L'Actualité économique

# Recherche opérationnelle - 4
## Contribution d'un auteur français à l'évolution d'une science : René Roy

Claude Tricot

Volume 40, Number 1, April–June 1964

URI: https://id.erudit.org/iderudit/1002828ar
DOI: https://doi.org/10.7202/1002828ar

See table of contents

Publisher(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (print)
1710-3991 (digital)

Explore this journal

Cite this article

Tricot, C. (1964). Recherche opérationnelle - 4 : contribution d'un auteur français à l'évolution d'une science : René Roy. *L'Actualité économique*, *40*(1), 146–161. https://doi.org/10.7202/1002828ar

# Analyse

## Recherche opérationnelle - 4

### *Contribution d'un auteur français à l'évolution d'une science : René Roy*

Les publications de Monsieur René Roy couvrent, jusqu'ici, une période de trente à quarante ans dans le domaine de l'économétrie. Si l'on fixe aux environs de 1930 la naissance de cette science, et c'est la date à laquelle Monsieur Roy lui-même place au moins son baptême : « l'économétrie, dont les premières démarches remontent au début du vingtième siècle, a pris corps vers 1930 » [1], on voit qu'analyser cette œuvre c'est un peu écrire l'histoire d'une science ; ceci est d'autant plus vrai que M. Roy se fait volontiers l'écho des développements successifs de l'économétrie. Dans cet article, je ne prétends pas faire une telle analyse, mais plutôt marquer l'évolution de cette science en m'attachant à quelques recherches de l'auteur.

Une telle étude a bien sa place dans une chronique de recherche opérationnelle, et ceci pour plusieurs raisons. Tout d'abord, comme nous le faisait remarquer Monsieur Roy, la frontière entre économétrie et recherche opérationnelle ne se trace pas facilement, si leur objet est différent : il s'agit dans les deux cas de l'introduction des mathématiques dans le domaine des sciences sociales. D'autre part, la recherche opérationnelle a profité de l'expérience de l'économétrie : « Les modèles économétriques en particulier ont été largement utilisés en Recherche Opérationnelle » [2]. Enfin, il y a, sinon

1. « Analyse de la demande », dans les cahiers de l'*Instituto de Alta Cultura*, Lisbonne, 1961.

2. René Roy, *La Recherche opérationnelle au service de l'ingénieur.*

dans les revues, au moins dans le champ des applications, une querelle de la recherche opérationnelle, comme il y en eut une de l'économétrie dont on trouve bien des traces dans les publications anciennes de Monsieur Roy. Or, c'est la même querelle et les arguments qui furent bons dans un cas le sont encore dans l'autre.

Il y a deux sortes de justifications à l'introduction des mathématiques dans ces domaines réservés : marcher pour prouver le mouvement, et ce sont des arguments de cette nature que l'on trouve proposés en 1936 par notre auteur [3], lorsqu'il énumère des domaines où l'introduction des mathématiques s'est révélée fructueuse (p. 9 ; il cite la distribution des revenus, la mesure de l'utilité des biens économiques, les cycles économiques, l'étude des courbes de demande ; la liste s'est bien allongée depuis). D'autres arguments peuvent être donnés qui assignent un certain rôle aux mathématiques en en circonscrivant l'emploi ; à ce sujet dans le même article, il cite Paul Painlevé : « c'est la marche naturelle des sciences d'évoluer de l'état qualitatif et descriptif à l'état quantitatif et causal ».

Cependant, toujours selon Paul Painlevé, « même sous sa forme statistique, une science quantitative ne saurait raisonner que sur des grandeurs mesurables bien définies » ; or, « on ne pourra parler avec précision des dimensions d'une grandeur économique, que le jour où elle sera définie aussi nettement qu'une longueur ». Il faut avouer que ce n'est guère encore le cas, si cela peut jamais l'être, de la notion d'utilité, où l'on ne peut que difficilement même *repérer* l'utilité d'un complexe de biens, sans parler de le *mesurer*. Difficulté analogue en recherche opérationnelle lorsqu'il s'agit d'évaluer, par exemple, le coût d'une attente qui risque de décourager le client.

