L'Actualité économique

Croissance et équilibre intertemporel : une présentation simple d’un modèle de base

Economic Growth and Intertemporal Equilibrium: The Discrete Time Version of a Basic Model

Philippe Michel

Volume 68, numéro 1-2, mars–juin 1992

Macroéconomie : développements récents

URI : https://id.erudit.org/iderudit/602061ar
DOI : https://doi.org/10.7202/602061ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Michel, P. (1992). Croissance et équilibre intertemporel : une présentation simple d’un modèle de base. *L'Actualité économique*, *68*(1-2), 99–126. https://doi.org/10.7202/602061ar

Résumé de l'article

Dans le Chapitre 2 de *Lectures on Macroeconomics* (MIT Press, 1989), Blanchard et Fischer présentent un modèle fondamental de l’accumulation du capital, formulé en temps continu, dans lequel l’équilibre intertemporel coïncide avec la solution optimale du problème centralisé. Nous reprenons ici le même modèle reformulé en temps discret et nous suivons le même plan de présentation : modèle centralisé et croissance optimale, modèle décentralisé, influence de la dette et des dépenses publiques, croissance dans une économie ouverte et coûts d’ajustement du capital. L’étude technique de la dynamique qui utilise la fonction valeur du capital et l’équation de Bellman est faite en annexe. On a mis l’accent sur deux questions importantes : la distinction entre croissance optimale (sans actualisation) et croissance centralisée (avec actualisation), et l’analyse détaillée de la contrainte de solvabilité d’un pays.

L'Actualité économique, Revue d'analyse économique, vol. 68, nos 1 et 2, mars et juin 1992

CROISSANCE ET ÉQUILIBRE INTERTEMPOREL : UNE PRÉSENTATION SIMPLE D'UN MODÈLE DE BASE*

Philippe MICHEL
Université de PARIS-I
Centre de Mathématiques Économiques

RÉSUMÉ — Dans le Chapitre 2 de *Lectures on Macroeconomics* (MIT Press, 1989), Blanchard et Fischer présentent un modèle fondamental de l'accumulation du capital, formulé en temps continu, dans lequel l'équilibre intertemporel coïncide avec la solution optimale du problème centralisé. Nous reprenons ici le même modèle reformulé en temps discret et nous suivons le même plan de présentation : modèle centralisé et croissance optimale, modèle décentralisé, influence de la dette et des dépenses publiques, croissance dans une économie ouverte et coûts d'ajustement du capital. L'étude technique de la dynamique qui utilise la fonction valeur du capital et l'équation de Bellman est faite en annexe. On a mis l'accent sur deux questions importantes : la distinction entre croissance optimale (sans actualisation) et croissance centralisée (avec actualisation), et l'analyse détaillée de la contrainte de solvabilité d'un pays.

ABSTRACT — *Economic Growth and Intertemporal Equilibrium : The Discrete Time Version of a Basic Model.* In their *Lectures on Macroeconomics* (MIT Press, 1989), Chapter 2, Blanchard and Fischer study a basic model of capital accumulation in continuous time. We study the discrete time version of this model, considering the same topics : centralized growth and optimal growth, intertemporal equilibrium, government debt, open economy growth, capital adjustment costs. Two important questions are analyzed in more detail : the difference between centralized growth (with discounting) and optimal growth (without discounting), and the solvability constraint limiting a country debt. In the appendix, we make a technical study of the dynamics, using the capital stock value function and the Bellman equation.

INTRODUCTION

Dans leur ouvrage qui dès sa parution s'est révélé un classique de l'étude de la macroéconomie, Blanchard et Fischer (1989) présentent deux modèles fondamentaux de l'accumulation du capital. Le premier repose sur une approche

* Texte rédigé à la suite de ma participation au Cours de Macroéconomique organisé à l'Université de Montréal par Lise Salvas-Bronsard que je remercie beaucoup pour son invitation.

centralisée inspirée du modèle de Ramsey (1928) et admet une interprétation décentralisée. Le second est le modèle à générations imbriquées de Allais, Samuelson et Diamond.

Le premier modèle de base fondamental est présenté ici selon une approche différente, plus simple, qui utilise la formulation dynamique en temps discret. C'est sans doute les nombreux développements mathématiques liés aux études dynamiques de la mécanique qui expliquent l'utilisation fréquente du temps continu dans les modèles économiques théoriques, alors que les données disponibles conduisent naturellement à la formulation en temps discret et que celle-ci permet en règle générale une grande simplification technique de l'étude et une interprétation économique plus aisée (cf. par exemple pages 41 et 42 dans Blanchard et Fischer, 1989).

Dans notre présentation du modèle en temps discret, les variables de la période de temps t qui s'écoule entre les dates consécutives t et $t + 1$ sont:

— l'offre de travail L_t qui est inélastique et proportionnelle à la population;
— le stock de capital installé K_t;
— la production $Y_t = F(K_t, L_t)$ qui est définie par une fonction F homogène de degré un;
— la consommation C_t, l'investissement net I_t et l'investissement de remplacement δK_t (où le taux de dépréciation physique constant du capital δ est compris entre 0 et 1).

Dans une économie fermée, l'équilibre sur le marché du bien produit implique l'égalité entre la production et la somme de la consommation totale et de l'investissement brut:

$$F(K_t, L_t) = Y_t = C_t + I_t + \delta K_t.$$

Et la dynamique de l'accumulation du capital vérifie alors:

$$K_{t+1} - K_t = I_t = F(K_t, L_t) - \delta K_t - C_t$$

$$K_{t+1} = F(K_t, L_t) + (1 - \delta) K_t - C_t.$$

On suppose que l'offre de travail croît à un taux constant n: $L_{t+1} = (1 + n) L_t$, et on exprime la dynamique de l'accumulation du capital à l'aide des variables par tête, capital $k_t = \dfrac{K_t}{L_t}$ et consommation $c_t = \dfrac{C_t}{L_t}$:

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{1}{(1+n)L_t} [F(K_t, L_t) + (1 - \delta) K_t - C_t]$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{(1+n)} [F(k_t, 1) + (1 - \delta) k_t - c_t].$$

On utilisera la *notation simplifiée* suivante

$$(1 + n) k_{t+1} = f(k_t) - c_t$$

où $f(k) = F(k, 1) + (1 - \delta) k$ est le produit par tête disponible *incluant* le stock de capital après dépréciation. Pour simplifier l'étude, on suppose que l'*investissement est réversible*, ce qui ne modifie pas de manière significative les résultats.

Les hypothèses usuelles (fonction de production croissante, concavité stricte et conditions d'Inada) correspondent aux conditions suivantes sur la fonction $f(k) = F(k, 1) + (1 - \delta) k$:

$$f'(k) > 0, \qquad f''(k) < 0;$$

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = +\infty, \text{ et } f'(+\infty) = 1 - \delta.$$

Le maximum de consommation par tête stationnaire (pour $k_{t+1} = k_t = k$):

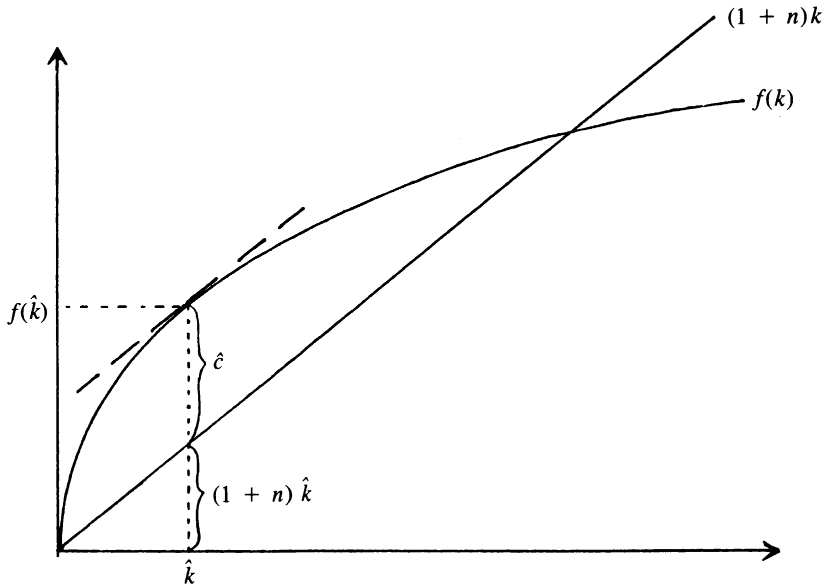
$$\hat{c} = \max\,[f(k) - (1 + n)k] = f(\hat{k}) - (1 + n)\,\hat{k}$$

est obtenu avec le *stock de capital* $\hat{k}$ *de la règle d'or* pour lequel la productivité marginale nette du capital est égal au taux de croissance de la force de travail:

$$F'_K(\hat{k}, 1) - \delta = f'(\hat{k}) - 1 = n.$$

FIGURE 1

LA RÈGLE D'OR



En fait nous allons étudier le cas un peu plus général dans lequel le produit disponible par tête, $f_t(k)$, peut dépendre de la période de production considérée. Ceci permet l'étude d'un niveau de consommation gouvernementale par tête g_t non constant (qui est prélevé sur la production). Cependant, nous verrons plus en détail le cas particulier de la dynamique *autonome* dans lequel $f_t = f$ ne dépend par de t.

Notre présentation suit le même cheminement que Blanchard et Fischer dans leur chapitre 2. Elle en diffère seulement sur deux points importants : une étude approfondie de la *croissance optimale* (sans actualisation) qu'il faut distinguer de la croissance centralisée (avec taux de préférence pour le présent), et une analyse détaillée de la *contrainte de solvabilité d'un pays*, question économique importante dans la situation actuelle d'endettement international.

1. ÉTUDE DU MODÈLE DE CROISSANCE CENTRALISÉ

Nous distinguons le problème de croissance *optimale* de Ramsey (1928) et le problème de croissance *centralisé* dans lequel est introduit l'hypothèse d'un *taux de préférence pour le présent*. Ce problème a été étudié en temps continu par Cass (1965), Koopmans (1965) et Malinvaud (1965).

Formulé en temps discret, l'objectif centralisé est égal à la somme actualisée des utilités des consommations par tête de chaque période :

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t).$$

Le facteur d'actualisation β est compris entre 0 et 1, et traduit une préférence pour le présent. La fonction d'utilité de la consommation $u(c)$ est croissante, strictement concave, deux fois continûment dérivable et l'utilité marginale d'une consommation nulle est supposée infinie.

La dynamique du stock de capital par tête est régie par l'équation présentée dans l'introduction :

$$(1+n)\, k_{t+1} = f_t(k_t) - c_t.$$

Le produit par tête disponible $f_t(k_t)$ dépend du capital par tête k_t et de la période t de production. Le stock de capital initial k_0 est donné.

1.1 *Première condition d'optimalité* (C_1)

Une première condition d'optimalité est facile à obtenir : on écrit que, à k_t et k_{t+2} *fixés*, k_{t+1} est choisi de manière à maximiser $u(c_t) + \beta\, u(c_{t+1})$. En effet, on a :

$$c_t = f_t(k_t) - (1+n)\, k_{t+1} \text{ et } c_{t+1} = f_{t+1}(k_{t+1}) - (1+n)k_{t+2}$$

et aucune des autres consommations n'est modifiée quand seul k_{t+1} varie. On en déduit qu'une solution optimale intérieure vérifie pour tout t :

$$u'(c_t) \frac{\partial c_t}{\partial k_{t+1}} + \beta u'(c_{t+1}) \frac{\partial c_{t+1}}{\partial k_{t+1}} = 0$$

soit :

$$(1+n)u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})f'_{t+1}(k_{t+1}). \qquad (C_1)$$

La condition (C_1) équivaut à l'égalité des deux taux suivants:

— le taux marginal de substitution entre les consommations des périodes t et $t+1$: $\dfrac{-dc_{t+1}}{dc_t} = \dfrac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})}$.

— le taux marginal de transformation par la production de ces consommations:

$$-\frac{dc_{t+1}}{dk_{t+1}} \Big/ \frac{dc_t}{dk_{t+1}} = \frac{f'_{t+1}(k_{t+1})}{1+n}$$

1.2 *Deuxième condition d'optimalité: la condition de transversalité*

Il est clair que la condition (C_1) basée sur un choix optimal à extrémités fixées ne suffit pas pour caractériser la solution du problème centralisé. Le stock initial k_0 est donné et il faut que «le choix du stock terminal» soit optimal. En horizon fini T, sans contrainte terminale, on a la propriété d'une épargne optimale nulle en T, soit $k_{T+1} = 0$. En horizon infini, Weitzman (1973) a montré que l'on a la condition de transversalité suivante:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)k_{t+1} = 0 \qquad (C_2)$$

Cette condition: limite nulle de la valeur actualisée de l'utilité marginale du capital pour la consommation, signifie que toute la valeur du capital en terme d'utilité globale de la consommation a été utilisée.

Sous les hypothèses standards que nous avons faites (fonctions de production et d'utilité croissantes et concaves), les deux conditions (C_1) et (C_2) sont *suffisantes*: une trajectoire réalisable qui vérifie ces deux conditions est solution du problème centralisé (Weitzman, 1973).

1.3 *Dynamique optimale et solution stationnaire dans le cas autonome*

Si $f_t(k) = f(k)$ est indépendant de t, la trajectoire constante $k_t = \bar{k}$, $c_t = \bar{c}$ qui est définie par $\beta f'(\bar{k}) = 1+n$, et $\bar{c} = f(\bar{k}) - (1+n)\bar{k}$ vérifie les conditions (C_1) et (C_2). C'est donc la trajectoire optimale du problème centralisé quand le stock de capital initial k_0 est égal à $\bar{k}$, et on dit que c'est la trajectoire optimale stationnaire.

Avec un stock initial k_0 différent de $\bar{k}$, la trajectoire optimale est *monotone* et *converge vers* $\bar{k}$. Cette dynamique est présentée ici dans un exemple. Le cas général est étudié en annexe.

Exemple. Considérons $u(c) = \log c, f(k) = bk^\alpha$, $0 < \alpha < 1$; la trajectoire obtenue avec une propension marginale à consommer γ constante, $0 < \gamma < 1$, vérifie:

$$c_t = \gamma\, bk_t^\alpha,\ k_{t+1} = \frac{(1-\gamma)\, b}{1+n} k_t^\alpha,\ k_0 \text{ donné}$$

En remplaçant dans l'équation (C_1):

$$\frac{1+n}{c_t} = \frac{1+n}{\gamma\, b} k_t^{-\alpha} = \frac{\beta}{c_{t+1}} \alpha b k_{t+1}^{\alpha-1} = \frac{\beta\alpha}{\gamma} k_{t+1}^{-1} = \frac{\beta\alpha(1+n)}{\gamma(1-\gamma)\, b} k_t^{-\alpha}$$

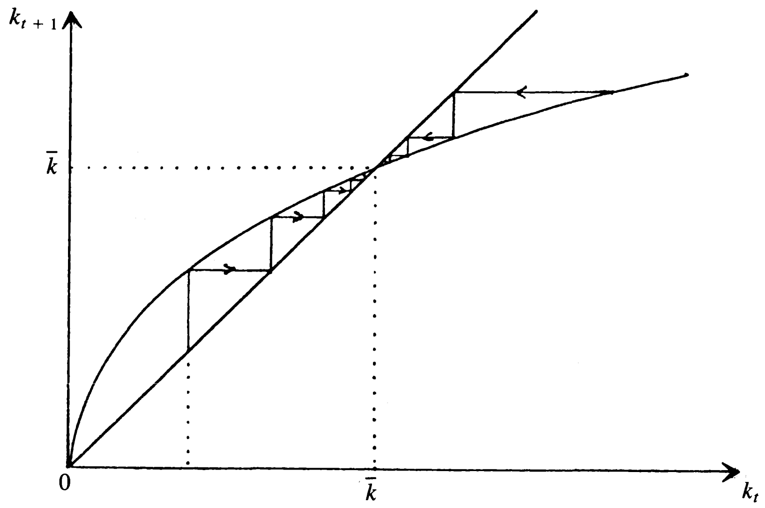
on voit que cette équation est vérifiée (pour tout k_t) si $\gamma = 1 - \alpha\beta$. Pour cette valeur de γ, la dynamique du stock de capital vérifie: $k_{t+1} = \alpha\beta b k_t^{\alpha} / (1+n)$, et (k_t) converge vers l'équilibre stationnaire:

$$\bar{k} = \left(\frac{\alpha\beta b}{1+n} \right)^{1/(1-\alpha)} .$$

Pour tout $k_0 > 0$, la trajectoire calculée vérifie les deux conditions (C_1) et (C_2). C'est donc la trajectoire optimale.

FIGURE 2

DYNAMIQUE DE L'ACCUMULATION DU CAPITAL



2. CROISSANCE OPTIMALE

Pour des raisons éthiques, Ramsey (1928), qui est le fondateur de la théorie de la croissance optimale, récuse l'hypothèse d'un taux de préférence *social* pour le présent. Harrod (1948) est tout aussi catégorique.

Il y a un argument simple pour expliquer ce rejet: l'hypothèse d'un facteur d'actualisation $\beta < 1$ conduit à un stock de capital stationnaire $\bar{k}$ qui est *inférieur au stock* $\hat{k}$ de la règle d'or, alors que $\hat{k}$ réalise le maximum de consommation par tête stationnaire. On a en effet:

$$f'(\bar{k}) = (1+n) / \beta > 1 + n = f'(\hat{k})$$

et on dit souvent que $\bar{k}$ correspond à une «règle d'or modifiée», ce qui signifie que $\bar{k}$ n'est *pas* la règle d'or!

Bien que n'ayant pas de fondement éthique, l'emploi d'un taux de préférence pour le présent dans le problème centralisé s'explique d'une part par sa commodité mathématique (la propriété de convergence de la somme infinie actualisée des utilités) et d'autre part par l'absence de fondement du choix d'une approche différente (cf. Koopmans, 1965 et 1975).

Dans un papier récent, Michel (1990a) propose comme critère social la somme (non actualisée) des utilités des consommations par tête de chaque génération, étendant ainsi la formulation originelle de Ramsey au cas d'une population croissante. Ce choix très simple est fondé sur la règle suivante: la *somme des utilités* des agents qui vivent à la même période et qui sont supposés identiques,

$$L_t u(c_t) = L_0(1+n)^t u(c_t)$$

doit être *actualisée* au taux défini par la productivité marginale du capital de la règle d'or. Combinant ainsi le principe benthamite d'égalité des individus avec un arbitrage inter-générations qui ne pénalise pas les générations futures, on obtient comme objectif social la somme «non actualisée» des utilités des générations successives:

$$\sum_t (1+n)^{-t} L_t\, u(c_t) = L_0 \sum_t u(c_t).$$

Comme la somme infinie des utilités ne converge pas, on utilise le critère de Ramsey en maximisant la somme des *écarts* entre l'utilité de la consommation par tête courante et celle de la règle d'or $\hat{c} = f(\hat{k}) - (1+n)\hat{k}$:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} [u(c_t) - u(\hat{c})].$$

Gale (1967) a fait une étude approfondie de la solution du problème de croissance optimale sans actualisation. Le sentier de croissance optimale peut être caractérisé par les deux conditions suivantes.

$$(1+n)u'(c_t) = u'(c_{t+1})f'(k_{t+1}) \qquad (C_1')$$

$$\lim_{t\to\infty} k_t = \hat{k}. \qquad (C_2')$$

La condition (C_1') est la condition (C_1) du problème centralisé dans le cas $\beta = 1$; elle résulte de la même propriété de choix optimal de k_{t+1} quand k_t et k_{t+2} sont fixés. La condition (C_2') résulte de la condition de transversalité dans un problème sans actualisation (cf. Michel, 1990b).

Dans l'exemple étudié au paragraphe précédent, $u(c) = \log c$ et $f(k) = bk^{\alpha}$, il suffit de faire $\beta = 1$ pour obtenir le sentier de croissance optimale qui vérifie:

$$c_t = (1-\alpha)\, bk_t^{\alpha}, \text{ et } k_{t+1} = \frac{\alpha b}{1+n} k_t^{\alpha}.$$

Dans cet exemple, l'optimum social consiste à investir les profits et à consommer les revenus salariaux à chaque période.

Dans le problème centralisé avec un taux de préférence pour le présent, la consommation $c_t = (1-\alpha\beta) bk_t^\alpha$ est plus élevée pour les générations proches, mais elle est réduite pour les générations éloignées. En effet, on a, à l'équilibre stationnaire, $\bar{c} = (1-\alpha\beta)\, b\bar{k}^\alpha < \hat{c} = (1-\alpha) b\hat{k}^\alpha$ (car $\hat{c}$ est le maximum de consommation stationnaire réalisable). Cependant, dans le cas $\beta = 1$, le choix d'un indice d'utilité suffisamment concave permet d'augmenter la consommation des générations proches (cf. Michel, 1990a). Le choix de $\beta = 1$ permet de rester à l'optimum social dans le cas où $k_0 = \hat{k}$: aucun argument éthique ne permet de sacrifier les générations futures dans ce cas.

3. CROISSANCE DÉCENTRALISÉE

Une manière simple et rudimentaire de formuler le problème de croissance décentralisée conduit à un équilibre intertemporel qui coïncide avec la solution du problème centralisé. Cette propriété justifie *a posteriori* l'étude du problème centralisé.

3.1 *Problème décentralisé*

Le comportement des consommateurs est défini par un *unique* problème d'optimisation dont l'objectif est le même que celui du problème centralisé:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t).$$

Mais par contre, sur les deux marchés des facteurs de production, les prix sont considérés comme des données par les consommateurs: w_t est le taux de salaire réel et r_t est le taux d'intérêt réel.

Les entreprises ont toutes la *même* fonction de production et se comportent de manière concurrentielle. Donc, avec la notation $f_t(k) = F_t(k, 1) + (1-\delta)k$, on a:

$$w_t = f_t(k_t) - k_t f'_t(k_t), \text{ et } r_t = f'_t(k_t) - 1$$

r_t est égal à la productivité marginale nette du capital et w_t est égal à la productivité marginale du travail.

La dynamique de la richesse globale X_t des ménages est régie par l'équation:

$$X_{t+1} = (1 + r_t)X_t + w_t L_t - c_t L_t.$$

Dans la définition d'un *équilibre dynamique*, les ménages peuvent *à chaque période* s'endetter librement au taux d'intérêt r_t; mais ils ne peuvent pas cumuler un endettement global positif, calculé sur *l'ensemble de leur durée de vie*. En horizon fini T, cette condition s'écrit $X_{T+1} \geqslant 0$ et elle équivaut à une contrainte budgétaire intertemporelle: la somme actualisée (en $t = 0$) des dépenses de consommation ne peut pas dépasser la somme de la richesse initiale $X_0 = K_0$ et de la valeur actualisée des revenus salariaux :

$$\sum_{t=0}^{T} R_t\, c_t\, L_t \leqslant K_0 + \sum_{t=0}^{T} R_t\, w_t\, L_t.$$

En horizon infini, la même contrainte avec $T = +\infty$ restreint l'endettement global des ménages.

L'actualisation en temps discret est calculée à la date $t = 0$ *avant* le début de la 1[re] période, et les facteurs d'actualisation R_t sont définis par

$$R_0 = \frac{1}{1 + r_0} \quad \text{et pour } t \geqslant 1 : R_t = \frac{1}{1 + r_t} R_{t-1}.$$

Dans le cas $n = 0$, l'interprétation la plus simple est celle d'agents tous *identiques* et qui ont une *durée de vie infinie*. Dans le cas $n > 0$, ce sont des familles identiques d'immortels dont le nombre d'individus croît au taux n et qui ont tous le même objectif. Il n'y a évidemment aucun problème de coordination avec ce consensus permanent entre tous les consommateurs qui choisissent la *même solution calculée une fois pour toutes par les premiers parents*. Seule la coordination avec le secteur de production qui passe par les prix des facteurs n'est pas donnée *a priori*.

3.2 *Formulation équivalente de la contrainte budgétaire intertemporelle*

La suite des richesses globales actualisées à la date $t = 0$ est: $Z_0 = K_0$, $Z_1 = R_0 X_1, \ldots, Z_{t+1} = R_t X_{t+1}, \ldots$ Elles vérifient :

$$Z_{t+1} - Z_t = R_t[(1 + r_t)X_t + w_t L_t - c_t L_t] - R_{t-1} X_t = R_t\, w_t\, L_t - R_t\, c_t\, L_t$$

$$Z_{t+1} - K_0 = \sum_{i=0}^{t} R_i\, w_i\, L_i - \sum_{i=0}^{t} R_i\, c_i\, L_i.$$

En passant à la limite quant t tend vers l'infini, on voit que la contrainte budgétaire intertemporelle est équivalente à

$$\lim_{t \to \infty} R_t\, X_{t+1} = \lim_{t \to \infty} Z_{t+1} \geqslant 0.$$

A. d'Autume et Ph. Michel (1985) ont fait une étude détaillée des formulations équivalentes de la contrainte budgétaire intertemporelle et de leur signification économique.

3.3 *Caratérisation de l'équilibre intertemporel avec prévisions parfaites*

La dynamique de la richesse par personne, $x_t = X_t / L_t$, est définie par

$$x_{t+1} = \frac{1}{1 + n} [(1 + r_t)x_t + w_t - c_t].$$

À chaque période, l'équilibre du marché du bien s'écrit :

$$k_{t+1} = \frac{1}{1 + n} [(f_t(k_t) - c_t] = \frac{1}{1 + n} [(1 + r_t)k_t + w_t - c_t]$$

et on a $x_0 = k_0$. Par conséquent, à l'équilibre intertemporel entre consommateurs et producteurs, on a $x_t = k_t$ pour tout t. Selon la même méthode que dans le paragraphe 2, on écrit que, à x_t et x_{t+2} fixés, le choix optimal de x_{t+1} maximise $u(c_t) + \beta u(c_{t+1})$:

$$u'(c_t)\ \frac{\partial c_t}{\partial x_{t+1}} + \beta u'(c_{t+1})\frac{\partial c_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = 0$$

$$(1+n)u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1+r_{t+1}) = \beta u'(c_{t+1})f'_{t+1}(k_{t+1}).$$

C'est exactement la condition (C_1) du problème centralisé. Nous allons montrer que, à l'équilibre intertemporel, la contrainte budgétaire intertemporelle qui est serrée, est équivalente à la condition de transversalité (C_2). La condition (C_1) s'écrit:

$$\beta^t u'(c_t) = \frac{1+n}{1+r_t}\beta^{t-1}\ u'(c_{t-1}).$$

Par récurrence, on en déduit les égalités

$$\beta^t u'(c_t) = \frac{(1+n)^t}{(1+r_t)(1+r_{t-1})\ldots(1+r_1)}\ u'(c_0) = (1+n)^t(1+r_0)R_t u'(c_0)$$

$$\beta^t\ u'(c_t)\ \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{(1+r_0)\ u'(c_0)}{(1+n)L_0}\ R_t K_{t+1}.$$

Il y a donc équivalence entre les deux conditions de convergence vers 0 de $\beta_t u'(c_t)k_{t+1}$ et de $Z_t = R_t K_{t+1}$. On a montré que **l'équilibre intertemporel avec prévisions parfaites coïncide avec la solution du problème centralisé.**

L'intuition de ce résultat est simple. D'après le premier théorème du bien-être, l'équilibre concurrentiel est un optimum de Pareto; et comme il n'y a qu'un seul objectif, il n'y a qu'un seul optimum de Pareto qui est la solution du problème centralisé.

Exemple

Pour la fonction d'utilité $u(c) = log\ c$, l'expression que nous avons obtenue $\beta^t\ u'(c_t) = (1+r_0)\ (1+n)^t\ R_t\ u'(c_0)$ implique:

$$R_t\ c_t\ L_t = \beta^t\ \frac{c_0\ L_0}{1+r_0}\ ,\ \text{et} \sum_{t=0}^{\infty} R_t\ c_t\ L_t = \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{c_0\ L_0}{1+r_0}\right).$$

Dans la contrainte budgétaire intertemporelle, la richesse humaine totale

$$H_0 = \sum_{t=0}^{\infty} R_t\ w_t\ L_t$$

dépend de tous les taux de salaires et taux d'intérêts anticipés à la date 0. Et la consommation au cours de la première période (en valeur actualisée en $t = 0$).

$$(1+r_0)^{-1}\ c_0\ L_0 = (1-\beta)\ (K_0 + H_0)$$

est égale à la proportion $1-\beta$ de la richesse totale actualisée en $t = 0: K_0 + H_0$.

Cet exemple illustre la dépendance de la consommation de 1[re] période par rapport aux anticipations de *tous* les prix futurs qui déterminent la richesse humaine H_0.

4. INFLUENCE DE LA DETTE ET DES DÉPENSES PUBLIQUES

La suite des consommations gouvernementales $G_t = g_t L_t$ est donnée. On étudie l'influence des dépenses publiques dans le modèle de croissance centralisé et dans le modèle de croissance décentralisé.

4.1 *Étude du problème centralisé*

Dans le problème centralisé suivant:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \text{ sous } k_{t+1} = \frac{1}{1+n} [(f_t(k_t) - g_t - c_t], \; k_0 \text{ donné,}$$

l'équation régissant la dynamique du stock de capital est modifiée «forfaitairement». Donc la condition marginale d'optimalité (C_1) et la condition de transversalité (C_2) caractérisent, avec la nouvelle loi d'accumulation, la solution du problème centralisé.

Dans le cas *autonome*, $f_t = f$ et $g_t = g$, le stock de capital stationnaire $\bar{k}$, qui est solution de l'équation, $\beta f'(\bar{k}) = 1 + n$, est inchangé. Ainsi *à long terme*, en $\bar{k}$, il n'y a qu'un *pur effet de substitution* de la consommation publique à une partie de la consommation privée, $c + g = f(\bar{k}) - (1 + n)\,\bar{k}$ est indépendant de g. Mais la modification de l'équation d'accumulation du capital a une influence plus complexe sur la dynamique, même dans le cas autonome.

Dans l'exemple du paragraphe 1, avec $u(c) = log\, c$ et $f(k) = bk^\alpha$, si la dynamique du stock de capital n'est pas modifiée, on a:

$$c_t + g_t = (1-\alpha\beta)\, bk_t^\alpha \text{ et } k_{t+1} = \frac{\alpha\beta b}{1+n}\, k_t^\alpha.$$

Et la condition (C_1) implique:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \frac{\beta f'(k_{t+1})}{1+n} = \frac{\beta\alpha b k_{t+1}^{\alpha-1}}{1+n} = \frac{k_{t+1}^\alpha}{k_t^\alpha}.$$

Alors la propension marginale à consommer privée est constante, ce qui implique que la consommation gouvernementale est aussi proportionnelle au produit. Dans cet exemple, tout autre profil des consommations gouvernementales modifie la dynamique de l'accumulation.

4.2 *Étude du problème décentralisé*

Dans le modèle de croissance décentralisé, on suppose que le gouvernement finance ses dépenses par *émission de titres* (stock D_t) et par des *taxes forfaitaires* (θ_t par personne). La dynamique de la dette publique D_t est régie par l'équation qui résulte de la contrainte budgétaire de chaque période:

$$D_{t+1} = (1 + r_t)\, D_t + g_t L_t - \theta_t L_t.$$

Et la dynamique de la richesse privée $X_t = K_t + D_t$ est définie par

$$X_{t+1} = (1 + r_t)\, X_t + w_t L_t - \theta_t L_t - c_t L_t.$$

Le comportement des ménages est caractérisée par:

— une condition marginale *inchangée* qui coïncide avec la condition (C_1) du problème centralisé:

$$(1 + n)\, u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})\, (1 + r_{t+1}) = \beta\, u'(c_{t+1}) f'_{t+1}\, (k_{t+1}).$$

— leur contrainte budgétaire intertemporelle serrée qui est *modifiée*

$$\sum_{t=0}^{\infty} R_t\, c_t\, L_t = X_0 + H_0 - E_0, \text{ où } E_0 = \sum_{t=0}^{\infty} R_t\, \theta_t\, L_t$$

la valeur actualisée E_0 de toutes les taxes vient en déduction de la somme de la richesse initiale $X_0 = K_0 + D_0$ et du capital humain H_0 (la valeur actualisée de tous les salaires). Comme dans le modèle sans taxation, cette contrainte équivaut à la condition de limite égale à 0 de la valeur actualisée de la richesse

$$\lim_{t \to \infty} R_t X_{t+1} = 0.$$

4.3 *Étude de l'équilibre budgétaire intertemporel du gouvernement*

Il parait évident que le gouvernement ne peut pas choisir arbitrairement son endettement. Par exemple, il ne peut pas financer toutes ses consommations sans taxes. Nous allons montrer qu'il ne peut y avoir d'équilibre intertemporel avec gouvernement que si une certaine limite à l'endettement du gouvernement est imposée.

En effet, quand il existe, un équilibre intertemporel vérifie les deux conditions suivantes:

$$\lim_{t \to \infty} R_t K_{t+1} = 0 \text{ et } \lim_{t \to \infty} R_t X_{t+1} = 0.$$

Les limites des valeurs actualisées de la richesse physique et de la richesse totale des ménages sont nulles (cf. 3.3 et 4.2). Comme $X_{t+1} = K_{t+1} + D_{t+1}$, on en déduit que *s'il existe un équilibre intertemporel avec gouvernement, la dette gouvernementale vérifie*:

$$\lim_{t \to \infty} R_t D_{t+1} = 0.$$

Cette condition s'interprète comme une contrainte d'équilibre budgétaire intertemporel du gouvernement, car elle équivaut à l'égalité en valeur actualisée des recettes et des dépenses du gouvernement:

$$\sum_{t=0}^{\infty} R_t\, \theta_t\, L_t = D_0 + \sum_{t=0}^{\infty} R_t\, g_t\, L_t.$$

Réciproquement, quand la dette gouvernementale vérifie la contrainte d'équilibre budgétaire intertemporel, alors l'optimum centralisé est un équilibre décentralisé (la démonstration est la même que dans 3.3). On en déduit que dans ce cas, *l'équilibre décentralisé existe et ne dépend que du profil des consommations gouvernementales*.

4.4 *Neutralité de la dette*

Cette propriété a une conséquence importante: *dans le modèle de croissance décentralisé, l'équilibre intertemporel est indépendant du mode de financement des dépenses gouvernementales, par endettement ou par taxation forfaitaire*. Ce résultat très fort de neutralité provient du comportement des ménages qui ont une durée de vie infinie et font des prévisions parfaites: pour leurs décisions, ils ne tiennent compte que de la valeur actualisée de toutes les taxes futures et toute consommation gouvernementale a sa contrepartie en taxe actualisée dans la contrainte budgétaire intertemporelle du gouvernement. Le choix du profil des taxes n'a aucune influence sur l'allocation des ressources, à condition que les taxes soient *forfaitaires*.

Par contre, *la taxation du capital* a une influence sur l'allocation des ressources; par son action sur le rendement de l'épargne, elle modifie la condition marginale régissant le comportement des ménages qui devient:

$$(1 + n)\, u'(c_t) = \beta\, u'(c_{t+1})\,(1-\tau_{t+1})\,(1 + r_{t+1}) = \beta\, u'(c_{t+1})\,(1-\tau_{t+1})\, f'_{t+1}(k_{t+1})$$

où τ_{t+1} désigne le taux de taxation du capital à la période $t + 1$.

Cette propriété peut être utilisée par un gouvernement parfaitement bienveillant pour instaurer le sentier de croissance optimale dans l'économie décentralisée. La condition marginale de croissance optimale, $(1 + n)u'(c_t) = u'(c_{t+1})\, f'_{t+1}(k_{t+1})$ coïncide avec celle des ménages quand le capital est subventionné au taux $-\tau = 1/\beta-1$; et il suffit que le gouvernement prélève *forfaitairement* le montant de la subvention du capital.

5. CONTRAINTE DE LA SOLVABILITÉ D'UN PAYS

Pour étudier la croissance d'une économie ouverte, on considère un petit pays et un taux d'intérêt international r que l'on suppose constant. La liberté d'échange international sur le marché des biens permet de prendre des décisions indépendantes pour l'épargne et l'investissement. L'accroîssement de la dette du pays, le déficit courant $B_{t+1} - B_t$, s'ajoute à la production nationale $Y_t = F(K_t, L_t)$ pour financer la consommation C_t, l'investissement brut $K_{t+1} - K_t + \delta K_t$ et les intérêts de la dette rB_t:

$$B_{t+1} - B_t + F(K_t, L_t) = C_t + K_{t+1} - K_t + \delta\, K_t + rB_t$$

L'hypothèse de mobilité parfaite des capitaux implique que la productivité marginale nette du capital installé dans le pays est constante et égale à r. Dans le cas autonome, le stock de capital par tête k est constant:

$$r = f'(k) - 1 = F'_K(k, 1) - \delta$$

et le taux de salaire aussi est constant:

$$w = f(k) - kf'(k) = F(k, 1) - (r + \delta)k = F'_L(k, 1).$$

Il n'y a pas de mobilité de l'emploi L_t et le stock de capital du pays est $K_t = kL_t$. *Par substitution, on obtient:*

$$B_{t+1} = (1 + r)B_t + L_t[c_t + (n + \delta) k - F(k, 1)].$$

La *capacité de remboursement* du pays à la date t est égale à la valeur actualisée en t de toutes les productions futures nettes des dépenses de renouvellement du stock de capital par tête:

$$W_t = \sum_{i=0}^{\infty} R_i L_{t+i}[F(k, 1) - (n + \delta)k]$$

où $R_i = (1 + r)^{-i-1}$ est le facteur d'actualisation défini par le taux d'intérêt international r. La règle d'actualisation est la même que précédemment: la production entre t et $t + 1$ *est actualisée à la date* t avec le facteur $R_0 = (1 + r)^{-1}$. Et $R_i L_{t+i} = \left(\frac{1+n}{1+r}\right)^i \frac{L_t}{1+r}$.

La contrainte de solvabilité du pays s'énonce: *à toute date, le montant de la dette du pays* B_t *ne peut pas dépasser sa capacité de remboursement* W_t*:*

pour tout t, $B_t \leqslant W_t$.

Dans le cas où la capacité de remboursement est *infinie* ($n \geqslant r$), il n'y a *pas de limite* à l'endettement du pays et n'importe quel niveau de consommation pourra être remboursé. On exclut ce cas et on suppose que *le taux d'intérêt international r est supérieur au taux de croissance n* du pays. Alors, on a:

$$R_t W_{t+1} = R_{t-1} W_t - R_t L_t[F(k,1) - (n + \delta)k].$$

Par combinaison avec l'équation régissant la dynamique de la dette actualisée à la date initiale:

$$R_t B_{t+1} = R_{t-1} B_t + R_t L_t[c_t + (n + \delta)k - F(k,1)]$$

on obtient:

$$R_t(W_{t+1} - B_{t+1}) = R_{t-1} (W_t - B_t) - R_t c_t L_t.$$

L'excès de la capacité de remboursement sur la dette, en valeur actualisée en 0, *diminue à chaque période du volume de la consommation de la période*. Ceci implique notamment que la suite de ces excès est monotone décroissante. Par conséquent, *la contrainte de solvabilité* (tous ces excès doivent être non négatifs) *est équivalente à la non-négativité de la limite de la suite des excès de capacité de remboursement*:

$$\lim_{t \to \infty} R_t(W_{t+1} - B_{t+1}) \geqslant 0.$$

Par ailleurs, la valeur actualisée en 0 de la capacité de remboursement en t:

$$R_{t-1}\, W_t = \sum_{i=0}^{\infty} R_{t+i}\, L_{t+i}[F(k,1) - (n+\delta)k]$$

converge vers 0 quand t tend vers l'infini, car on a:

$$\sum_{i=0}^{\infty} R_{t+i}\, L_{t+i} = \left(\frac{1+n}{1+r}\right)^t \sum_{i=0}^{\infty} R_i\, L_i = \left(\frac{1+n}{1+r}\right)^t \frac{L_0}{r-n}.$$

Ainsi, la contrainte de solvabilité du pays équivaut à

$$\lim_{t\to\infty} R_t\, B_{t+1} \leqslant 0$$

la limite de la valeur actualisée en 0 de la dette du pays doit être non positive.

Il y a encore une autre manière équivalente de traduire la contrainte de solvabilité d'un pays. Il suffit de sommer les termes successifs de l'équation régissant la dynamique de l'excès de la capacité de remboursement sur la dette en valeur actualisée:

$$\begin{aligned} R_t(W_{t+1} - B_{t+1}) - (W_0 - B_0) &= \sum_{i=0}^{t} [R_i(W_{i+1} - B_{i+1}) - R_{i-1}(W_i - B_i)] \\ &= \sum_{i=0}^{t} R_i\, c_i\, L_i \end{aligned}$$

et de passer à la limite quand t tend vers l'infini pour obtenir la condition équivalente

$$B_0 + \sum_{i=0}^{\infty} R_i\, c_i\, L_i \leqslant W_0 = \sum_{i=0}^{\infty} R_i\, L_i\, [F(k,1) - (n+\delta)k].$$

La somme de la dette initiale du pays et de toutes les valeurs actualisées des consommations ne peut pas dépasser la capacité de remboursement initiale. À l'optimum, cette condition est vérifiée avec l'égalité; et dans le cas $B_0 = 0$, elle est équivalente à l'*équilibre intertemporel de la balance commerciale* (en valeur actualisée):

$$\sum_{t=0}^{\infty} R_t\, L_t\, [-c_t - (n+\delta)k + F(k,1)] = B_0 = 0.$$

6. ÉTUDE DE LA CROISSANCE DANS L'ÉCONOMIE OUVERTE

Le problème centralisé s'écrit:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sous la contrainte de solvabilité (exprimée sous l'une quelconque de ses formes équivalentes). Comme dans l'étude du paragraphe 1, on obtient une condition marginale d'optimalité en maximisant $u(c_t) + \beta\, u(c_{t+1})$ à B_t et B_{t+2} fixés:

$$u'(c_t)\,\frac{\partial c_t}{\partial B_{t+1}} + \beta u'(c_{t+1})\,\frac{\partial c_{t+1}}{\partial B_{t+1}} = 0$$

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \frac{\beta L_t(1+r)}{L_{t+1}} = \frac{\beta}{h},$$

où $h = \dfrac{1+n}{1+r}$.

Pour que la contrainte de solvabilité du pays ait un sens, on a supposé $n < r$ (capacité de remboursement *finie*) et on a donc $h < 1$.

La condition marginale d'optimalité implique que *la consommation optimale est croissante, constante ou décroissante selon que* β *est supérieur, égal ou inférieur à h.*

Dans le problème décentralisé, la dette nationale par individu est: $b_t = B_t/L_t$ et la dette individuelle $b_t - k$ vérifie:

$$b_{t+1} - k = \frac{1}{1+n}[(1+r)(b_t-k) + c_t - w],$$

où $w = F(k,1) - (r+\delta)k$.

Par hypothèse, l'objectif est le même que dans le problème centralisé. Il en résulte que la condition marginale d'optimalité est la même. Par ailleurs, la contrainte budgétaire intertemporelle d'une famille (et non d'un individu) est actualisée au taux de rendement «familial» $(1+r)/(1+n)$. Donc cette contrainte qui s'écrit (sous l'hypothèse $n < r$):

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{1+n}{1+r}\right)^t b_t = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1+n}{1+r}\right)^t (b_t-k) \leqslant 0$$

est équivalente à la contrainte de solvabilité du pays (la dette du pays $B_t = L_t b_t$ est égale à $L_0 (1+n)^t b_t$).

Si elle existe, la solution optimale du problème centralisé est caractérisée par la condition marginale d'optimalité et par la contrainte de solvabilité vérifiée avec égalité. Par conséquent, comme dans l'économie fermée, l'équilibre intertemporel décentralisé coïncide avec l'optimum centralisé dans l'économie ouverte. Il nous reste à étudier cet optimum.

Existence de la solution optimale centralisée

On désigne par $A_t = R_{t-1} B_t = (1+r)^{-t} B_t$ le montant de la dette actualisée. Sous forme actualisée, l'équation régissant la dynamique de la dette du pays s'écrit:

$$A_{t+1} - A_t = R_t L_t [c_t + (n+\delta) k - F(k,1)]$$

$$A_{t+1} - A_t = \frac{L_0}{1+r} h^t c_t - \frac{L_0}{1+r} h^t [F(k,1) - (n+\delta)k]$$

où $h = (1+n)/(1+r) < 1$ (par hypothèse). On a donc

$$A_{t+1} - A_0 = \frac{L_0}{1+r} \sum_{i=0}^{t} h^i c_i - \frac{L_0}{1+r} \; [F(k,1) - (n+\delta)k] \; \frac{1-h^{t+1}}{1-h} \; .$$

La condition de solvabilité : $\lim A_{t+1} \leqslant 0$ implique que la somme infinie des quantités $h^t c_t$ est *finie*; donc c_t ne peut pas croître à un taux supérieur ou égal à h. Voyons cette condition dans un exemple.

Exemple

Pour la fonction d'utilité à élasticité de substitution constante: $u(c) = c^{1-a}/(1-a)$, $a > 0$, la condition marginale d'optimalité donne:

$$\left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^{-a} = \frac{\beta}{h}, \text{ et } \quad \frac{c_{t+1}}{c_t} = \left(\frac{\beta}{h} \right)^{1/a}$$

ce qui implique:

$$c_t = \left(\frac{\beta}{h} \right)^{t/a} c_0 \text{ et } h^t \, c_t = \gamma^t \, c_0, \text{ avec } \gamma = \beta^{1/a} \, h^{1-1/a}.$$

La condition de convergence de $\sum_t h^t c_t$, $\gamma < 1$, est équivalente à : $\beta < h^{1-a}$.

Cette condition implique une restriction sur les valeurs des paramètres. En supposant $\gamma < 1$, on a:

$$\lim A_{t+1} = B_0 + \frac{L_0}{1+r} \left(\frac{c_0}{1-\gamma} \right) - \frac{L_0}{r-n}[\mathrm{F}(k,1) - (n+\delta)k].$$

De la condition d'optimalité: $\lim A_{t+1} = 0$, on déduit:

$$(1+r)^{-1} \, c_0 = (1-\gamma) \left[\frac{1}{r-n} \, [F(k,1) - (n+\delta)k] - \frac{B_0}{L_0} \right]$$

ce qui détermine un unique niveau de consommation optimale $c_0 > 0$ pourvu que la dette initiale soit inférieure à la capacité de remboursement initiale du pays. Dans ce cas la solution optimale existe et elle est unique.

Interprétation

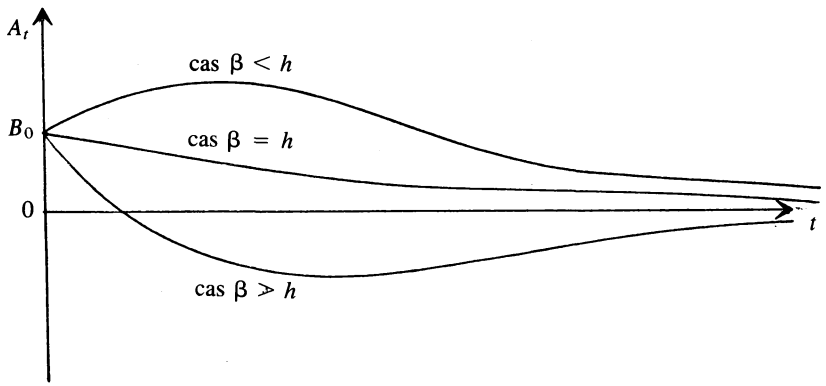
Si la consommation désirée ne croît pas trop vite, (et *a fortiori* si elle est constante ou décroissante : cas $\beta \leqslant h$), alors tout niveau de consommation initiale $c_0 > 0$ détermine une valeur actualisée de toutes les consommations qui est *finie*. Dans ce cas le niveau optimal est la plus grande valeur de c_0 que permet la contrainte de solvabilité.

Par contre, si le taux de croissance désiré de la consommation est trop élévé, alors pour toute valeur de $c_0 > 0$, la valeur actualisée de toutes les consommations est infinie et la contrainte de solvabilité du pays ne peut pas être vérifiée. Dans ce cas, le problème centralisé n'a *pas* de solution optimale et il n'existe pas d'équilibre intertemporel dans l'économie décentralisée.

C'est la possibilité d'écart permanent entre le taux d'intérêt qui est exogène et le taux de préférence pour le présent qui explique la nature de la solution en économie ouverte. Dans une économie fermée, le taux d'intérêt s'ajuste et vérifie à long terme l'égalité: $\beta = h = (1 + n)/(1 + r)$. Quand cette égalité est vérifiée dans l'économie ouverte, la consommation est constante: l'état stationnaire est immédiatement atteint par l'ajustement instantané du capital dans le cadre des échanges internationaux; et dans ce cas la dette actualisée converge de façon monotone vers 0.

FIGURE 3

DYNAMIQUE DE LA DETTE ACTUALISÉE



Si $\beta > h$, la consommation par tête croît et tend vers $+\infty$; alors le déficit commercial de long terme est compensé par le bas niveau de consommation de court terme et une forte diminution de la dette qui devient négative.

Si $\beta < h$, la consommation par tête décroît et tend vers 0; alors le surplus commercial de long terme permet un fort accroissement de la dette avec un niveau élevé de la consommation à court terme.

Un choc sur la productivité se traduit par un ajustement instantané du stock de capital de sorte que sa productivité marginale nette reste égale au taux d'intérêt. Cette modification du stock de capital s'accompagne d'une modification égale de la dette du pays.

Quand le choc n'est pas anticipé, la solution n'est évidemment modifiée qu'à partir de la date du choc. Une nouvelle solution optimale est alors calculée sur la base des nouvelles données: capacité productive et dette du pays.

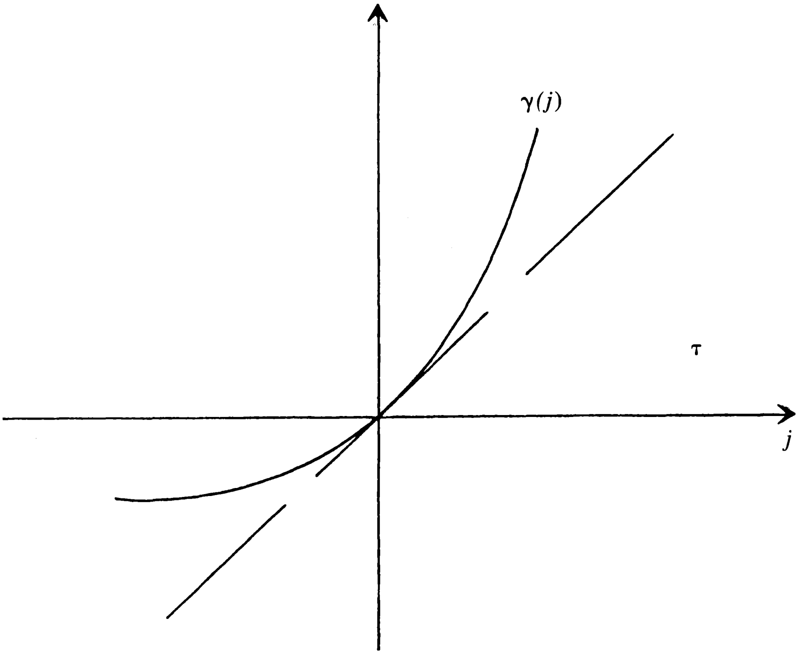
Quand le choc est anticipé alors, dès la date initiale, la contrainte de solvabilité du pays (sa capacité de remboursement W_0) est calculée sur la base de ses capacités productives avant et après le choc. Dans ce cas, il n'y a plus de rupture du rythme de la consommation optimale calculée avec la contrainte de solvabilité qui prend en compte le choc. Par exemple dans le cas $\beta = h$, la consommation optimale est constante sur tout l'horizon quand le choc sur la productivité est anticipé; mais ce choc affecte évidemment le niveau constant de la consommation.

7. COÛTS D'AJUSTEMENT DU CAPITAL.

Jusqu'à présent nous avons supposé que le stock de capital et le taux d'intérêt s'ajustent instantanément : dans l'économie fermée, c'est le stock de capital installé qui détermine le taux d'intérêt (égal à la productivité marginale nette du capital); dans l'économie ouverte, le taux d'intérêt international détermine le stock de capital utilisé.

FIGURE 4

DÉPENSES D'INVESTISSEMENT AVEC COÛTS D'AJUSTEMENT DU CAPITAL



7.1 *Notion de coûts d'ajustement du capital*

L'hypothèse d'*inertie* qui implique des délais d'ajustement peut être formulée en introduisant des *coûts* liés à la mise en place des installations productives (Eisner et Strotz, 1963). Selon cette hypothèse, pour accroître le stock de capital installé K d'un volume I, il est nécessaire d'utiliser la quantité $G(I, K)$ du bien homogène qui est produit dans l'économie. Dans une économie fermée, la production globale $Y_t = F(K_t, L_t)$ se répartit entre la consommation C_t, l'investissement de remplacement δK_t (qui est sans coût), et la quantité de bien $G(I_t, K_t)$ utilisée pour réaliser l'investissement net I_t:

$$Y_t = F(K_t, L_t) = C_t + \delta K_t + G(I_t, K_t), \text{ et } I_t = K_{t+1} - K_t.$$

Les coûts d'ajustement $G(I, K) - I$ représentent dans le cas $I > 0$ les pertes dues à l'installation de nouveaux équipements et dans le cas $I < 0$, les pertes occasionnées par le désinvestissement. Cette formulation donne une signification nouvelle et plus pertinente à l'hypothèse d'investissement réversible en explicitant les pertes liées à un désinvestissement. Avec l'hypothèse de Lucas (1967), selon laquelle la fonction de dépense d'investissement $G(I, K)$ est *homogène de degré un*, la structure de rendements d'échelle constants est préservée et ceci permet, comme nous le verrons, de décentraliser la production entre de nombreuses firmes concurrentielles qui ont la même fonction de production et la même fonction de coût d'ajustement du capital. Dans ce cas, les dépenses $G(I, K) = K\gamma(I/K)$ sont déterminées par le stock de capital déjà installé et caractérisées par la fonction $\gamma(j)$ qui dépend du taux d'investissement $j = I/K$. La fonction $\gamma(.)$ est supposé strictement convexe et croissante, nulle en $j = 0$ et de dérivée égale à 1 en $j = 0$:

$$\gamma(0) = 0, \gamma' > 0, \gamma'(0) = 1 \text{ et } \gamma'' > 0.$$

Ces hypothèses impliquent: $\gamma(j) > j$ pour tout $j > 0$ (la fonction convexe $\gamma(j) - j$ atteint son minimum égal à 0 en $j = 0$).

7.2 *Dynamique de l'accumulation dans une économie ouverte*

Dans le modèle d'une petite économie ouverte, la dynamique de la dette du pays est régie par l'équation:

$$B_{t+1} = (1 + r) B_t + c_t L_t + G(K_{t+1} - K_t, K_t) + \delta K_t - F(K_t, L_t)$$

et à toute politique de choix des investissements est associée la contrainte de solvabilité du pays. Cette contrainte s'écrit sous la forme suivante (cf. § 5):

$$B_0 + \sum_{t=0}^{\infty} R_t c_t L_t \leq W_0 = \sum_{t=0}^{\infty} R_t \left[F(K_t, L_t) - \delta K_t - G(K_{t+1} - K_t, K_t)\right].$$

La capacité de remboursement initiale W_0 résulte directement du choix des investissements et ne dépend que de ces choix. Par conséquent, la solution optimale du problème centralisé:

$$\text{Maximum} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \text{ sous la contrainte de solvabilité}$$

s'obtient en *deux étapes qu'il est possible de séparer*. La première étape consiste à choisir les investissements pour maximiser la capacité de remboursement initiale qui est égale à la somme actualisée des productions nettes du pays:

$$W_0^* = \text{Maximum} \sum_{t=0}^{\infty} R_t \left[f(K_t, L_t) - \delta K_t - G(K_{t+1} - K_t, K_t)\right].$$

La deuxième étape consiste à choisir les consommations par tête qui maximisent la fonction objectif intertemporelle sous la contrainte de solvabilité:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \text{ sous la contrainte } B_0 + \sum_{t=0}^{\infty} R_t c_t L_t \leq W_0^*.$$

La seconde étape s'étudie comme dans le paragraphe précédent. La condition marginale d'optimalité est inchangée:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \frac{\beta}{h} = \frac{\beta(1+r)}{1+n}$$

et elle détermine par récurrence la consommation optimale de chaque période en fonction de la consommation optimale de la 1^re^ période. Si W_0^* est *fini* et si le taux de croissance de la consommation optimale n'est pas trop élevé (en sorte que la somme actualisée des consommations soit *finie*), alors la consommation optimale de 1^re^ période est le maximum que permet la contrainte de solvabilité. Par exemple, dans le cas $\beta = (1+n)/(1+r)$, la consommation optimale par tête est constante et vérifie:

$$c_t = c_0 = \left(\frac{r-n}{L_0}\right)(W_0^* - B_0).$$

7.3 *Étude de la solution optimale du problème centralisé d'investissement optimal*

D'après la propriété d'homogénéité de degré *un* de F et G, la production nette du pays V_t vérifie:

$$V_t = F(K_t, L_t) - \delta\, K_t - G(K_{t+1} - K_t, K_t) = L_t\, v_t.$$

avec $v_t = F(k_t, 1) - \delta\, k_t - G((1+n)k_{t+1} - k_t, k_t)$.

Dans le cas $n < r$, la solution $k_t^* = K_t^*/L_t$ du problème centralisé d'investissement optimal

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} R_t\, V_t = \sum_{t=0}^{\infty} R_t\, L_t\, v_t$$

vérifie la condition marginale obtenue par le choix optimal de k_{t+1} à k_t^* et k_{t+2}^* fixés:

$$\frac{\partial v_t}{\partial k_{t+1}} + \left(\frac{1+n}{1+r}\right)\frac{\partial v_{t+1}}{\partial k_{t+1}} = 0.$$

À l'équilibre stationnaire k^*, cette condition s'écrit:

$$r\, G'_I(nk^*, k^*) = F'_K(k^*, 1) - \delta - G'_K(n\, k^*, k^*).$$

Dans le cas $n = 0$, l'équilibre stationnaire k^* est le même que dans le problème sans coût d'ajustement et vérifie $F'_K(k^*, 1) - \delta = r$. En effet, la fonction $G(I, K) = K\,\gamma(I/K)$ vérifie $G'_I(0, K) = \gamma'(0) = 1$ et $G'_K(0, K) = \gamma(0) = 0$.

Par contre, dans le cas $n \neq 0$, il y a, à l'équilibre stationnaire k^*, un coût d'ajustement non nul de l'investissement qui maintient constant le stock de capital par tête. Dans ce cas, la productivité marginale nette du capital est modifiée en prenant en compte l'effet marginal du stock de capital installé sur les coûts d'investissement et le taux d'intérêt est modifié par le coût marginal de l'investissement.

Dans tous les cas, le stock de capital ne s'adapte que progressivement au taux d'intérêt international en raison des coûts d'ajustement.

7.4 *Décentralisation de la production et des investissements*

On étudie d'abord le cas d'une seule firme. Dans le problème centralisé d'investissement optimal, l'emploi L_t est *exogène*. Dans le problème décentralisé avec une seule firme qui maximise le flux actualisé de ses profits

$$\sum_{t=0}^{\infty} R_t[F(K_t, L_t^d) - w_t L_t^d - \delta K_t - G(K_{t+1} - K_t, K_t)]$$

l'emploi L_t^d est *endogène* et déterminé par l'égalité du taux de salaire w_t et de la productivité marginale du travail $F'_L(K_t, L_t^d)$. À l'équilibre intertemporel, le taux de salaire s'ajuste pour réaliser le plein emploi $L_t^d = L_t$. Alors, le niveau d'emploi étant *le même*, le problème de la firme est équivalent au problème centralisé d'investissement optimal.

On étudie le cas de m firmes i, $i = 1, 2, \ldots, m$, le stock de capital initial K_0^i de la firme i étant une fraction a_i de K_0 ($a_i > 0$ et $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 1$). Les objectifs de toutes les firmes sont les mêmes (elles ne diffèrent que par le niveau de capital initial K_0^i) et ce sont des fonctions homogènes de degré un par rapport à l'ensemble de leurs décisions : K_t^i et L_t^i. Par conséquent, le problème de chaque firme est homothétique au problème d'une seule firme et la solution optimale de la firme i est :

$$K_t^i = a_i K_t^* \text{ et } L_t^i = a_i L_t.$$

*Le choix des investissements et de l'emploi à l'équilibre intertemporel décentralisé (avec **m** firmes) coïncide avec la répartition des choix optimaux du problème centralisé selon des parts constantes qui sont celles de la répartition du stock de capital initial dans l'économie.*

Sous l'hypothèse de coûts d'ajustement du capital, le stock de capital d'une firme est «captif» car toute modification de ce stock est coûteuse ; il n'existe alors, à fonction de production, fonction de dépense d'investissement, taux d'intérêt et taux de salaire donnés, qu'une manière efficace de gérer la firme avec un taux d'investissement (ou de désinvestissement) optimal.

Il faut aussi noter que l'équilibre intertemporel décentralisé des firmes comporte l'hypothèse de prévisions parfaites des taux d'intérêt et taux de salaire futurs par toutes les firmes.

Dans la formulation du profit des firmes, les dépenses d'investissement ont été déduites des recettes, ce qui correspond à l'hypothèse d'autofinancement. En fait, la solution du problème de la firme est indépendante du mode de financement des investissements car la somme actualisée des emprunts et remboursements est nulle en raison de la contrainte de solvabilité de la firme (cf. d'Autume et Michel, 1985).

7.5 Décentralisation de la consommation

Les familles de consommateurs possèdent les firmes à parts égales et reçoivent les dividendes qui sont par habitant:

$$\pi_t = F(k_t, 1) - w_t - \delta\, k_t - G((1+n)k_{t+1} - k_t, k_t) = v_t - w_t .$$

La dette nationale par habitant $b_t = B_t / L_t$ *vérifie:*

$$b_{t+1} = \frac{1}{1+n}\,[(1+r)\,b_t + c_t - v_t] = \frac{1}{1+n}\,[(1+r)\,b_t + c_t - w_t - \pi_t].$$

Dans le cas de consommateurs identiques, b_t est aussi la dette individuelle (sans prise en compte de la part de propriété des firmes). Et la valeur des firmes, égale au flux actualisé des dividendes, est prise en compte dans l'équation d'évolution de la dette individuelle.

La contrainte budgétaire intertemporelle d'une famille est alors équivalente à la contrainte de solvabilité du pays:

$$\lim_{t\to\infty} (1+r)^{-t} B_t = L_0 \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1+n}{1+r}\right)^t b_t .$$

En outre, la condition marginale du problème des consommateurs qui maximisent

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t\, u(c_t)$$

coïncide avec la condition marginale d'optimalité du problème centralisé. Par conséquent, les solutions de ces deux problèmes sont les mêmes et *l'équilibre intertemporel décentralisé avec anticipations rationnelles coïncide avec la solution optimale du problème centralisé.*

Un choc sur la productivité dans l'économie ouverte a les mêmes conséquences sur le choix optimal des *consommations* que dans le modèle sans coût d'ajustement (§ 6). Un choc non anticipé modifie la contrainte de solvabilité (la capacité de remboursement) du pays à la date du choc, ce qui implique un réajustement du choix optimal des consommations. Un choc anticipé est pris en compte à la date initiale pour calculer la capacité de remboursement et dans ce cas, il n'y a pas de rupture dans le rythme de la consommation optimale à la date du choc.

L'influence d'un choc sur l'*accumulation du capital* est modifiée par la présence des coûts d'ajustement. Un choc non anticipé conduit à reconsidérer la dynamique de l'accumulation du capital qui ne s'adapte que progressivement aux nouvelles conditions. Un choc anticipé modifie la dynamique de l'accumulation dès la date initiale car l'adaptation du stock de capital est coûteuse et se fait progressivement en prenant en compte à chaque date l'ensemble des conditions futures anticipées: fonction de production, fonction de dépense d'investissement, taux d'intérêt et taux de salaire.

ANNEXE

SOLUTION OPTIMALE DU PROBLÈME CENTRALISÉ. ÉTUDE À L'AIDE DE LA FONCTION VALEUR

Dans le cas autonome, pour le problème de croissance centralisé du paragraphe 1, on définit pour tout $k_0 > 0$.

$$v(k_0) = \sup\left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \text{ sous la condition: } (1+n)k_{t+1} = f(k_t) - c_t, \right.$$

$$\left. k_0 \text{ donné} \right\}$$

La *fonction valeur* v du capital initial (par tête) est le maximum d'utilité intertemporelle de la consommation qui est réalisable avec ce stock initial. Cette fonction vérifie l'équation de Bellman:

$$v(k_0) = \sup\{u(c_0) + \beta v(k_1), \text{ où } k_1 = \frac{1}{1+n}[f(k_0) - c_0]\}.$$

En effet, pour tout choix d'une consommation c_0 réalisable, le maximum d'utilité réalisable avec ce choix est

$$u(c_0) + \max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t) = u(c_0) + \beta\, v(k_1)$$

les décisions étant optimales à partir de k_1. Par conséquent, la consommation optimale de 1re période est celle qui maximise cette expression.

Sous les hypothèses usuelles de monotonie et de concavité stricte ($u' > 0$, $u'' < 0$, $f' > 0$ et $f'' < 0$), la fonction valeur v est *strictement concave* et donc *continue*. Dans ce cas, la consommation optimale c_0^*, qui est solution de l'équation de Bellman, est une fonction *continue* γ du stock de capital initial. La même propriété est obtenue à chaque période et la solution optimale du problème centralisé vérifie donc pour tout t, $c_t^* = \gamma(k^*_t)$. Ainsi $\gamma(k)$ définit la *règle de consommation optimale* en fonction du stock de capital par tête disponible. On suppose en outre que l'utilité marginale d'une consommation nulle est infinie en sorte que toutes les consommations optimales sont positives et $\gamma(k)$ vérifie: $0 < \gamma(k) < f(k)$.

Dérivabilité de la fonction valeur

La consommation optimale de 1re période $c_0^* = \gamma(k_0)$ est positive, inférieure à $f(k_0)$ et vérifie

$$v(k_0) = u(c_0^*) + \beta\, v(k_1^*), \text{ et } c_0^* = f(k_0) - (1+n)k^*_1.$$

En modifiant légèrement le stock de capital initial, soit $k_0 + \varepsilon$, on peut choisir $c_0 = f(k_0 + \varepsilon) - (1+n)k_1^*$ en sorte que le stock de capital k_1^* soit inchangé. On en déduit:

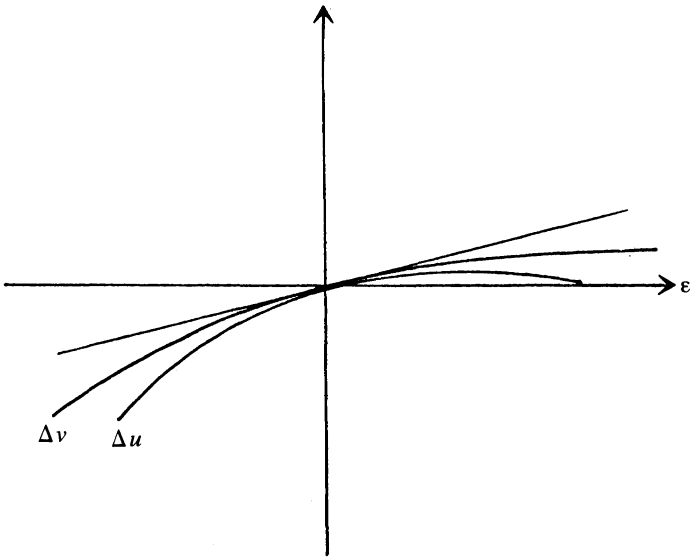
$$v(k_0 + \varepsilon) \geqslant u(c_0) + \beta\, v(k_1^*) = u(c_0) + v(k_0) - u(c_0^*)$$

$$v(k_0 + \varepsilon) - v(k_0) \geqslant u[f(k_0 + \varepsilon) - (1+n)k_1^*] - u[f(k_0) - (1+n)k_1^*].$$

La fonction $\Delta v(\varepsilon) = v(k_0 + \varepsilon) - v(k_0)$ est concave, nulle en $\varepsilon = 0$ et minorée par une fonction Δu nulle en $\varepsilon = 0$ et *dérivable* en $\varepsilon = 0$.

FIGURE A1

DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION VALEUR



Il en résulte que Δv est nécessairement dérivable en $\varepsilon = 0$ et que sa dérivée est égale à celle de Δu. On en déduit que v est dérivable en k_0 et que sa dérivée vérifie :

$$v'(k_0) = u'(c_0^*)f'(k_0).$$

Cette propriété est vérifiée pour tout niveau positif du stock de capital :

$$v'(k) = u'(\gamma(k))f'(k).$$

Monotonie des règles de décision optimales

On déduit de l'équation de Bellman que c_0^* est solution de

$$\max_{c_0}\left\{u(c_0) + \beta v\left[\frac{1}{1+n}(f(k_0) - c_0)\right]\right\}$$

ce qui implique : $u'(c_0^*) = \dfrac{\beta}{1+n}\, v'\left[\dfrac{1}{1+n}(f(k_0) - c_0^*)\right]$

$$u'(\gamma(k_0)) = \frac{\beta}{1+n} v'(w(k_0))$$

où $w(k_0) = \dfrac{1}{1+n}[f(k_0) - \gamma(k_0)] = k_1^*.$

Cette relation est vérifiée pour tout niveau positif de k_0. On en déduit que les deux fonctions $\gamma(k)$ et $w(k)$ varient dans le même sens (car les dérivées u' et v' sont strictement décroissantes).

Or la fonction:

$$(1 + n)\, w(k) + \gamma(k) = f(k)$$

est croissante. Donc les deux fonctions γ et w sont croissantes.

Étude de la trajectoire optimale

Des deux relations:

$$u'(c_t^*) = \frac{\beta}{1+n} v'(k_{t+1}^*) \text{ et } v'(k_{t+1}^*) = u'(c_{t+1}^*) f'(k_{t+1}^*)$$

on déduit la condition marginale (C_1) du § 1 et

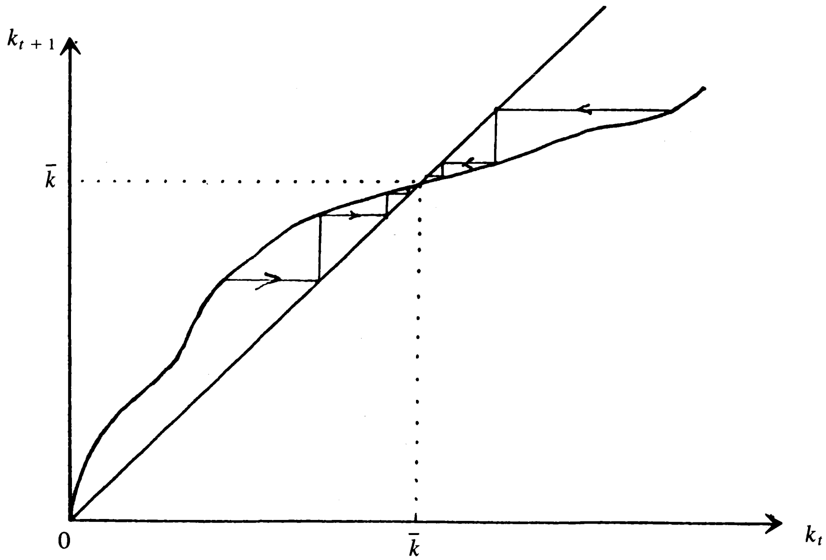
$$\frac{u'(\gamma(k_{t+1}^*))}{u'(\gamma(k_t^*))} = \frac{u'(c_{t+1}^*)}{u'(c_t^*)} = \frac{1+n}{\beta f'(k_{t+1}^*)} \text{ est } > 1 \ (< 1) \text{ si } k_{t+1}^* > \bar{k} (< \bar{k})$$

où $\bar{k}$ solution de $\beta f'(\bar{k}) = 1 + n$ est la solution stationnaire. La fonction $u'(\gamma(k))$ est décroissante car γ est croissante et u' est décroissante. On en déduit les propriétés:

$$k_{t+1}^* > \bar{k} \Rightarrow k_t^* > k_{t+1}^* > \bar{k} \text{ et } k_{t+1}^* < \bar{k} \Rightarrow k_t^* < k_{t+1}^* < \bar{k}.$$

FIGURE A2

DYNAMIQUE DE L'ACCUMULATION DU CAPITAL



Par conséquent, k^*_{t+1} est toujours compris entre k^*_t et $\bar{k}$, la dynamique est *monotone* et le stock de capital par tête k^*_t *converge vers l'équilibre stationnaire* $\bar{k}$. On peut représenter cette dynamique à l'aide de la fonction $w(k)$ qui détermine à chaque date le niveau optimal du stock de capital en fonction de son niveau à la date précédente:

$$k^*_{t+1} = w(k^*_t).$$

La fonction $w(k)$ est croissante et vérifie: $w(k) > k$ pour $k < \bar{k}$ et $w(k) < k$ pour $k > \bar{k}$.

Exemples

Dans l'exemple du § 1, $u(c) = \log c$ et $f(k) = bk^\alpha$, on a vu que la règle de consommation optimale est:

$$\gamma(k) = (1-\alpha\beta)bk^\alpha$$

On en déduit:

$$v'(k) = u'(\gamma(k))f'(k) = \frac{\alpha bk^{\alpha-1}}{(1-\alpha\beta)bk^\alpha} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\right) k^{-1}$$

$$v(k) = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \log k + v_1$$

où v_1 est une constante. Il est aussi possible de résoudre l'équation de Bellman en cherchant $v(k)$ sous la forme $v_0 \log k + v_1$ et on obtient:

$$v_1 = \frac{1}{1-\beta}\left[\log((1-\alpha\beta)b) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\log\left(\frac{\alpha\beta b}{1+n}\right)\right].$$

Pour le problème de *croissance optimale*, avec $\beta = 1$, l'objectif social est

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} (\log c - \log \hat{c}) \text{ sous la condition}$$

$$(1+n)k_{t+1} = bk_t^\alpha - c_t, \text{ avec } k_0 \text{ donné}$$

$\hat{c} = (1-\alpha)\, b\hat{k}^\alpha$ est la consommation de la règle d'or et $\hat{k} = \left(\frac{\alpha b}{1+n}\right)^{1/(1-\alpha)}$.

On vérifie dans ce cas que la fonction valeur est

$$v(k) = \frac{\alpha}{1-\alpha}(\log k - \log \hat{k}).$$

BIBLIOGRAPHIE

d'AUTUME, A. et Ph. MICHEL (1985), «Épargne, investissement et monnaie dans une perspective intertemporelle», *Revue Économique*, 36, pp. 243-290.

BLANCHARD, O.J. et S. FISCHER (1989), *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press, Cambridge (Mass).

CASS, D. (1965), «Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation», *Review of Economic Studies*, 32, pp. 233-240.

EISNER, R. et R.H. STROTZ (1963), «Determinants of Business Investment», ***in*** *Commission on Money and Credit, Impacts of monetary policy*, