L'Actualité économique

Demande de portefeuille et politique de couverture de risque sous information incomplète
Portfolio Demand and Risk Coverage Policy Under Incomplete Information

Jérôme Detemple

Volume 69, numéro 1, mars 1993

L'asymétrie d'information

URI : https://id.erudit.org/iderudit/602096ar
DOI : https://doi.org/10.7202/602096ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Citer cet article

Detemple, J. (1993). Demande de portefeuille et politique de couverture de risque sous information incomplète. *L'Actualité économique*, *69*(1), 45–70. https://doi.org/10.7202/602096ar

Résumé de l'article

Dans cet article, nous considérons le problème de choix de portefeuille sous information incomplète lorsque l'investisseur maximise l'utilité de sa richesse terminale. Le portefeuille optimal est obtenu de manière explicite en utilisant la formule de représentation d'Ocone et Karatzas (1991) sous changement équivalent de mesure. Lorsque la richesse terminale découle uniquement de la politique d'investissement dans les actifs financiers, le portefeuille optimal a deux composantes : la première est un terme d'espérance-variance pur relatif à l'information de l'investisseur, la seconde un terme de couverture contre les fluctuations de l'estimateur de l'espérance de rendement des actifs financiers. Dans le cas du modèle gaussien, la demande de couverture est reliée à l'erreur d'estimation. Lorsque la richesse terminale provient également d'un cash-flow aléatoire en supplément des fonds générés par la politique d'investissement, nous démontrons que le portefeuille optimal contient aussi des termes de couverture contre (i) les fluctuations stochastiques dans le taux de croissance du cash-flow terminal et contre (ii) les révisions dans l'estimateur du taux d'appréciation du cash-flow terminal. Ces formules généralisent diverses applications considérées dans la littérature. En conclusion, nous abordons le problème d'information asymétrique.

L'Actualité économique, Revue d'analyse économique, vol. 69, n° 1, mars 1993

DEMANDE DE PORTEFEUILLE ET POLITIQUE DE COUVERTURE DE RISQUE SOUS INFORMATION INCOMPLÈTE*

Jérôme DETEMPLE
Faculty of management
McGill University

RÉSUMÉ – Dans cet article, nous considérons le problème de choix de portefeuille sous information incomplète lorsque l'investisseur maximise l'utilité de sa richesse terminale. Le portefeuille optimal est obtenu de manière explicite en utilisant la formule de représentation d'Ocone et Karatzas (1991) sous changement équivalent de mesure. Lorsque la richesse terminale découle uniquement de la politique d'investissement dans les actifs financiers, le portefeuille optimal a deux composantes : la première est un terme d'espérance-variance pur relatif à l'information de l'investisseur, la seconde un terme de couverture contre les fluctuations de l'estimateur de l'espérance de rendement des actifs financiers. Dans le cas du modèle gaussien, la demande de couverture est reliée à l'erreur d'estimation. Lorsque la richesse terminale provient également d'un cash-flow aléatoire en supplément des fonds générés par la politique d'investissement, nous démontrons que le portefeuille optimal contient aussi des termes de couverture contre (i) les fluctuations stochastiques dans le taux de croissance du cash-flow terminal et contre (ii) les révisions dans l'estimateur du taux d'appréciation du cash-flow terminal. Ces formules généralisent diverses applications considérées dans la littérature. En conclusion, nous abordons le problème d'information asymétrique.

ABSTRACT – *Portfolio Demand and Risk Coverage Policy Under Incomplete Information.* In this paper, we consider two portfolio problems when information is incomplete and the investor wishes to maximize his utility of terminal wealth. Optimal portfolios are obtained in explicit form by using the Ocone and Karatzas (1991) representation formula for Wiener functionals under equivalent changes of measure. When terminal wealth results only from asset trading policies, the optimal portfolio has two components: one is a pure mean-variance term relative to the information of the investor, the other is a hedging component against revisions in the estimate of the drift of asset prices. For the Gaussian model, the hedging demand is related to the estimation error. When terminal wealth includes a random terminal cash-flow in addition to the cash generated by asset trading, we show that the optimal portfolio also includes hedging components against (i) stochastic fluctuations in the rate of growth of the terminal cash-flow and against (ii) revisions in the estimated drift of the rate of growth in the terminal cash-flow. Our formulas generalize diverse applications that have been considered in the literature. We conclude with a discussion of difficulties arising in models with asymmetric information.

* Je tiens à remercier I. Karatzas pour ses commentaires, ainsi que I. Karatzas et D. Siegmund pour avoir porté à mon attention les résultats d'équivalence certaine démontrés par Y. Kuwana (1991).

Introduction

Dans cet article, nous considérons le problème de choix de portefeuille sous information incomplète lorsque l'investisseur maximise l'utilité de sa richesse terminale. Le portefeuille optimal est obtenu de manière explicite en utilisant la formule de représentation d'Ocone et Karatzas (1991) sous changement équivalent de mesure. Lorsque la richesse terminale découle uniquement de la politique d'investissement dans les actifs financiers, le portefeuille optimal a deux composantes : le premier est un terme d'espérance-variance pur relatif à l'information de l'investisseur, le second un terme de couverture contre les fluctuations de l'estimateur de l'espérance de rendement des actifs financiers. Dans le cas du modèle gaussien, la demande de couverture est reliée à l'erreur d'estimation. Lorsque la richesse terminale contient également un cash-flow aléatoire en supplément des fonds générés par la politique d'investissement, nous démontrons que le portefeuille optimal contient également des termes de couverture contre (i) les fluctuations stochastiques dans le taux de croissance du cash-flow terminal et contre (ii) les révisions dans l'estimateur du taux d'appréciation du cash-flow terminal. Ces résultats complémentent ou étendent diverses applications considérées dans la littérature; en particulier, Adler et Detemple (1988), Detemple (1986a, 1986b, 1991), Dothan et Feldman (1986), Feldman (1989, 1992), Gennotte (1986), Karatzas et Xue (1991), Ketterer (1986, 1987), Kuwana (1991), Stulz (1984), et Wang (1989a, 1989b).

Les modèles dynamiques à information incomplète ont connu un essor rapide au cours des cinq dernières années. Les premiers efforts dans ce domaine se sont concentrés sur une forme particulière de la structure d'information : le modèle gaussien. Ces articles ont étudié le programme du consommateur (Detemple, 1986a), la structure de portefeuille (Gennotte, 1986; Feldman, 1992), les prix d'équilibre des actifs financiers (Dothan et Feldman, 1986; Feldman, 1989), et le problème d'équilibre lorsque l'information, au départ asymétrique, est soit complètement (Detemple, 1986b), soit partiellement révélée par les prix des actifs financiers (Wang, 1989a, 1989b). Une extension à un modèle d'information basé sur des mélanges gaussiens a également été étudiée (Detemple, 1991). Plus récemment des méthodes puissantes de martingale ont été employées à l'étude de problèmes sous information incomplète. Les premiers articles dans ce contexte postulent l'existence d'une mesure de martingale équivalente et développent une analyse préliminaire de l'équilibre (Ketterer, 1986, 1987). Plus récemment, le problème de consommation optimale est résolu de manière explicite par Karatzas et Xue (1991) qui identifient les prix d'Arrow-Debreu implicites dans le marché financier lorsque l'information est incomplète. Toutefois, cette analyse ne procure pas d'information (outre l'existence) sur la politique optimale de portefeuille.

Dans cet article, nous utilisons des résultats récents de représentation de martingale (Ocone, 1984; Karatzas, Ocone et Li, 1991; Ocone et Karatzas, 1991) pour analyser la structure du portefeuille optimal dans deux modèles à information incomplète où l'investisseur maximise l'utilité de sa richesse terminale. Le premier est le problème du choix de portefeuille lorsque la richesse terminale découle uniquement de la politique d'investissement dans les actifs financiers. Nous démontrons, dans ce cas, que le portefeuille optimal se compose de deux termes : le premier est un terme (spéculatif) d'espérance-variance pur relatif à l'information de l'investisseur, le second un terme de couverture contre les fluctuations de l'estimateur de l'espérance de rendement des actifs financiers. Ces résultats complémentent donc de manière directe l'article de Karatzas et Xue (1991). Nous spécialisons ensuite la structure d'information au cas du modèle gaussien. Ici, nous démontrons que la demande de couverture est reliée à l'erreur d'estimation. Dans la mesure où la politique de portefeuille est obtenue de manière explicite, en fonction des données exogènes du problème, ce résultat est plus précis que celui obtenu par les méthodes classiques de programmation dynamique en environnement markovien où la fonction de valeur n'est pas exprimée sous forme explicite (Gennotte, 1986).

En deuxième lieu, nous considérons un modèle de couverture de risque lorsque la richesse terminale provient également d'un cash-flow aléatoire en supplément des fonds générés par la politique d'investissement. En outre, nous faisons l'hypothèse que l'espérance de ce cash-flow, qui est inconnue, peut être estimée à partir de l'information contenue dans les prix des actifs financiers. Dans ce cadre, nous démontrons que le portefeuille optimal contient également des termes de couverture contre (i) les fluctuations stochastiques dans le taux de croissance du cash-flow terminal et contre (ii) les révisions dans l'estimateur du taux d'appréciation du cash-flow terminal. Ces résultats étendent les modèles d'Adler et Detemple (1988) et Stulz (1984).

La structure du modèle est décrite dans la première section de l'article. La deuxième section dérive la demande de portefeuille lorsque l'espérance de rendement des actifs financiers suit un processus adapté à la filtration brownienne. Le modèle gaussien est considéré à la section 3. Le modèle avec cash-flow terminal est traité à la section 4. Nous concluons par une discussion du problème d'équilibre général sous information asymétrique.

1. Le modèle

Nous considérons un modèle de choix de consommation-portefeuille dans le contexte d'un marché financier à information incomplète. La structure du modèle est la suivante.

La structure d'incertitude est représentée par un espace probabilisable filtré complet $\left(\Omega, \Im, \left\{\Im_t : t \in \left[0, T\right]\right\}, P\right)$, où Ω représente l'espace de probabilité, $\Im$ une σ-algèbre, $\left\{\Im_t : t \in \left[0, T\right]\right\}$ la filtration sous-jacente et P une mesure de probabilité définie sur $\left(\Omega, \Im\right)$. Un processus brownien à d dimensions, W, vit sur $\left(\Omega, \Im, P\right)$ et est adapté à la filtration sous-jacente $\left\{\Im_t : t \in \left[0, T\right]\right\}$. L'horizon temporel est fini, $[0,T]$.

L'espace de consommation est le domaine positif de l'espace des variables aléatoires de carré intégrable, $L^{2+}(\Omega, \Im, P,)$. Les préférences de l'investisseur sont représentables par une fonction d'utilité U définie sur L^{2+}. Cette fonction d'utilité U a la représentation de von Neumann-Morgenstern,

$$U(X) = Eu(X_T), \tag{1.1}$$

où X_T représente la richesse terminale et $u(.)$ est l'utilité correspondante.

Hypothèse 1.1 : La fonction d'utilité $u(.) : \Re^+ \times \Re^+ \rightarrow \Re$ est continue et deux fois continuement différentiable, strictement croissante et strictement concave. Sa dérivée première admet les valeurs limites $\lim_{c \downarrow 0} u'\left(c\right) = +\infty$ and $\lim_{c \uparrow \infty} u'\left(c\right) = 0$.

Un titre obligataire sans risque est négocié. Son prix $S^0 \equiv \left\{S_t^0, \Im : t \in \left[0, T\right]\right\}$ satisfait l'équation (localement) déterministe,

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t \, dt, \tag{1.2}$$

où $r \equiv r \equiv \left\{r_t, \Im_t^S : t \in \left[0, T\right]\right\}$ est un processus progressivement mesurable et borné qui dépend de l'historique des prix des actifs risqués (la filtration $\left\{\Im_t^S : t \in \left[0, T\right]\right\}$).

Un nombre fini, d, d'actifs financiers (actions) est offert à l'investissement. Le vecteur de prix de ces actifs $S = (S_1,...,S_d)$ satisfait l'équation différentielle stochastique,

$$dS_t = I^S \left[\mu_t \, dt + \sigma_t dW_t\right] . t \in \left[0, T\right] \tag{1.3}$$

où I^S est une matrice diagonale avec vecteur de prix sur sa diagonale, $\mu \equiv \left\{\mu_t, \Im_t : t \in \left[0, T\right]\right\}$ est le vecteur de taux d'appréciation et $\sigma \equiv \left\{\sigma_t, \Im_t : t \in \left[0, T\right]\right\}$ représente la matrice des cœfficients de volatilité. Les cœfficients μ et σ sont tels que $\int_0^T \left|\mu_s'\right| 1 ds < \infty$ *et* $\int_0^T \sigma_s \sigma_s' ds < \infty$ (*P*-a.s.) où 1 est le vecteur unitaire. Les composantes de la matrice σ sont bornées; en particulier, la borne inférieure est strictement positive. Les taux d'appréciation des actifs risqués peuvent dépendre de manière générale de l'histoire du mouvement brownien *W*. Les cœfficients satisfont aux conditions suivantes :

Hypothèse 1.2 : (i) $\int_0^T E\left|\mu_s'\right| 1 dt < \infty$. (ii) le processus σ est progressivement mesurable par rapport à $\left\{\Im_t^S \times B\left[0, t\right] : t \in \left[0, T\right]\right\}$. (iii) σ_t est inversible pour tout $t \in \left[0, T\right]$ (*P*-a.s.); les composantes de la matrice inverse sont bornées.

La première condition de cette hypothèse nous permet d'obtenir une représentation du processus des prix en fonction de cœfficients adaptés à l'information possédée (proposition 2.1). La seconde condition est naturelle et ne constitue pas une restriction significative. Ceci, puisque la matrice de variance-covariance des prix peut être calculée en observant l'historique des prix (σ σ' est adaptée à la filtration d'information $\left\{\Im_t^S : t \in \left[0, T\right]\right\}$). La dernière condition peut également être relâchée dans le contexte du modèle étudié (voir Karatzas et Xue, 1991). Cette condition est commode pratique, puisqu'elle simplifie les dérivations qui suivent.

Dans notre cadre d'analyse, seuls les prix des actifs financiers sont observés par l'investisseur. Ainsi, la trajectoire du mouvement brownien *W*, de même que l'évolution des taux d'appréciation, ne peuvent qu'être estimées à partir de l'information possédée. Considérons donc la projection $\hat{\mu}_t \equiv E\left[\mu_t \middle| \Im_t^S\right]$, des taux d'appréciation des actifs financiers sur la filtration d'information $\Im_t^S$ et l'estimateur du prix de marché du risque, $\hat{\theta}_t \equiv \left(\sigma_t\right)^{-1}\left[\hat{\mu}_t - r_t 1\right]$. Nous noterons que $\hat{\mu}_t$ est une fonctionnelle de l'histoire des prix (*S*).

Hypothèse 1.3 : L'estimateur du prix de marché du risque satisfait la condition de Novikov, $E\exp\left[(1/2)\int_0^T \left\|\hat{\theta}_t\right\|^2 dt\right] < \infty$. La fonctionnelle non anticipative $\hat{\mu}_t(S)$ satisfait aux conditions de Lipschitz et de croissance suivantes

$$\left\|\hat{\mu}_t(S^1) - \hat{\mu}_t(S^2)\right\|^2 \le L_1 \int_0^t \left\|S_s^1 - S_s^2\right\|^2 dK(s) + L_2 \left\|S_t^1 - S_t^2\right\|,$$

$$\text{et} \quad \left\|\hat{\mu}_t(S)\right\|^2 \le L_1 \int_0^t \left(1 + \left\|S_s\right\|^2\right) dK(s) + L_2\left(1 + \left\|S_t\right\|^2\right),$$

où L_1 et L_2 sont des constantes, $K(s)$ est une fonction non décroissante continue à droite, $0 \le K(s) \le 1, et \left\|S\right\|$ dénote la norme vectorielle habituelle; des conditions similaires sont valides pour σ_t et r_t.

L'hypothèse sur le prix de marché du risque (condition de Novikov) nous permet de définir la mesure de martingale équivalente sans avoir à faire l'hypothèse (plus forte) que le processus $\hat{\mu}_t$ est borné. Les conditions sur la structure du taux d'appréciation estimé $\hat{\mu}_t(S)$ et de la matrice σ_t, ont pour effet d'assurer que le processus $d\upsilon_t \equiv \sigma_t^{-1}\left[\left(I^S\right)^{-1} dS_t - \hat{\mu}_t\, dt\right]$ est un processus d'innovation dans le sens classique : elles assurent donc l'égalité des filtrations $\left\{\Im_t^S : t \in [0,T]\right\}$ et $\left\{\Im_t^\upsilon : t \in [0,T]\right\}$. Cette propriété joue un rôle fondamental dans la dérivation du portefeuille optimal. Les hypothèses correspondantes sur la matrice σ_t et sur le taux d'interêt r_t jouent un rôle similaire pour l'innovation par rapport à la mesure de martingale equivalente.

Un processus de portefeuille π est un processus prévisible de carré intégrable $\left(E\int_0^T \pi_s \pi_s' \, ds < \infty\right)$. Ici π représente le montant de richesse investi dans les actifs risqués au temps t; si X_t dénote la richesse au temps $t, X_t - \pi_t 1$ est investi dans le titre obligataire. Sans perte de généralité, nous admettons des positions de découvert dans les actifs risqués ($\pi < 0$).

Un processus d'investissement π est admissible pour l'agent s'il satisfait la contrainte informationelle,

$$\pi \text{ est adapté à } \Im^S, \tag{1.4}$$

et la contrainte budgétaire,

$$dX_t = r_t X_t\, dt + \pi_t \left(\mu_t - r_t 1\right) dt + \pi_t \sigma_t dW_t \,;\, X_0 = x \tag{1.5}$$

$$X_T \geq 0. \tag{1.6}$$

La condition de liquidité $X_T \geq 0$ stipule que la richesse doit être non négative au terme de l'intervalle de transaction ($P-$ p.s.).

Une politique de portefeuille admissible π est optimale pour les préférences U s'il n'existe pas d'autre politique admissible π' telle que $U(X') > U(X)$.

2. Politiques optimales : le cas général

Dans cette section, nous énonçons les résultats pour le modèle général présenté à la section précédente. Le théorème 2.1 énonce la politique optimale de richesse (consommation) terminale; le portefeuille optimal correspondant est décrit au théorème 2.2. Un cas particulier est examiné au corollaire 2.1.

Notre premier résultat réexprime la dynamique des prix financiers (1.3) en fonction de l'innovation dans l'information.

Proposition 2.1 : Soit $\hat{\mu}_t \equiv E\left[\mu_t \,\middle|\, \Im^S_t\right]$ le vecteur d'espérance conditionnelle de μ_t relative à l'information de l'investisseur au temps t. Les prix des actifs financiers satisfont l'équation stochastique différentielle,

$$dS_t = I^S \left[\hat{\mu}_t\, dt + \sigma_t d\upsilon_t\right] \tag{2.1}$$

où $\upsilon_t \equiv W_t + \int_0^t \sigma_s^{-1}\left(\mu_s - \hat{\mu}_s\right) ds$ est un processus brownien relatif à la filtration $\left\{\Im^S_t : t \in [0, T]\right\}$. En outre, l'information collectée par observation du processus υ est équivalente à celle obtenue par observation des prix financiers $\left(\Im^\upsilon_t \equiv \Im^S_t\right)$: υ est un processus d'innovation.

L'équivalence entre (2.1) et (1.3) ainsi que la structure brownienne du processus $\upsilon \equiv \left\{\upsilon_t, \Im_t^S : t \in \left[0, T\right]\right\}$ découlent de l'hypothèse 1.2 (i)-(ii) (Liptser et Shiryayev, 1977, théorème 7.17). L'équivalence des filtrations $\left\{\Im_t^\upsilon\right\}$ et $\left\{\Im_t^S\right\}$ suit des conditions de l'hypothèse 1.3 sur les fonctionnelles $\hat{\mu}_t\left(S\right)$ et $\sigma_t\left(S\right)$, qui assurent l'existence d'une solution forte à l'équation (2.1). La représentation (2.1) et les propriétés du processus υ sont également démontrées, dans un cadre plus spécialisé, par Karatzas et Xue (1991). Le processus d'innovation a l'interprétation habituelle (voir par exemple Detemple, 1986). Il véhicule l'information nouvelle qui atteint le marché financier : les réalisations les plus récentes du processus d'observation net des valeurs anticipées sur la base de l'information antérieure accumulée, $d\upsilon_t = \left(\sigma_t\right)^{-1}\left[\left(I^S\right)^{-1} dS_t - \hat{\mu}_t\, dt\right]$.

Étant donné le processus des prix (2.1), la richesse induite par une politique de portefeuille π est donnée par la solution de l'équation,

$$dX_t = r_t X_t\, dt + \pi_t\left[\hat{\mu}_t\, dt + \sigma_t\, d\upsilon_t\right], X_0 = x. \tag{2.2}$$

De plus, le problème de choix de portefeuille sous information incomplète est équivalent au problème d'optimisation sous information complète où la contrainte budgétaire est donnée par (2.2). Ce second problème dynamique peut à son tour être transformé en un problème d'optimisation statique en faisant appel à des méthodes, maintenant courantes, de martingales.

La mesure équivalente de martingale, dans ce contexte, est définie par $Q\left(A\right) = E\left[\eta_T 1_A\right], A \in \Im_T$, où la martingale exponentielle $\eta_t \equiv exp\left[-\int_0^t \hat{\theta}_s' d\upsilon_s - \left(1/2\right)\int_0^t \left|\left|\hat{\theta}_s\right|\right|^2 ds\right]$ est obtenue de manière unique à partir de l'estimateur du prix de marché du risque, $\hat{\theta}_t = \left(\sigma_t\right)^{-1}\left[\hat{\mu}_t - r_t 1\right]$. La propriété de martingale de l'exponentielle η découle de la condition de Novikov énoncée à l'hypothèse 1.3 (Karatzas et Shreve, 1988 : p. 199). Karatzas, Lehoczky et Shreve (1987) ainsi que Cox et Huang (1989) démontrent qu'une richesse terminale X_T au temps T est optimale si et seulement si elle résoud le programme statique,

$$\max_x Eu\left(X_T\right) \text{s.t. } E^* e^{-\int_0^T r_s ds} X_T \le x \tag{2.3}$$

où E^* représente l'espérance par rapport à la mesure Q. La contrainte budgétaire a une interprétation intuitive puisqu'elle stipule que la valeur présente des dépenses $\left(E^* e^{-\int_0^T r_s ds} X_T\right)$ ne peut excéder la richesse de départ (x). Le portefeuille optimal correspondant à la politique de richesse optimale est donné par,

$$\pi_t = e^{\int_0^t r_s ds}\left(\sigma_t\right)^{-1} \psi_t \tag{2.4}$$

où ψ est l'unique processus prévisible et de carré intégrable dans la représentation de la Q-martingale $Y_t \equiv E^*\left[e^{-\int_0^T r_s ds} X_T^* \middle| \Im_t^S\right] - E^*\left[e^{-\int_0^T r_s ds} X_T^*\right]$.

Définissons la fonction $I(y)$ représentant l'inverse de la fonction d'utilité marginale de richesse terminale, $u'(I(y)) = y$. Nous avons,

Théorème 2.1 (Karatzas et Xue, 1991) : Considérons le modèle de la section 1 sous les hypothèses 1.1-1.2. La politique optimale de consommation est,

$$X_T^* = I\left(y^* \xi_T\right)$$

où y^* dénote la solution unique de l'équation $E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv} I\left(y^* \xi_T\right)\right] = x$, et $\xi_T \equiv e^{-\int_0^T r_v dv} \eta_T$. Le portefeuille optimal supportant la politique de richesse terminale X_T^* est $\pi_t^* = e^{-\int_0^t r_v dv}\left(\sigma_t'\right)^{-1} \Psi_t^*$ où Ψ^* est l'unique processus prévisible, de carré intégrable, dans la représentation de la martingale $Y_t \equiv E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv} I\left(y^* \xi_T\right) \middle| \Im_t^S\right] - E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv} I\left(y^* \xi_T\right)\right]$

Démonstration du théorème 2.1 : Les conditions nécessaires et (par concavité) suffisantes pour un maximum sont,

$$u'\left(X_T\right) = y \xi_T \tag{2.5}$$

$$E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv} X_T\right] = x, \tag{2.6}$$

où y est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire statique. Ainsi, $X_T = I\left(y\xi_T\right)$ En substituant ce résultat dans la contrainte budgétaire (2.6), nous obtenons l'équation $E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv} I\left(y\xi_T\right)\right] = x$. Il suit de l'hypothèse 1.1 que $I\left(\cdot\right):\left[0,\infty\right]\to\left[0,\infty\right)$ est strictement décroissante, de sorte qu'une solution unique y^* existe pour toute richesse initiale positive (x>0). L'existence d'un portefeuille optimal découle de (2.4).

La condition de premier ordre (2.5) a une structure classique. Elle spécifie l'égalité entre l'utilité marginale et les prix d'Arrow-Debreu.

Pour énoncer la politique optimale de portefeuille, il nous faut imposer des restrictions supplémentaires sur les cœfficients du modèle. En effet, la politique de portefeuille dépend de la manière dont les innovations browniennes affectent l'estimateur du taux d'appréciation ainsi que la volatilité des rendements des actifs financiers. À cet effet nous introduisons, ici de manière informelle, (i) la notion de dérivée de Malliavin et (ii) un espace de processus (l'espace $L_{1,1}$) pour lequel la dérivée de Malliavin a du sens. Les définitions mathématiques exactes de ces concepts sont présentées en annexe.

Soit une variable aléatoire F qui dépend de l'information accumulée au temps T (F peut être conceptualisée comme une fonction de la trajectoire du mouvement brownien υ entre 0 et T). La dérivée de Malliavin au temps t de la variable aléatoire F (dénotée par D_tF) représente la manière dont F change suivant une perturbation au temps t dans l'innovation du mouvement brownien $d\upsilon_t$. Dans la mesure où un changement dans $d\upsilon_t$ au temps t affecte les trajectoires futures de υ (υ_s, $s>t$), cette derivée représente effectivement l'effet d'un déplacement dans la trajectoire au-delà du temps t sur la variable aléatoire F. Cette derivée est donc similaire à la dérivée de Fréchet qui s'applique dans un environnement déterministe.

Pour que la dérivée de Malliavin existe, il faut que la variable aléatoire F possède certaines propriétés de régularité. De même, pour appliquer la dérivée de Malliavin à un processus stochastique, il faut que ce processus ait un comportement suffisamment régulier. Ceci conduit à une classe $L_{1,1}$ de processus dérivables et intégrables dans le sens d'une norme spécifique (voir annexe pour détails). Dans le contexte de notre modèle à information incomplète, la dérivée de Malliavin est prise par rapport au *processus d'innovation* υ et l'espace $L_{1,1}$ est défini relativement à la filtration $\left\{\mathfrak{I}_t^\upsilon : t\in\left[0,T\right]\right\}$. C'est donc à ce niveau que l'équivalence des filtrations $\left\{\mathfrak{I}_t^\upsilon : t\in\left[0,T\right]\right\}$ et $\left\{\mathfrak{I}_t^S : t\in\left[0,T\right]\right\}$ joue un rôle fondamental.

Avec ces définitions informelles, nous pouvons écrire :

Théorème 2.2: Supposons que les processus r et $\hat{\theta}$ appartiennent à $L_{1,1}$. Sous les hypothèses du théorème 2.1 la politique optimale de portefeuille est donnée par

$$\pi_t = -\left(\sigma_t'\right)^{-1} \hat{\theta}_t E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} y^* \xi_T I'\left(y^* \xi_T\right) \middle| \Im_t^S\right]$$

$$-\left(\sigma_t'\right)^{-1} E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv}\left[I\left(y^* \xi_T\right) + y^* \xi_T I'\left(y^* \xi_T\right)\right]\left[\int_t^T \left(D_t r_v\right) dv + \int_t^T \left(D_t \hat{\theta}_v'\right) d\tilde{\omega}_v\right] \middle| \Im_t^S\right] \quad (2.7)$$

où l'opérateur D_t représente la dérivée de Malliavin au temps t, et $I'(y)$ représente la dérivée de l'utilité marginale inverse.

La politique optimale de portefeuille (2.7) a une structure familière. Elle se compose de deux termes. Le premier est une demande spéculative, proportionnelle à l'estimateur de prix de marché du risque ($\hat{\theta}$),

$$-\left(\sigma_t'\right)^{-1} \hat{\theta}_t E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} y^* \xi_T I'\left(y^* \xi_T\right) \middle| \Im_t^S\right].$$

Le facteur de proportionnalité est lié aux préférences de l'investisseur. Notons que ce terme, dont la structure est familière, apparaît dans la demande de portefeuille, bien que le modèle d'information/incertitude ne soit pas markovien.

Le second terme est une demande de couverture contre les fluctuations stochastiques dans les paramètres du modèle,

$$-\left(\sigma_t'\right)^{-1} E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv}\left[I\left(y^* \xi_T\right) + y^* \xi_T I'\left(y^* \xi_T\right)\right]\left[\int_t^T \left(D_t r_v\right) dv + \int_t^T \left(D_t \hat{\theta}_v'\right) d\tilde{\omega}_v\right] \middle| \Im_t^S\right]$$

Deux composantes interviennent ici. La première est due aux fluctuations stochastiques dans le taux d'interêt (le terme comprenant $\int_t^T \left(D_t r_v\right) dv$). La seconde est une conséquence des révisions dans l'estimateur du prix de marché du risque au vu de l'arrivée d'informations nouvelles (le terme $\int_t^T \left(D_t \hat{\theta}_v'\right) d\tilde{\omega}_v$).

Démonstration du théorème 2.2: Nous cherchons une représentation de la Q-martingale, $Y_t \equiv E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv} I\left(y^* \xi_T\right) \middle| \Im_t^S\right] - E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv} I\left(y^* \xi_T\right)\right]$.

Considérons la fonctionnelle $F \equiv e^{-\int_0^T r_v dv} I\left(y^* \xi_T\right)$. Une application de la formule d'Ocone et Karatzas (1991) (Théorème A.3 dans l'annexe) conduit au résultat énoncé.

Il est un fait bien établi que le comportement associé à l'utilité logarithmique est myope. Le corollaire suivant généralise certains résultats de Feldman (1992) au cas non-gaussien. Il complémente également le principe d'équivalence certaine démontré par Kuwana (1991) pour une structure d'information non-gaussienne où la distribution postérieure suit un processus markovien.

Corollaire 2.1 : Dans le cas d'utilité logarithmique, le portefeuille optimal devient

$$\pi_t = \left(\sigma_t'\right)^{-1} \hat{\theta}_t E^* \left[e^{-\int_t^T r_v dv} I\left(y^* \xi_T\right) \middle| \mathfrak{I}_t^S \right]. \tag{2.8}$$

En d'autres termes, en fonction de la richesse, $\pi_t = \left(\sigma_t'\right)^{-1} \hat{\theta}_t X_t$.

Démonstration du corollaire 2.1 : Dans le cas d'une fonction d'utilité logarithmique, on a $I(y) = y^{-1}$, de sorte que $I(y) + yI'(y) = 0$. La formule (2.8) s'ensuit. Notons également que la richesse optimale est la valeur présente de la richesse terminale optimale :

$$X_t = E^* \left[e^{-\int_t^T r_v dv} X_T \middle| \mathfrak{I}_t^S \right] \text{ou } X_T = I\left(y^* \xi_T\right).$$

Il suit que $\pi_t = \left(\sigma_t'\right)^{-1} \hat{\theta}_t X_t$.

3. Le modèle gaussien

Dans cette section, nous spécialisons les résultats ci-dessus au cas particulier du modèle gaussien décrit par,

$$d\mu_t = \mu_t dt + b_t dW_t, \mu_0 \text{ donné} \tag{3.1}$$

$$\left(I^S\right)^{-1} dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, S_0 \text{ donné} \tag{3.2}$$

$$\left(\mu_0 \middle| S_0\right) \text{ distribué normalement} : \mathrm{N}(m_0, s_0), \tag{3.3}$$

où les paramètres b_t et σ_t sont des processus déterministes. Des versions de ce modèle ont été considérées à multiples reprises dans la littérature (cf. Detemple, 1986a, b; Dothan et Feldman, 1986; Feldman, 1989, 1992; Gennotte, 1986).

Pour ce modèle, la distribution postérieure de μ_t conditionnelle à l'information véhiculée par l'historique des prix $\mathfrak{I}_t^S$ est normale avec vecteur de moyenne $\hat{\mu}_t$ et matrice de variance-covariance γ_t, solutions du système (Liptser et Shiryayev, 1978, théorèmes 12.6 et 12.7),

$$d\hat{\mu}_t = \hat{\mu}_t dt + \left[b_t \sigma_t' + \gamma_t \right] \left(\sigma_t' \right)^{-1} d\upsilon_t \tag{3.4}$$

$$d\gamma_t / dt = 2\gamma_t - 2b_t \sigma_t' \gamma_t - \gamma_t \left(\sigma_t \sigma_t' \right)^{-1} \gamma_t \tag{3.5}$$

$$\hat{\mu}_0 = m_0 , \gamma_0 = s_0 . \tag{3.6}$$

L'équation (3.4) qui décrit l'évolution de la moyenne conditionnelle a une interprétation intuitive. En effet, la moyenne conditionnelle est réévaluée au vu de l'innovation dans l'information révélée par les prix. L'amplitude de l'ajustement dépend de l'erreur d'estimation γ_t (une fonction déterministe, qui satisfait à l'équation de Riccati (3.5)), ainsi que de la covariance $b_t \sigma_t'$ entre le processus d'observation (les prix) et la composante stochastique dans l'évolution du vecteur des taux d'appréciation μ_t. Le terme de covariance émerge dans la mesure où les prix financiers procurent de l'information non seulement sur la valeur de μ_t mais également sur la position du mouvement brownien W_t.

La variance conditionnelle, qui représente l'erreur d'estimation, suit, quant à elle, le processus déterministe décrit par l'équation (3.5). Cette équation caractérise donc le processus d'apprentissage induit par le traitement de l'information révélée par les prix. L'inverse de la variance conditionnelle est la précision de l'estimateur et représente le montant de connaissance accumulé à partir des observations passées. Il devient alors clair que l'amplitude de la révision de la moyenne conditionnelle suivant une nouvelle donnée dépend de la connaissance accumulée au moment où l'information est révélée. Lorsque γ est grand, l'information de départ est pauvre, de telle sorte que l'innovation dans l'information a un effet important sur la révision de l'estimateur.

Dans ce cas de figure, les résultats de la section précédente se simplifient et deviennent :

Théorème 3.1 : Supposons que le taux d'intérêt r suit un processus déterministe. Sous les hypothèses du modèle d'information gaussien (3.1)-(3.3), la politique optimale de portefeuille est

$$\pi_t = -\left(\sigma_t'\right)^{-1} \hat{\theta}_t E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} y^* \xi_T I'\left(y^* \xi_T\right) \middle| \Im_t^S\right]$$
$$-\left(\sigma_t'\right)^{-1}\left(\sigma_t\right)^{-1}\left[b_t \sigma_t' + \gamma_t\right]' e^{-t} E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv}\left[I\left(y^* \xi_T\right) + y^* \xi_T I'\left(y^* \xi_T\right)\right]\left[\int_t^T \left(\sigma_v'\right)^{-1} e^v d\tilde{\upsilon}_v\right] \middle| \Im_t^S\right].$$

Le modèle gaussien conduit à une simplification substantielle de la composante de couverture. Cette dernière, en effet, se révèle être liée au paramètre déterminant l'amplitude de la révision dans l'estimateur de l'espérance du taux de rendement (le terme $\left[b_t \sigma_t' + \gamma_t\right]'$). Nous noterons en particulier que la composante de couverture est nulle lorsque (i) le processus d'observation (les prix des actifs financiers (1.3)) et le processus suivi par l'espérance de rendement (équation (3.1)) sont indépendants et lorsque (ii) l'erreur d'estimation est nulle.

Les cas suivants conduisent à des politiques de portefeuille simplifiées.

Corollaire 3.1 : Sous les hypothèses du théorème 3.1 et en supposant que l'utilité est de la forme $\left(u(X) = (1/\rho) X^\rho, \rho \in [0,1)\right)$, la politique de portefeuille optimale devient

$$\pi_t = -(\rho - 1)^{-1}\left(\sigma_t'\right)^{-1} \hat{\theta}_t E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} I\left(y^* \xi_T\right) \middle| \Im_t^S\right]$$
$$-\rho(\rho - 1)^{-1}\left(\sigma_t'\right)^{-1}\left(\sigma_t\right)^{-1}\left[b_t \sigma_t' + \gamma_t\right]' e^{-t} E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} I\left(y^* \xi_T\right)\left[\int_t^T \left(\sigma_v'\right)^{-1} e^v d\tilde{\upsilon}_v\right] \middle| \Im_t^S\right].$$

où $I(y) \equiv y^{(1/(\rho - 1))}$. En fonction de la richesse nous avons,

$$\pi_t = -(\rho - 1)^{-1}\left(\sigma_t'\right)^{-1} \hat{\theta}_t X_t$$
$$-\rho(\rho - 1)^{-1}\left(\sigma_t'\right)^{-1}\left(\sigma_t\right)^{-1}\left[b_t \sigma_t' + \gamma_t\right]' e^{-t} E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} I\left(y^* \xi_T\right)\left[\int_t^T \left(\sigma_v'\right)^{-1} e^v d\tilde{\upsilon}_v\right] \middle| \Im_t^S\right].$$

Corollaire 3.2 : Pour le modèle (3.1)-(3.3) à cœfficients constants (b et σ constants), la politique de portefeuille est donnée par

$$\pi_t = -\left(\sigma_t'\right)^{-1} \hat{\theta}_t \, E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} y^* \xi_T \, I'\left(y^* \xi_T\right) \middle| \Im_t^S\right]$$
$$-\left(\sigma'\right)^{-1}\left(\sigma\right)^{-1}\left[b\sigma + \gamma_t\right]'\left(\sigma'\right)^{-1} e^{-t} E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv}\left[I\left(y^* \xi_T\right) + y^* \xi_T \, I'\left(y^* \xi_T\right)\right]\left[\int_t^T e^v d\tilde{\upsilon}_v\right] \middle| \Im_t^S\right].$$

4. Politiques de couverture de risque

Nous supposerons dans cette section que l'investisseur, outre la richesse X_T qui résulte de ses politiques d'investissement dans les actifs financiers, reçoit aussi un cash-flow égal à B_T au temps T. Le cash-flow B_T est la variable aléatoire induite au temps T par le processus d'Itô,

$$dB_t = B_t\left[\alpha_t \, dt + \delta_t dW_t\right], B_0 \text{ donné} \tag{4.1}$$

où le processus d'appréciation α est progressivement mesurable par rapport à la filtration $\left\{\Im_t : t \in \left[0, T\right]\right\}$ et le cœfficient de volatilité δ (un vecteur de dimension 1xd) est déterministe. Soit $\hat{\alpha}_t = E\left[\alpha_t \middle| \Im_t^I\right]$ l'espérance conditionnelle de α_t sur la base de l'information possédée par l'investisseur, $\Im_t^I$ En définissant le processus υ^B par

$$\upsilon_t^B = W_t + \int_0^t \delta_s'\left(\delta_s \delta_s'\right)^{-1}\left[\alpha_s - \hat{\alpha}_s\right] ds, \tag{4.2}$$

l'équation (5.1) peut être réécrite de la manière suivante,

$$dB_t = B_t\left[\hat{\alpha}_t dt + \delta_t d\upsilon_t^B\right], B_0 \text{ donné.} \tag{4.3}$$

Cette formulation représente l'équivalent d'un modèle à information incomplète où la trajectoire du processus B est connue à chaque instant. Lorsque B constitue une source d'information supplémentaire (indépendante des prix) la méthodologie des sections précédentes ne peut être appliquée de manière directe. En effet, dans ce cas, le marché financier est incomplet. Pour éviter les problèmes techniques difficiles qui en résultent, nous ferons appel à l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.1 : Il existe un processus déterministe ø de dimension dxd tel que $\upsilon_t^B = \int_0^t \phi_s d\upsilon_s$.

Cette hypothèse stipule que l'information révélée par l'observation du processus B est effectivement contenue dans l'information transmise par les prix financiers. Ce cas de figure s'applique lorsque le cash-flow final B_T dépend du prix d'un actif financier. Par exemple, les plans de compensation indirecte pour cadres d'entreprise tombent dans cette catégorie.

En combinant l'équation (4.3) et l'hypothèse 4.1, nous obtenons donc

$$dB_t = B_t\left[\hat{\alpha}_t dt + \delta_t \phi_t d\upsilon_t\right], B_0 \text{ donné.} \tag{4.4}$$

Dans la formulation (4.4), le terme $\hat{\alpha}_t$ représente l'estimateur du taux d'appréciation du *cash-flow* au vu de l'information contenue dans les prix des actifs financiers $\Im_t^S$. Notons que $\hat{\alpha}_t$ ne représente pas le taux d'appréciation de la *valeur de marché* du cash-flow.

Pour ce problème, la mesure de martingale est définie comme à la section 2 par

$Q(A) = E\left[\eta_T 1_A\right], A \in \Im_T$, *où* $\eta_t \equiv exp\left[-\int_0^t \hat{\theta}_s' d\upsilon_s - (1/2)\int_0^t \left\|\hat{\theta}_s'\right\|^2 ds\right]$ est obtenu de manière unique à partir de l'estimateur du prix de marché du risque, $\hat{\theta}_t = (\sigma_t)^{-1}\left[\hat{\mu}_t - r_t 1\right]$. Le problème de choix de politique de couverture peut donc s'exprimer sous la forme statique

$$\max_x Eu\left(B_T + X_T\right), \tag{4.5}$$

sujet à

$$E^* e^{-\int_0^T r_s ds} X_T \leq x. \tag{4.6}$$

Le portefeuille optimal correspondant à la politique de richesse optimale (solution du problème statique (4.5)-(4.6)) est donné par $\pi_t = e^{\int_0^t r_s ds}(\sigma_t)^{-1}\Psi_t$ où Ψ est l'unique processus prévisible et de carré intégrable dans la représentation de la Q-martingale $Y_t \equiv E^*\left[e^{-\int_0^T r_s ds} X_T^* \middle| \Im_t^S\right] - E^*\left[e^{-\int_0^T r_s ds} X_T^*\right]$.

Pour ce modèle de choix de portefeuille, nous obtenons la politique optimale suivante :

Théorème 4.1 : Pour le modèle décrit dans cette section et sous l'hypothèse $x + E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv} B_T\right] > 0$, la richesse monétaire terminale optimale X_T est donnée par

$$X_T = I\left(y^* \xi_T\right) - B_T \,, \tag{4.7}$$

où y^* dénote la solution unique de l'équation $E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv} I\left(y^* \xi_T\right)\right] = x + E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv} B_T\right]$. Le portefeuille optimal supportant la politique de richesse terminale X_T^* est $\pi_t^* = e^{\int_0^t r_v dv}\left(\sigma_t'\right)^{-1} \Psi_t^*$, où Ψ^* est l'unique processus prévisible, de carré intégrable, dans la représentation de la martingale $Y_t \equiv E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv}\left(I\left(y^* \xi_T\right) - B_T\right) \middle| \Im_t^S\right] - E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv}\left(I\left(y^* \xi_T\right) - B_T\right)\right]$.

La démonstration de ce théorème suit la démonstration du théorème 2.1. Il suffira de noter que la condition de premier ordre devient $u'\left(B_T + X_T\right) = y\xi_T$ ce qui donne lieu à la solution (4.7). Sous notre condition de richesse totale initiale positive $\left(x + E^*\left[e^{-\int_0^T r_v dv} B_T\right] > 0\right)$, il suit également qu'un multiplicateur y^* existe et est unique.

La politique optimale de portefeuille est maintenant donnée par :

Théorème 4.2 : Supposons que les processus r et $\hat{\theta}$ appartiennent à $L_{1,1}$. Sous les hypothèses du théorème 4.1, la politique optimale de portefeuille est donnée par

$$\begin{aligned} \pi_t = &-\left(\sigma_t'\right)^{-1} \hat{\theta}_t E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} y^* \xi_T I'\left(y^* \xi_T\right) \middle| \Im_t^S\right] \\ &-\left(\sigma_t'\right)^{-1} E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv}\left[I\left(y^* \xi_T\right) - B_T + y^* \xi_T I'\left(y^* \xi_T\right)\right]\left[\int_t^T \left(D_t r_v\right) dv + \int_t^T \left(D_t \hat{\theta}_v'\right) d\tilde{\omega}_v\right] \middle| \Im_t^S\right] \\ &-\left(\sigma_t'\right)^{-1} E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} D_t B_T \middle| \Im_t^S\right], \end{aligned} \tag{4.8}$$

où $D_t B_T = B_T \left[\int_t^T D_t \hat{\alpha}_s \, ds + \delta_t \phi_t \right]$.

La politique de portefeuille (4.8) contient maintenant le terme supplémentaire

$$-\left(\sigma_t'\right)^{-1} E^* \left[e^{-\int_t^T r_v dv} B_T \int_t^T D_t \hat{\alpha}_s ds \,\middle|\, \Im_t^S \right] - \left(\sigma_t'\right)^{-1} \delta_t \phi_t E^* \left[e^{-\int_t^T r_v dv} B_T \,\middle|\, \Im_t^S \right]. \quad (4.9)$$

Ce terme représente une demande de couverture pure contre les fluctuations dans le taux de croissance du *cash-flow* terminal. Deux types de fluctuations interviennent à ce niveau. Le premier est dû à la révision dans le taux d'appréciation estimé au vu des informations nouvelles. Une innovation au temps t entraîne une réévaluation de l'estimateur $\hat{\alpha}_s$ correspondant à toute date future $s>t$. La composante de la demande de portefeuille,

$$-\left(\sigma_t'\right)^{-1} E^* \left[e^{-\int_t^T r_v dv} B_T \left(\int_t^T D_t \hat{\alpha}_s \right) ds \,\middle|\, \Im_t^S \right],$$

correspond à une couverture contre ce type de fluctuations. Le second type de fluctuation est dû à la révision immédiate de la valeur de B_t (et donc de B_T) au vu de l'information nouvelle. Cette fluctuation donne alors lieu à une demande de couverture pure égale à,

$$-\left(\sigma_t'\right)^{-1} \delta_t \phi_t E^* \left[e^{-\int_t^T r_v dv} B_T \,\middle|\, \Im_t^S \right].$$

Cette demande de couverture est proportionnelle à la covariance entre les rendements des actifs financiers et la volatilité du processus (4.5) qui génère le cash-flow final.

Démonstration du théorème 4.2: Le résultat découle immédiatement de la représentation de la Q-martingale,

$Y_t \equiv E^* \left[e^{-\int_0^T r_v dv} \left(I\left(y^* \xi_T \right) - B_T \right) \,\middle|\, \Im_t^S \right] - E^* \left[e^{-\int_0^T r_v dv} \left(I\left(y^* \xi_T \right) - B_T \right) \right]$, obtenue par application de la formule d'Ocone et Karatzas (1991) à la fonctionelle $F \equiv e^{-\int_0^T r_v dv} \left(I\left(y^* \xi_T \right) - B_T \right)$.

Corollaire 4.1 : Dans le cas d'utilité logarithmique, le portefeuille optimal devient

$$\begin{aligned}\pi_t &= \left(\sigma_t'\right)^{-1} \hat{\theta}_t \left[X_t + E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} B_T \middle| \Im_t^S\right]\right]\\ &+ \left(\sigma_t'\right)^{-1} E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} B_T \left[\int_t^T \left(D_t r_v\right) dv + \int_t^T \left(D_t \hat{\theta}_v'\right) d\tilde{v}_v\right] \middle| \Im_t^S\right] \\ &- \left(\sigma_t'\right)^{-1} E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} B_T \left(\int_t^T D_t \hat{\alpha}_s\right) ds \middle| \Im_t^S\right] - \left(\sigma_t'\right)^{-1} \delta_t \phi_t E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} B_T \middle| \Im_t^S\right].\end{aligned} \tag{4.10}$$

Dans le cas logarithmique, nous obtenons une décomposition quelque peu simplifiée. La demande de portefeuille se compose d'un terme d'espérance-variance pur proportionnel à la richesse totale $\left[X_t + E^*\left[e^{-\int_t^T r_v dv} B_T \middle| \Im_t^S\right]\right]$ et de termes de couverture contre (i) les variations du taux d'intérêt et du prix de marché du risque estimé, (ii) les fluctuations dans l'estimateur du taux d'appréciation du cash-flow, et (iii) les fluctuations du taux de croissance du cash-flow (sensibilité de B_T à l'innovation au temps t). Cette décomposition en terme de la structure du cash-flow terminal généralise et complémente les résultats de Stulz (1984) et Adler et Detemple (1988).

Le cas d'une structure d'information Gaussienne est obtenu comme à la section 3 par spécialisation des résultats énoncés ci-dessus.

CONCLUSION

Les résultats de la section précédente nous procurent une description détaillée des fonctions de demande de portefeuille lorsque l'information est incomplète. La dérivation des prix d'équilibre des actifs financiers lorsque l'information est asymétrique se heurte aux problèmes suivants.

Sources d'information non technique: Lorsque l'information révélée par les prix financiers est complétée par d'autres sources d'information non techniques (rapport d'évaluation de société, compte rendu d'*audite,* annonce par les directeurs de la société, etc,...), les résultats des sections précédentes ne peuvent être utilisés tels quels mais doivent être généralisés. Le problème de portefeuille dans ce cas de figure est compliqué par le fait que le processus d'innovation se compose d'une innovation liée aux prix des actifs financiers ainsi que d'une innovation liée aux autres sources d'information utilisées par l'investisseur. Le modèle de choix de portefeuille est alors équivalent à un modèle à marchés incomplets où les actifs manquants ont un effet sur (i) la politique de richesse finale atteignable et (ii) sur la politique de portefeuille correspondante. La solution de ce problème constitue une étape préliminaire à la résolution du problème d'information asymétrique.

Contenu informationel des prix: Lorsque l'information est asymétrique, les prix financiers révèlent plus d'information que celle possédée à titre privée. En effet, l'espace dans lequel évoluent les prix d'équilibre dépend de la filtration générée par toutes les sources d'information présentes dans l'économie. Le prix d'équilibre intervient alors comme un élément supplémentaire dans le conditionnement de chaque intervenant sur les marchés financiers. Ce problème de détermination simultanée du conditionnement et du prix d'équilibre complique le modèle de manière substantielle. Cet élement s'ajoute à la difficulté de résoudre le modèle à marché incomplet mentionnée au paragraphe précédent.

ANNEXE

La formule de Clark et ses généralisations

Dans cette annexe, nous résumons plusieurs résultats qui jouent un rôle fondamental dans la dérivation des politiques optimales de portefeuille. Le résultat central est la formule de représentation d'Ocone et Karatzas (1991) qui s'applique aux fonctionelles définies sur espaces de Wiener, sous changement équivalent de mesure. Ce résultat généralise la formule de Clark (1970).

Soit l'espace de Wiener de dimension *d*, $\left(W_0^d, B\left(W_o^d\right), P^W\right)$, où W_0^d représente l'espace des fonctions continues $w:\left[0,T\right]\to\Re^d$ telles que $w\left(0\right)=0, B\left(W_0^d\right)$ est la σ-algèbre de Borel associée et P^W la mesure de Wiener définie sur $\left(W_0^d, B\left(W_o^d\right)\right)$. Toute fonction mesurable définie sur cet espace est appelée une fonctionnelle brownienne.

Soit S la classe de fonctionnelles brownienne régulières, c.-à.-d. la classe de variables aléatoires de la forme

$$F=f\left(W\left(t_1\right),\dots,W\left(t_n\right)\right),$$

où $\left(t_1,\dots,t_n\right)\in\left[0,T\right]^n$ et les fonctions $f(x^{11},\dots,x^{d1},\dots,x^{1n},\dots,x^{dn})$ appartiennent à $C_b^\infty\left(\Re^{dn}\right)$, l'ensemble des fonctions $f:\Re^{dn}\to\Re$ bornées et à dérivées bornées de tout ordre. Le gradient DF est défini comme la variable aléatoire $DF=\left(D^1F,\dots,D^dF\right)$ dans $L^2\left(\left[0,T\right]\right)^d$ dont les composantes sont

$$D_t^iF=\Sigma_{j=1}^n\left(\partial/\partial x^{ij}\right)f\left(W\left(t_1\right),\dots,W\left(t_n\right)\right)1_{\left[0,t_j\right]}\left(t\right);i=1,\dots,d,,$$

où $1_{\left[0,t_j\right]}\left(t\right)$ est l'indicateur de l'ensemble $\left[0,t_j\right]$. D_t^i peut être interprété comme le changement dans la fonctionnelle F résultant d'un changement dans la i$^{\text{ème}}$ composante du mouvement brownien W au temps t. Une telle perturbation n'a pas d'effet sur l'histoire, $\left\{W\left(t_j\right):t_j<t\right\}$, mais affecte la trajectoire future du processus brownien $\left\{W\left(t_j\right):t_j\geq t\right\}$. Ainsi, la dérivée

de Malliavin représente l'effet sur la fonctionnelle F d'une perturbation dans la trajectoire de W, à partir du temps t. En d'autres termes elle, constitue une analogue stochastique de la dérivée de Fréchet.

Soit $\|\cdot\|$ la norme dans $L^2([0,T])$ et $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\Re^n, n \geq 1$. Pour $p \geq 1$, nous introduisons la norme

$$\|F\|_{p,1} = \left(E\left\{ |F|^p + \left(\Sigma_{i=1}^{d} \left\| D^i F \right\|^2 \right)^{p/2} \right\} \right)^{1/p}$$

sur S, et nous dénotons par $\boldsymbol{D}_{p,1}$ l'espace de Sobolev obtenu par fermeture de S sous $\|\cdot\|_{p,1}$.

La règle de dérivée en chaîne du calcul de Malliavin peut être énoncée de la manière suivante. Soit $F = \left(F^1, \ldots, F^m\right), F^i \in D_{2,1}$ et considérons une fonction $\phi: \Re^m \to \Re$, continûment différentiable avec dérivées partielles bornées. Alors $\phi(F) \in D_{2,1}$, et

$$D\phi(F) = \Sigma_{i=1}^{m} \left(\partial\phi(F) / \partial F^i \right) DF^i$$

En particulier, pour l'intégrale aléatoire $F = \int_0^T \Psi(s)ds$ nous avons $D_t F = \int_t^T (D_t \Psi(s))ds$; pour l'intégrale stochastique $F = \int_0^T \Psi(s)dW_s$ nous obtenons $D_t F = \int_t^T (D_t \Psi(s))dW_s + \Psi(t)$, où le terme $\Psi(t)$ représente l'effet direct sur F d'une perturbation dans W au temps t.

Théorème A.1 (Clark, 1970; Ocone, 1984) : considérons une fonctionnelle de la trajectoire brownienne $F \in D_{2,1}$. On a alors la formule de représentation suivante, $F = E(F) + \int_0^T E\left[D_s F \mid \Im_s\right] dW_s$, où $D_s F$ représente la dérivée de Malliavin de F. En particulier, en prenant l'espérance conditionnelle, $E\left[F \mid \Im_t\right] = E(F) + \int_0^T E\left[D_s F \mid \Im_s\right] dW_s$.

La généralisation qui suit est due à Karatzas, Ocone and Li (1991).

Théorème A.2 (Karatzas, Ocone and Li (1991)) : La formule de représentation $F = E(F) + \int_0^T E\left[D_s F \mid \Im_s\right] dW_s$ est valide pour $F \in D_{1,1}$.

Le portefeuille optimal est lié au processus prévisible dans la représentation de la *Q*-martingale

$Y_t \equiv E^*\left[\int_0^T e^{-\int_0^s r_v dv} I\left(y^*\xi_s\right) ds \mid \Im_t^S\right] - E^*\left[\int_0^T e^{-\int_0^s r_v dv} I\left(y^*\xi_s\right) ds\right]$. Pour calculer ce portefeuille optimal de manière explicite, aussi est-il nécessaire d'obtenir une version de la formule de Clark sous changement équivalent de mesure. Cette formule est due à Ocone et Karatzas (1991). En premier lieu, nous définissons l'espace $L_{1,1}$ de processus prévisibles $\left\{z(t,\omega), t \in [0,T], \omega \in \Omega\right\}$ à valeurs dans $\Re^d$ qui satisfont aux conditions suivantes : (i) $z(t,\cdot) \in \left(D_{1,1}\right)^d$ pour presque tout $t \in [0,T]$, (ii) la fonction $(t,\omega) \to Dz(t,\omega) \in \left(L^2[0,T]\right)^{d \times d}$ admet une version progressivement mesurable, et (iii) $\left\|\,|z|\,\right\|_{1,1} \equiv E\left[\left(\int_0^T |z_s|^2 ds\right)^{1/2} + \left(\int_0^T \|Dz_s\|^2 ds\right)^{1/2}\right] < \infty$.

Avec cette définition, nous avons

Théorème A.3 (Ocone et Karatzas, 1991) : Supposons que $\theta \in L_{1,1}$. Soit $F \in D_{1,1}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$E\left[\,|F|\,\eta_T\right] < \infty \tag{A.1}$$

$$E\left[\eta_T \|DF\|\right] < \infty \tag{A.2}$$

$$E\left[\,|F|\,\eta_T \left\|\int_0^T D\theta_s dW_s + \int_0^T D\theta_s \cdot \theta_s\, ds\right\|\right] < \infty. \tag{A.3}$$

Alors $F\eta_T \in D_{1,1}$ et la représentation

$$F = E^*F + \int_0^T \left[E^*\left(D_t F \mid \Im_t\right) - E^*\left(F \int_t^T D_t \theta_u d\tilde{W}_u \mid \Im_t\right)\right]' d\tilde{W}_t \tag{A.4}$$

est valide. Nous avons également,

$$E^*\left[F \mid \Im_t\right] = E^*F + \int_0^t \left[E^*\left(D_sF \mid \Im_s\right) - E^*\left(F\int_s^T D_s\theta_u d\tilde{W}_u \mid \Im_s\right)\right]' d\tilde{W}_s \text{ pour}$$
$t \in \left[0,T\right]$..

BIBLIOGRAPHIE

ADLER, M., et J.B. DETEMPLE (1988), « On the Optimal Hedge of a Non-Traded Cash Position », *Journal of Finance*, 43 : 143-153.

CLARK, J.M.C. (1970), « The Representation of Functionals of Brownian Motion as Stochastic Integrals », *The Annals of Mathematical Statistics*, 41 : 1282-1295.

COX, J.C., et C. HUANG (1991), « A Variational Problem Arising in Financial Economics with an Application to a Portfolio Turnpike Theorem », *Journal of Mathematical Economics*, 20 : 465-487.

COX, J.C., et C. HUANG (1989), « Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices follow a Diffusion Process », *Journal of Economic Theory*, 49 : 33-83.

DETEMPLE, J.B. (1986(a)), « Asset Pricing in a Production Economy with Incomplete Information », *Journal of Finance*, 41 : 383-391.

DETEMPLE, J.B. (1986(b)), « A General Equilibrium Model of Asset Pricing with Partial or Heterogenous Information », *Finance*, 7 : 182-201.

DETEMPLE, J.B. (1991), « Further Results on Asset Pricing with Incomplete Information », *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15 : 425-453.

DOTHAN, M.U., et D. FELDMAN (1986), « Equilibrium Interest Rates and Multiperiod Bonds in a Partially Observable Economy », *Journal of Finance*, 41 : 369-382.

FELDMAN, D. (1989), « The Term Structure of Interest Rates in a Partially Observable Economy », *Journal of Finance*, 44 : 789-812.

FELDMAN, D. (1992), « Logarithmic Preferences, Myopic Decisions and Incomplete Information », à paraître, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.

GENNOTTE, G. (1986), « Optimal Portfolio Choice Under Incomplete Information », *Journal of Finance*, 41 : 733-746.

GIRSANOV, I.V. (1960), « On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures », *Theory of Probability and its Applications*, 5 : 285-301.

HARRISON, J.M., et D. KREPS (1979), « Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets », *Journal of Economic Theory*, 20 : 381-408.

HARRISON, J.M., et S. PLISKA (1981), « Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading », *Stochastic Processes and their Applications*, 11 : 215-260.

HE, H., et N. PEARSON (1991) « Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-sale Constraints : the Infinite Dimensional Case », *Journal of Economic Theory*, 54 : 259-304.

HUANG, C. (1985), « Information Structure and Equilibrium Asset Prices », *Journal of Economic Theory*, 35 : 33-71.

KARATZAS, I., J.P. LEHOCZKY et S.E. SHREVE (1987), « Optimal Portfolio and Consumption Decisions for a 'Small Investor' on a Finite Horizon », *SIAM Journal of Control and Optimization*, 25 : 1557-1586.

KARATZAS I., J.P. LEHOCZKY et S.E. SHREVE (1990). « Existence and Uniqueness of Multi-Agent Equilibrium in a Stochastic, Dynamic Consumption/Investment Model », *Mathematics of Operations Research*, 15 : 80-128.

KARATZAS, I., J.P. LEHOCZKY, S.E. SHREVE et G. XU (1991), « Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in an Incomplete Market », *SIAM Journal of Control and Optimization*, 29 : 702-730.

KARATZAS, I., D. OCONE et J. LI (1991), « An Extension of Clark's Formula », *Stochastics*, 37 : 127-131.

KARATZAS, I., et S.E. SHREVE (1988), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag, New York.

KARATZAS, I., et X. XUE (1991), « A Note on Utility Maximization under Partial Observations », *Mathematical Finance*, 1 : 57-70.

KETTERER, J.A. (1986), « Asset Pricing in a Multi-period Securities Market with Imperfect State Observation », mimeo, University of Minnesota.

KETTERER, J.A. (1987), « Asset Pricing with Differential Information », mimeo, University of Minnesota.

KUWANA, Y. (1991), « Notes on Consumption/Investment Model with Incomplete Observations, » communication privée.

LIPTSER, R.S., et A.N. SHIRYAYEV (1978), *Statistics of Random Processes*, Springer Verlag, New York.

MERTON, R.C. (1969), « Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty : the Continuous Time Case », *Review of Economic Studies*, 51 : 247-257.

MERTON, R.C. (1971), « Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model », *Journal of Economic Theory*, 3 : 373-413.

NUALART, D., et E. PARDOUX (1988), « Stochastic Calculus with Anticipating Integrands », *Probability Theory and Related Fields*, 78 : 535-581.

OCONE, D. (1984), « Malliavin's Calculus and Stochastic Integral Representation of Functionals of Diffusion Processes », *Stochastics*, 12 : 161-185.

OCONE, D. (1988), « A Guide to the Stochastic Calculus of Variations », *Lecture Notes in Mathematics*, 1316 : 1-79.

OCONE, D., et I. KARATZAS (1991), « A Generalized Clark Representation Formula, with Application to Optimal Portfolios », *Stochastics and Stochastics Reports*, 34 : 187-220.

PLISKA, S. (1986), « A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading : Optimal Portfolios », *Mathematics of Operations Research,* 11 : 371-382.

STULZ, R.M. (1984), « Optimal Hedging Policies », *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 19 : 127-140.

WANG, J. (1989(a)), « A Model of Intertemporal Asset Pricing under Asymmetric Information », mimeo, University of Pennsylvania.

WANG, J. (1989(b)), « Asset Prices, Stock Returns, Price Volatility, Risk Premium and Trading Strategies under Asymmetric Information, » mimeo, University of Pennsylvania.