvent être suggérés pour décrire ce cas : les facteurs sont pleinement ou complètement substituables. Cette supposition est exprimée dans une fonction de la forme :

$$y = v_1^{\alpha} v_2^{1-\alpha}$$

ou :

$$y = v_1^i v_2^j \qquad i \neq j$$

C'est la forme de l'équation originellement proposée par Cobb et Douglas au cours des années 1930, pour vérifier les implications de la théorie de la productivité marginale de la distribution au niveau macroéconomique. On la trouve encore fréquemment utilisée sous sa forme agrégative où elle est ajustée à des séries temporelles ou sectorielles. Elle est facilement représentée dans un modèle à trois dimensions par une section de surface conique ayant son sommet à l'origine. La carte d'iso-produit qui n'est rien d'autre qu'une représentation paramétrique de la fonction, prend l'aspect indiqué sur notre schéma général : les isoquants sont asymptotiques aux axes de coordonnées. La totalité du champ factoriel est alors une zone de substitution généralisée.

Économiquement, une telle supposition n'a pas de sens à moins que la fonction soit délimitée par certaines valeurs maximales. Sinon, cela impliquerait que l'un des facteurs ou les deux sont disponibles en quantité illimitée si bien qu'il serait indifférent de produire une quantitée donnée avec une quantité aussi petite que l'on veut d'un facteur, pourvu que l'autre soit utilisé en quantité infinie.

Les propriétés de cette fonction sont nombreuses, et nous ne pouvons, ici, que renvoyer le lecteur au meilleur exposé à notre connaissance, celui de Jan Tinbergen en 1942 [15]. L'élasticité de substitution y est égale à un en tout point du champ factoriel.

5ème cas : *Facteurs parfaitement substituables*

Nous voici rendu au terme de notre classification logique des cas possibles. Dans ce cas extrême, l'élasticité de substitution entre facteurs est infinie. Ceci implique que les isoquants sont des droites parallèles d'inclinaison négative dans le champ factoriel. Le taux marginal de substitution entre les facteurs est donc constant. En d'autres termes, un nombre constant d'unités du facteur v_2 peut remplacer une unité de v_1 tout en gardant la production constante, quelle que soit la combinaison initiale de ces deux facteurs. L'un ou l'autre de ces facteurs est donc superflu. Dans un pareil cas, il n'y a pas lieu de représenter les unités de ces deux facteurs sur des axes différents, car on ne saurait les distinguer : ils constituent un seul et même facteur, à toutes fins pratiques. Ce cas peut donc sembler d'un usage très restreint.

En fait, on utilise cette propriété pour définir un facteur homogène : si toutes les unités comprises dans une catégorie de facteurs ont entre elles, des taux marginaux de substitution constants et égaux, ce facteur est dit homogène. On devrait donc remplacer v_1 et v_2 par un seul facteur v' qui serait une combinaison linéaire de v_1 et v_2 :

$$v' = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

où le taux marginal de substitution est $-\dfrac{a_2}{a_1}$.

Ce serait une omission majeure de ne pas mentionner ici les noms de Chenery, Arrow, Minhas et Solow [16]. Car nous leur devons un quatuor d'une qualité exquise. Mais l'écart est tel entre cette nouvelle fonction de production CAMS et l'approche traditionnelle, que l'étudiant qui n'est pas équipé de solides outils mathématiques risque d'y tomber de Charybde en Scylla (CamS).

L'attrait de la nouvelle fonction vient de sa généralité. Elle

15. « Professor Douglas Production Function », *Revue de l'Institut International de Statistique*, 1942, livraison 1-2.

16. « Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency », *Review of Economics and Statistics*, août 1961, pp. 225-250. Cette fonction est souvent désignée par les initiales des auteurs dans l'ordre SMAC ou encore par le vocable de « CES » ou *constant elasticity of substitution production function.*

tient compte de tous les cas énumérés ici pour certaines valeurs de ses paramètres : à partir de valeurs observées pour K le stock de capital, L, la main-d'œuvre, et V, la valeur ajoutée, et en incluant un *trend* temporel, on a induit une fonction de la forme :

$$V = \gamma[\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

où les trois paramètres γ, δ et ρ ont la signification suivante :

γ : est un *trend* temporel qui suppose que les changements technologiques sont neutres, c'est-à-dire n'affectent pas les proportions entre les facteurs.

δ : est un paramètre qui détermine la répartition des revenus entre le capital et le travail.

$\rho = \frac{1 - \sigma}{\sigma}$ où σ est l'élasticité de substitution.

$\rho = \infty$,	$\sigma = 0$	Facteurs limitatifs (fonction de Léontief)
$\rho = 0$,	$\sigma = 1$	Facteurs complètement substituables (fonction Cobb-Douglas)
$\rho = -1$,	$\sigma = \infty$	Facteurs parfaitement substituables (cas no 5).

IV — Théorie des coûts et théorie de la production

Dans cette dernière section, nous parlerons à la fois du manque de précision au sujet de la *dimension* des variables retenues dans l'analyse de la production et de l'insuffisance du schéma traditionnel des coûts de production pour analyser les problèmes actuels de la firme.

L'un des usages théoriques de la fonction de production, au niveau micro-économique, est la dérivation et la rationalisation des courbes d'offre de la firme et de l'industrie. Les courbes d'offre sont dérivées des courbes de coûts, et les courbes de coûts sont dérivées des courbes de productivité. On spécifie, au niveau des manuels, que l'analyse est statique et qu'on ne tient pas compte du passage du temps. Mais il se fait que l'économiste insatisfait de cet état de chose, se prononce aussi sur le comportement de la firme à l'aide de ses outils statiques : « la firme devra fermer ses portes », ... « si la production baisse les coûts augmentent », ... « des firmes nouvelles entrent dans le secteur jusqu'à ce que » ..., « à court terme » ... « mais à long terme... ».

Voilà autant de propositions qui ont une connotation essentiellement dynamique et qui réfèrent à des situations où le temps intervient. Cet état de chose est en soi insatisfaisant.

Nous nous proposons, ici, d'indiquer les façons dont le temps s'introduit dans l'analyse de la production et des coûts, et de montrer comment une extension et une reformulation de ces théories est nécessaire si l'on veut les utiliser pour décrire des situations concrètes et même prescrire des règles de comportement pour la firme.

1 — Tout d'abord, même dans une analyse qui se veut « purement » statique, le temps intervient dans la dimension des variables utilisées. On prend d'habitude le soin de préciser que les inputs sont des *flux* par unité de temps. Cette précision est louable mais elle ne va pas très loin ; car dès qu'on envisage le facteur capital, on n'est plus très sûr de sa dimension. Tantôt, il s'agit d'un *flux ;* on se réfère aux « services » du capital, par exemple « tant d'heures de rouleau compresseur » ou « tant d'heures de machine ». Mais lorsqu'on songe à maintenir le capital constant, on pense plutôt à une usine d'une certaine grandeur, fixe pour l'instant, et on raisonne comme si on devait utiliser cette usine à pleine capacité, c'est-à-dire comme si elle avait la dimension d'un *stock*, soit une usine d'une grandeur déterminée.

Ceci est important, car la distinction entre facteurs fixes et variables dans l'analyse de la production est relative : elle dépend de la *période de temps* à laquelle l'analyse se réfère : est-ce l'année comptable, ou l'année fiscale, ou la saison, ou bien simplement le temps d'utilisation des facteurs ? Les facteurs peuvent être fixes ou variables selon que :

1) leur coût total est fixe ou variable ;

2) leur taux d'utilisation est fixe ou variable.

Supposons une firme qui loue 5 machines pour un an. Le coût total pour l'année est fixe. Mais le flux de facteur est variable pour deux raisons : le nombre de machines utilisées et le nombre d'heures d'opération de chacune peuvent varier. Ces deux facteurs feront varier le coût en fonction du flux. En résumé, il n'y a pas de correspondance bi-univoque entre coût total fixe ou variable, d'une part, et taux d'utilisation d'un facteur, d'autre part [17, 18].

2 — En second lieu, reprenons l'exemple de la substitution du capital au travail. Le but même de la substitution est de raccourcir le temps nécessaire pour effectuer un travail donné. Mais le nouveau procédé implique une période d'investissement plus longue pour deux raisons, selon Baumol : parce que le capital prend du temps à construire, et parce qu'il dure. La période de production n'est pas nécessairement la même que la période d'investissement. La relation entre les deux a sûrement un effet sur le comportement des coûts.

Ces quelques observations suffisent à montrer la nécessité d'une reformulation de la théorie des coûts pour la rendre utile dans l'analyse de situations concrètes. Si un schéma théorique veut être utilisable, il doit inclure les variables qui sont présentes et qui agissent dans des situations concrètes. Or, le modèle traditionnel des coûts ne retient qu'une seule variable, à savoir le volume de la production.

C'est à partir de ces constatations que Armen Alchian a montré comment on devrait inclure au moins trois autres variables dans la fonction de coût [19].

1) Le volume total anticipé de production. Pour chaque rythme de production constant, plus grand est le volume cumulé de production envisagé, plus longue sera la période de production.

2) La durée totale du plan de production.

3) La répartition dans le temps de la disponibilité du produit. Interprétant le concept de coût total C, de façon élargie, il formule la fonction de coût comme :

$$C = f(V, x(t), T, m)$$

où : V est le volume total de production envisagé,

$x(t)$ est le taux de production à l'instant t,

17. Les réflexions qui précèdent sont adoptées de Jack Johnston, *Statistical Cost Analysis*.

18. Sur l'importance de l'analyse dimensionnelle dans le cas présent nous signalons l'article intéressant de Erich Schneider, « Les courbes de coûts de production en théorie et en pratique », *Cahiers du Séminaire d'Économétrie*.

19. Voir l'article « Costs & Outputs » dans *The Allocation of Economic Resources*, Essays in Honor of Bernard Francis Haley, édité par L. Abramovitz, Stanford University Press, 1959, p. 24.

T est l'instant où la première unité de production est terminée,
m est la longueur de l'intervalle au cours duquel la production est disponible.

Nous n'avons pas l'intention de répéter ici tous les théorèmes dérivés par Alchian. Il suffisait de montrer la nature restreinte de la fonction de production classique comme base d'une théorie opérationnelle des coûts. Nous n'attirerons l'attention que sur une de ses propositions : « à mesure que le volume cumulé de production augmente, le coût de la production *future* diminue. Plusieurs facteurs expliquent ce phénomène : la familiarisation croissante avec le travail, l'amélioration dans la coordination des activités, des outils plus efficaces, etc. » [20].

Avec ce genre d'observation, nous sommes déjà rendus loin du contexte statique de la théorie de la production et des coûts, car on évolue vers une conception dynamique de ces théories qui doit, à priori, en accroître la valeur comme instrument d'analyse et de prédiction.

Conclusion

Nous avons présenté dès le début de cet article, la fonction de production comme un outil. Et c'est un outil dont on se sert. Il est nécessaire de démolir la critique de ceux qui ne voient, dans la fonction de production, qu'une construction purement formelle, qu'on n'utilise pas en pratique. Au contraire, les exemples d'utilisations pratiques abondent, tant dans le domaine de l'analyse d'input-output de Léontief, que dans celui de l'économie agricole. Par ailleurs, sur le plan de l'évolution de la théorie économique, le concept formel est indispensable.

En terminant, nous espérons que les quelques précisions et observations contenues dans cet aperçu modeste auront réussi à dissiper certains malentendus, tout en soulevant des questions propres à susciter d'autres recherches.

Claude GERMAIN,
professeur à l'École des Hautes Études commerciales (Montréal)

20. Traduction libre, *op. cit.*, p. 24. Voir aussi : A.A. Alchian et W.R. Allen, *University Economics*, 2e édition, 1968.

APPENDICE

Voici quelques références bibliographiques au sujet de la définition d'une fonction de production :

1 — ALLEN, R.G.D., *Mathematical Analysis for Economists*, 1ère édition, 1938, reproduit en 1960, p. 284.

2 — BOULDING, K., *Economic Analysis*, vol. I, 4e éd., 1966, p. 423, y compris l'ensemble du chapitre « Three Variable Analysis of a Firm ».

3 — CARLSON, Sune, *A Study on the Pure Theory of Production*, Kelley & Millman Inc., New-York, 1956, pp. 14-15. Première édition publiée à Londres en 1939.

4 — FRISCH, Ragnar, *Lois techniques et économiques de la production*, Dunod, 1963, p. 41.

5 — HAAVELMO, Trygve, *A Study in the Theory of Investment*, University of Chicago Press, 1960.

6 — SAMUELSON, Paul-A., *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1961, pp. 57-58.

7 — SCHNEIDER, Erich, *Pricing and Equilibrium*, George Allen & Unwin Ltd., London, 2e éd., 1962, p. 140. Édition originale publiée en allemand en 1949.

8 — SCHUMPETER, Joseph, *History of Economic Analysis*, 1954, pp. 1027 et 1031.

9 — SMITH, Vernon L., « The Theory of Investment and Production », *Quarterly Journal of Economics*, 1959, p. 66.

10 — WALTERS, A.A., « Production and Cost Functions : An Econometric Survey », *Econometrica*, janvier-avril 1963.