Ces réflexions conduisent à la prudence ; aussi, voit-on M. René Roy dans *Analyse de la demande* [4] affirmer : « en premier lieu tout économètre reste économiste, c'est-à-dire qu'il ne doit ignorer ni les théories générales, ni les grandes lignes de l'histoire économique et sociale des groupements auxquels il entend consacrer ses travaux ». Ceci pose un problème car on n'apprend pas les mathématiques au moment où l'on en a besoin : c'est une discipline qui suffit fort bien à occuper son homme et un outil délicat qu'il convient de manœuvrer à bon escient ; du reste, *l'idée même de son usage n'en vient*

3. *Contribution aux recherches économétriques*, chez Hermanns.
4. *Op. cit.*, p. 9.

*qu'au spécialiste*. Empruntons, de nouveau, cette idée dans la forme que lui donne M. René Roy dans son discours prononcé à l'occasion de son installation comme président de la Société Statistique de Paris, en 1949 [5] : « Certes la statistique est un merveilleux instrument de description, mais elle doit se tenir toujours à la disposition de l'utilisateur qui l'applique à un domaine particulier d'investigation. Cela revient à dire que l'idéal serait, lorsqu'on manie la statistique, d'être à la fois rompu à cet art de la description quantitative et à toutes les particularités de la matière qui fait l'objet de l'application ». Car, en effet, « ce dont il faut avant tout se garder c'est d'être pour ainsi dire l'esclave de cet outil et de s'abandonner à cette manière d'automatisme qui, confinant à la paresse intellectuelle se borne à décrire sans aller jusqu'à l'explication ». L'économètre sera donc l'homme de science qui prend l'économie pour champ d'application ; aussi, n'est-il pas surprenant de voir que Jules Dupuit, par exemple, l'un des ancêtres de l'économétrie, dont Monsieur Roy a retracé la vie [6], était, comme son biographe, de formation scientifique, appartenant comme lui au Corps des Ponts et Chaussées. Plus précisément, l'ingénieur des grandes écoles semble bien être d'ailleurs pour Monsieur Roy l'économètre en puissance qu'était Dupuit, puisqu'on le voit insister, dans son cours d'économie politique [7], sur cette idée qui : « dans la question de l'utilité des travaux publics, construction et exploitation sont deux problèmes liés ». On peut observer, parallèlement, que dans les groupes de recherche opérationnelle français, l'ingénieur des grandes écoles, et notamment le polytechnicien, est légion, et c'est bien en effet à l'ingénieur que les problèmes de rentabilité se posent. Cependant, ne cherche-t-on pas, dans de tels groupes, à associer des gens d'horizons divers ayant un substrat commun ? L'économètre ne peut ignorer l'économie mais doit-il être économiste ? Un économiste est peut être moins utile qu'un institut d'économie.

Terminons sur ce sujet par une citation empruntée à une conférence sur la recherche opérationnelle : « De toute manière l'homme d'action qui doit se décider aura certainement intérêt à ne pas faire

5. *Journal de la Société Statistique de Paris*, mai-juin 1949.

6. *Jules Dupuit et son œuvre économique*, publié par l'École nationale des Ponts et Chaussées, 1945.

7. Cours professé à l'École des Ponts et Chaussées, livre 6, p. 9.

uniquement état des résultats d'une étude relevant de la recherche opérationnelle, même si elle a été conduite avec la compétence et le soin désirables quelle que soit la nature de l'espèce en cause, il faut toujours compter avec bien d'autres facteurs parmi lesquels figurent au premier chef l'intuition et l'expérience professionnelle »[8]. L'on peut, je pense, ici, remplacer « recherche opérationnelle » par « économétrie » et c'est là une opinion à laquelle il convient de réfléchir venant d'un économiste qui fut pionnier de l'économétrie : les mathématiques, par un curieux paradoxe, *apportent une lumière* sur les rapports qui lient les grandeurs économiques, mais elles *ne résolvent pas le problème.*

*
* *

Dans les publications de M. Roy, je choisirai principalement celles qui ont trait à l'analyse de la demande et celles qui concernent les indices économiques.

On trouve plusieurs communications concernant l'analyse de la demande, publiées dans différentes revues dès avant la dernière guerre : dans la *Revue d'Économie politique,* la revue de l'Institut international de Statistique : *Metron,* dans les *Actualités scientifiques et industrielles,* etc., dans lesquelles il brosse un état de la question en la plaçant souvent dans son évolution historique. On voit ainsi Augustin Cournot étudier la loi du débit, relation entre prix et consommation, et dégager le caractère élastique ou inélastique de la demande ; Jules Dupuit, étudier les propriétés de la courbe de consommation (qui est la courbe de débit de Cournot) en expliquant sa concavité par la loi de distribution des revenus individuels, non précisée d'ailleurs et imaginée comme une loi à densité décroissante Jules Dupuit, encore, formant la notion d'utilité ; Léon Walras, introduisant les prix des produits environnant dans l'expression de la demande d'un produit donné, faisant de celle-ci une fonction à plusieurs variables ; Marshall définissant le coefficient d'élasticité au moyen de la formule :

$\frac{dq}{q} = -\lambda \frac{dp}{p}$ où $p$ représente le prix et $q$ la quantité deman-

8. Communication présentée au Conseil général des Ponts et Chaussées, le 6 janvier 1960.

dée, formule qui permet la détermination pratique du coefficient d'élasticité $\lambda$ en remplaçant les différentielles par des différences utilisant deux époques voisines.

Si $r$ est la recette, on a alors :

$$r = pq$$

ce qui donne, par différenciation :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} + \frac{dq}{q}$$

$$= \frac{dp}{p} - \lambda \frac{dp}{p} = (1 - \lambda) \frac{dp}{p}$$

formule qui permet d'apprécier l'effet d'une variation de prix sur la recette globale et incite à distinguer les produits à demande élastique ( $\lambda < 1$) où la recette varie dans le même sens que le prix, donc en sens contraire de la quantité demandée, et les produits à demande élastique ($\lambda > 1$) qui se comportent à l'inverse des précédents. Des exemples sont donnés, dont la célèbre loi de Grégory King concernant le blé dont la demande se montre, dans les circonstances étudiées, à élasticité constante (courbe Marshalienne).

D'autres exemples font partie des études personnelles de l'auteur qui s'est consacré, dans ce domaine, à l'étude des produits et services monopolisés, l'étude de la demande étant, pour ces produits, rendue propice du fait que le prix est fixé par voie d'autorité, ce qui en fait vraiment une variable indépendante. C'est ainsi qu'il étudie la demande de transport dans le cas des tramways de Marseille entre 1925 et 1926 où des augmentations de tarifs se sont produites dans un laps de temps assez court. En éliminant l'influence du mouvement séculaire, il obtient pour la période considérée des coefficients d'élasticité remarquablement constants. D'autres études ont été faites par l'auteur sur la demande de gaz d'éclairage à Paris, et sur la consommation du tabac où une difficulté s'introduit du fait qu'il faut tenir compte des différentes qualités de cet article et, de plus, de la constitution des stocks au moment du relèvement des tarifs [9].

9. Voir, par exemple, « Contribution aux recherches économétriques » dans les *Actualités scientifiques et industrielles* (n° 412), chez Hermanns, 1936.

L'introduction des méthodes statistiques est notée avec les travaux de M. Moore qui détermine la forme de la loi de la demande en ajustant les données à une forme analytique par la méthode des moindres carrés. Ainsi, la demande revêt la forme :

$$Y = \varphi\ (X_1, X_2..., X_n)$$

expression où les $X_i$ sont d'ailleurs des prix soustraits à l'influence du *temps et non* des prix réels.

Dans la relation précédente, le temps n'intervient pas explicitement puisqu'on raisonne sur des variables ajustées. En revanche, H. Schultz fait intervenir le temps et considère une expression linéaire de la forme :

$$Y = a + b\,X + ct$$

ou encore Marshalienne :

$$Y = AX^{\alpha} e^{\beta t}$$

où les logarithmes sont liés par une relation linéaire, cette dernière forme donnant un taux de variation constant : la consommation varie chaque année dans une *proportion invariable* et non pas d'une *quantité constante* comme dans une expression linéaire. Notons ici une contribution que Monsieur Roy, vers cette époque, apporta à la théorie économique de la demande.

On a vu qu'il reconnaissait à Jules Dupuit l'intuition première du rôle de la loi de distribution des revenus dans l'analyse de la demande : c'est elle qui permet de passer de la demande particulière à la demande globale, et c'est sa considération qui est à l'origine du théorème que Herman Wold appelle le théorème de Roy [10]. Soit $r$ un revenu et $n(r)$ la fonction de densité de la distribution des revenus. On considère le groupe des biens de première nécessité : soit $q_s$ la consommation maximum d'un tel bien, et $p$ son prix.

Le nombre d'individus dont le revenu est supérieur à $\sum q_s p$ est :

$$\int_{\Sigma q_s p}^{\infty} n(r)dr.$$

10. *Demand Analysis*, Wiley 1953, p. 120.

et leur dépense quant à ces biens nécessaires :

$$\sum q_s p \int_{\Sigma q_s p}^{\infty} n(r) dr.$$

Ceux dont le revenu n'atteint pas $\sum q_s p$ ont une dépense totale, si $r_0$ est le revenu le plus bas :

$$\int_{r_0}^{\Sigma q_s p} rn(r) dr.$$

$\mathcal{Q}$ étant la quantité totale consommée d'un de ces biens, on a donc :

$$\sum \mathcal{Q}\, p = \sum q_s p \int_{\Sigma q_s p}^{\infty} n(r) dr + \int_{r_0}^{\Sigma q_s p} rn(r) dr.$$

D'où, en différenciant :

$$\sum p\, d\mathcal{Q} + \sum \mathcal{Q}\, dp = \sum q_s dp \int_{\Sigma q_s p}^{\infty} n(r) dr$$

$$- \sum q_s p\, n(\sum q_s p) \sum q_s dp + \sum q_s p n(\sum q_s p) \sum q_s dp$$

$$\sum p\, d\mathcal{Q} + \sum \mathcal{Q}\, dp = \sum q_s dp \int_{\Sigma q_s p}^{\infty} n(r) dr$$

On posera :

$$\mathcal{Q}_s = q_s \int_{\Sigma q_s p}^{\infty} n(r) dr$$

qui est la quantité consommée par les personnes de revenu supérieur à $\sum q_s p$.

L'égalité précédente deviendra :

$$\sum p\, d\mathcal{Q} = \sum (\mathcal{Q}_s - \mathcal{Q})\, dp$$

et pour chaque bien :

$$p\, d\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_s - \mathcal{Q})\, dp$$

d'où l'élasticité de ce bien par rapport au prix :

$$-\frac{\frac{d\mathcal{Q}}{q}}{\frac{dp}{p}} = \boxed{\frac{\mathcal{Q} - \mathcal{Q}_s}{\mathcal{Q}}}$$

quantité, notamment, nécessairement inférieure à l'unité, ce qui est d'expérience courante pour ces produits de première nécessité qui sont, comme on a vu, de produits à demande inélastique.

* * *

À cette époque, l'économétrie n'est pas encore une science autonome : il n'y a pas de théorie économétrique mais des essais partiels de formulation mathématique de phénomènes économiques.

Les publications plus récentes ont une toute autre forme. Dans l'*Analyse de la demande*, citée plus haut, comme dans son cours à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, Monsieur Roy prend les choses non plus dans leur évolution *historique*, mais dans leur déroulement *logique* et on est en mesure de saisir l'évolution considérable de la science économétrique. De ce point de vue, la brochure *Analyse de la demande* dont nous parlions plus haut constitue un exposé fort clair et condensé du problème de la demande ; l'exposé débute par l'analyse de la fonction d'utilité, des surfaces d'indifférences, de leur équation en coordonnée tangentielle (niveau maximum d'existence compatible avec un système de prix et un revenu donnés).

$\rho$ étant le revenu réel (quotient du revenu à l'instant $t$ par un indice des prix $z$ convenablement choisi), $\pi_i$ étant le prix réel $\frac{p_i}{z}$ du bien de rang $i$ ($p_i$ est le prix à l'intant $t$), $\omega(\rho)$ étant le degré final d'utilité du revenu réel, $u_i$ étant le degré final d'utilité du bien de rang $i$, on démontre la relation :

$$\frac{u_i}{\pi_i} = \omega(\rho)$$

qui, dans le cas où les biens sont indépendants, s'écrit :

$$\frac{u(q_i)}{\pi_i} = \omega(\rho)$$

Cette relation définit la surface de *consommation* dont l'intersection par un plan $\rho = \rho_0$ sera une courbe de demande individuelle.

* * *

L'étude théorique de la demande fait apparaître la nécessité d'une définition d'un indice des prix entre deux époques données 0 et $t$.

À ce propos, nous trouvons un important article dans le *Journal de la Société de Statistique de Paris* [11] complété par une autre publication de la même revue en janvier - février 1949, où l'auteur définit un indice en se plaçant aux différents points de vue d'où l'on peut considérer le problème. On retrouvera ces considérations dans le cours d'économétrie que l'auteur donna à l'I.S.U.P.

*Premier point de vue* : celui du statisticien. Chaque prix a son indice particulier : $\frac{p}{p_0}$;

l'indice des prix serait le nombre le plus proche de ces différents rapports, au sens des moindres carrés, par exemple, c'est-à-dire le nombre $a$ qui rendra minimum

$$\sum \left(a - \frac{p}{p_0}\right)^2$$

Il s'agit comme on le sait de la moyenne arithmétique des indices particuliers :

$$\sum \frac{1}{n} \times \frac{p}{p_0}$$

Cependant, cette considération ne devant pas seule être retenue (par exemple, une moyenne représente mal un ensemble dissymétrique), on sera amené à changer de variable, au moyen d'une fonc-

11. Septembre-octobre 1941.

tion $f$ ayant les qualités voulues, et l'indice $m$ sera défini par la relation :

$$f(m) = \frac{1}{n} \sum f\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

*Autre conception* : la conception budgétaire qui a donné naissance aux indices bien connus de Laspeyre, Paasche, Fisher, Edgeworth : on tient compte de l'importance en quantité des marchandises vendues aux différents prix retenus : l'indice sera le la forme :

$$I = \frac{\Sigma\ qp}{\Sigma\ qp_0}$$

$q$ représentant la quantité consommée de la marchandise de prix $p$ à l'époque $t$ et $p_0$ à l'époque 0 ; $q$ est arbitraire : il est le prix à l'époque 0 dans l'indice de Laspeyre, à l'époque $t$ dans l'indice de Paasche, à la moyenne des deux dans celui d'Edgeworth, tandis que Fisher prend la moyenne géométrique des indices de Laspeyre et Paasche. Quel est le bon ? Il faut des critères de qualité ; ceux que fournit Fisher sont bien raisonnables et également arbitraires.

A noter que $I = \frac{\Sigma\ qp}{\Sigma\ qp_0}$ est une moyenne des indices particuliers, mais pondérée. En effet, $\frac{qp}{\Sigma\ qp_0}$ peut s'écrire :

$$\frac{qp_0}{\Sigma\ qp_0} \times \frac{p}{p_0}.$$

Si l'on pose : $$\alpha = \frac{qp_0}{\Sigma\ pq_0},$$

on voit que : $$I = \sum \alpha \frac{p}{p_0}$$

écriture qui relie cette conception à la conception statisticienne précédente, $I$ étant une moyenne pondérée des indices particuliers $\frac{p}{p_0}$. Notons en passant que d'autres pondérations ont été proposées pour échapper à l'arbitraire : Monsieur Duon, par exemple [12], a fait observer que les quantités considérées dans les indices

12. *De la théorie à la pratique des indices économiques*, Eyrolles, 1955.

de Laspeyre ou de Paasche pouvaient être remplacées par les quantités consommées entre les époques 0 et $t$ ce qui élimine une partie de l'arbitraire.

Ces indices sont nommés budgétaires parce que l'expression $\sum qp$ a la forme d'un budget.

*Troisième conception* : la conception monétaire. On ne considère plus les prix en eux-mêmes, mais la valeur de la monnaie qui en gros varie en sens inverse des prix. En première approximation la valeur $V$ de la monnaie est telle que, si $\mathcal{Q}$ est la quantité totale de signes monétaires utilisés, $V\mathcal{Q}$ = Constante.

L'indice monétaire $I$ sera, par définition :

$$I = \frac{1}{V}$$

Plus précsément, si $r$ est la rapidité moyenne de circulation et A un indice de l'activité des transactions, on aura :

$$\frac{V\mathcal{Q}r}{A} = k,$$

$k$ étant une constante.

On pose : $$C = \mathcal{Q}r$$

d'où : $$C = k\,A\,I.$$

On mesure C par $C = \sum qp$, $p$ étant le prix d'un bien et $q$ la quantité de ce bien achetée dans le temps qui permet la mesure de $r$.

Des équations
$$C = k\,A\,I$$
$$C = \sum qp$$

on déduit, en prenant les différentielles logarithmiques :

$$\frac{dC}{C} = \frac{dA}{A} + \frac{dI}{I}$$

et $$\frac{dC}{C} = \frac{\Sigma\, p\, dq}{\Sigma\, p\, q} + \frac{\Sigma\, q\, dp}{qp}$$

d'où : $$\frac{dI}{I} = \frac{\Sigma\, q\, dp}{\Sigma\, qp}.$$

Remarquons que, dans le cas très particulier où les quantités consommées ont augmenté de façon proportionnelle entre les époques 0 et $t$, on a :

$$\frac{q}{q_0} = \frac{q'}{q'_0} = \ldots\ldots = \lambda$$

donc :

$$\frac{dI}{I} = \frac{\Sigma\ \lambda\ q_0 dp}{\Sigma\ \lambda\ q_0 p} = \frac{\Sigma\ q_0 dp}{\Sigma\ q_0 p}$$

ce qui s'intègre et donne :

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\Sigma\ q_0 p}{\Sigma\ q_0 p_0}$$

On retrouve l'indice de Laspeyre.

Outre les indices *statistiques*, budgétaires et monétaires, on peut encore parler *d'indice fonctionnel.*

Un indice fonctionnel se définit, entre deux époques 0 et $t$ comme le rapport de deux budgets procurant la même utilité :

Si $\bar{P}_0$ et $\bar{P}_1$ sont les deux vecteurs-prix des deux situations envisagées, et si $r_0$ et $r_1$ sont deux revenus, la situation $\bar{P}_0$ procure au consommateur de revenu $r_0$ un complexe de biens $\mathfrak{Q}_0$. De même, la situation $\bar{P}_1$, procure moyennant le revenu $r_1$, l'ensemble de biens $\mathfrak{Q}_1$.

Soit U ($\mathfrak{Q}$) l'utilité du complexe de biens $\mathfrak{Q}$.

Si U ($\mathfrak{Q}_0$) = U ($\mathfrak{Q}_1$), l'indice fonctionnel sera le rapport :

$$I = \frac{\Sigma\ q_1\ p_1}{\Sigma\ q_0\ p_0} = \frac{r_1}{r_0}$$

On peut encore introduire l'indice fonctionnel à l'aide de la fonction d'utilité exprimée au moyen des prix et du revenu : $I\ (P,\ r)$, $z$ étant l'indice des prix, les situations $P_1$ et $zP_0$ devront procurer la même utilité au consommateur de revenu $r$ ; autrement dit :

$$I\ (\bar{P}_1,\ r) = I\ (z\ \bar{P}_0,\ r)$$

Les budgets correspondants aux situations $\{\bar{P}_1,\ r\}$ et $\{z\ \bar{P}_0,\ r\}$ sont respectivement :

$$r = \Sigma\ q_1\ p_1$$
$$r = \Sigma\ zp_0 q'$$

d'où :

$$z = \frac{\Sigma\ q_1\ p_1}{\Sigma\ q'\ p_0}$$

$z$ est bien le rapport de deux budgets aux époques $t$ et 0, les complexes correspondants, $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}'$ procurant, par définition la même utilité.

Pour déterminer le rapport qui existe entre l'indice fonctionnel et un indice de type monétaire, on considérera l'équation de définition de $z$ :

$$(1)\ I\ (z\ \overline{P}_0,\ r) = I\ (\overline{P},\ r)$$

En égalant les dérivées partielles par rapport à $r$ des deux membres de l'équation (1) on aura :

$$\sum \varphi_i'\, p_i^0 \frac{\delta z}{\delta r} + w' = w$$

$\varphi_i'$ désignant la dérivée partielle de $I$ par rapport à $p_i$ pour la situation $(z\ \overline{P}_0,\ r)$, $w'$ et $w$ étant respectivement le degré final d'utilité du revenu pour chacune des situations considérées.

Mais, on sait que $\varphi_i' = -\ q_i'\ w'$ ($q_i'$ : quantité de bien $i$ demandée), d'où :

$$-\ w' \frac{\delta z}{\delta r} \sum q_i'\ p_i^0 + w' = w$$

$$-\ w' \frac{\delta z}{\delta r} \sum q_i' \frac{p_i}{z} + w' = w$$

$$-\ w' \frac{\delta z}{\delta r} \times \frac{r}{z} + w' = w$$

d'où
$$\frac{\delta z}{\delta r} \frac{r}{z} = 1 - \frac{w}{w'}$$

Cette relation donne l'élasticité de $z$ par rapport au revenu ; celle de $z$ par rapport aux prix serait établie de façon analogue. On trouve :

$$\frac{Ez}{Ep} = \frac{\delta z}{\delta p} \times \frac{p}{z} = \frac{w\, q\, p}{w' q' z p^0}$$

d'où l'expression de la différentielle logarithmique de $z$ :

$$\frac{dz}{z} = \frac{Ez}{Er} \frac{dr}{r} + \sum \frac{Ez}{Ep} \times \frac{dp}{p}$$

$$= \left(1 - \frac{w}{w'}\right) \frac{dr}{r} + \frac{w}{w'}\, \alpha \frac{dp}{p}$$

$\alpha$ désignant le coefficient budgétaire du bien de prix $p$.

Posant :
$$\frac{w}{w'} - 1 = \varepsilon$$

on voit que :
$$\frac{dz}{z} = (1 + \varepsilon) \sum \alpha \frac{dp}{p} - \varepsilon \frac{dr}{r}$$

Ainsi $z$, sera un indice de type monétaire si $\varepsilon$ peut être considéré comme nul, ce qui donnera :
$$\frac{dz}{z} = \sum \alpha \frac{dp}{p}.$$

Cette condition peut s'interpréter facilement. On sait que :
$$\frac{\frac{\delta U}{\delta q_1}}{p_1} = \frac{\frac{\delta U}{\delta q_2}}{p_2} = --- = w$$

ou :
$$\frac{q_i \frac{\delta U}{\delta q_i}}{q_i\, p_i} = \frac{\sum q \frac{\delta U}{\delta q}}{\sum qp} = \frac{\sum q \frac{\delta U}{\delta q}}{r} = w$$

$\varepsilon$ nul signifie $w = w' =$ cte. $r$, d'autre part, est constant ; on obtient :
$$\sum q \frac{\delta U}{\delta q} = \text{cte}$$

sur une surface d'indifférence.

Cette constante peut être écrite : $\frac{1}{V'(U)}$ ce qui donne :
$$\sum q\, V'(U) \frac{\delta U}{\delta q} = 1$$
$$\sum q \frac{\delta V}{\delta q} = 1$$

$U$ n'étant définie qu'à une fonction croissante près, on peut prendre $V$ comme fonction d'utilité.
On obtient :
$$\sum q \frac{\delta U}{\delta q} = 1$$

relation qui exprime que les surfaces d'indifférence sont homothétiques par rapport à l'origine, ou encore, que les chemins d'expansion sont des droites issues de l'origine. Économiquement, cela signifie qu'une augmentation de revenu à prix constants entraîne une augmentation de la demande de chaque bien proportionnelle à la quantité demandée initialement, ce qui n'est admissible que pour les petits revenus, où encore si l'on groupe les biens en un nombre restreint de classes convenablement choisies.

L'indice fonctionnel peut être lié aux indices budgétaires de la façon suivante.

En pratique un consommateur, aux époques 0 et t n'a pas deux niveaux d'existence équivalents. En d'autres termes, les utilités $U\ (\mathcal{Q}_0)$ et $U\ (\mathcal{Q}_1)$ réelles ne sont pas égales. On peut par suite définir un indice de la situation t par rapport à la situation 0, par exemple, en faisant le rapport des budgets réels :

$$I_0 = \frac{\sum p_1\, q_1}{\sum p_0\, q_0}$$

On démontre aisément que ce nombre est inférieur à l'indice de Laspeyre calculé entre les époques 0 et t, d'où l'on déduit la proposition suivante.

Entre les niveaux d'existence définis par les consommations effectives aux époques 0 et $t$ il existe toujours un niveau d'existence intermédiaire pour lequel l'indice de prix se trouve compris entre les indices de Laspeyre et Paasche de la situation $t$ par rapport à la situation 0, ce qui permet, si ces deux derniers ne sont pas trop différents, d'apprécier l'indice fonctionnel par une moyenne des indices de Laspeyre et Paasche.

Enfin, notons que cet indice est l'indice correspondant à un *consommateur particulier*. Dans le cas où $w = w'$, l'indice satisfera à l'équation :

$$\frac{dI_k}{I_k} = \sum \alpha_k \frac{dp}{p}$$

les $\alpha_k$ étant les coefficients budgétaires (rapport de la part prise dans le budget pour l'achat d'un certain bien au budget total), l'indice $k$ correspondant à un groupe homogène de revenu $k$.

L'indice fonctionnel sera alors défini par

$$\frac{dI}{I} = \sum_k \beta_k \left( \sum \alpha_k \frac{dp}{p} \right)$$

les $\beta_k$ servant à pondérer chaque revenu particulier : $\beta_k$ sera le rapport du revenu de la classe $k$ au revenu total.

* * *

Il convient, pour finir, de noter que Monsieur R. Roy dirige le séminaire d'économétrie du C.N.R.S. (Centre national de la Recherche scientifique, à Paris) qui publie régulièrement des cahiers à travers lesquels on peut saisir les orientations de l'économétrie. À noter, à propos de ce que nous disions sur la frontière entre l'économétrie et la recherche opérationnelle : ces cahiers d'économétrie publient des textes qu'on peut classer dans l'une ou l'autre de ces deux disciplines ; par exemple, en 1956 on trouve une étude de R. Frisch sur « la résolution des problèmes de programmation linéaire par la méthode du potentiel logarithmique », en 1962, un texte sur la gestion des entreprises de Monsieur Georges Bernard.

Notons enfin, dans ces cahiers (cahiers 1962), des travaux destinés à modifier les théories générales compte tenu de la modification des hypothèses de base. Par exemple : les économies modernes sont sollicitées par leur dynamisme plutôt que par un souci de « perfection marginaliste », ce qui entraîne une révision de la théorie de l'équilibre (voir l'article de Henri Lavaill sur ce sujet).

Claude TRICOT,
*professeur à l'École des Hautes Études commerciales (Montréal).*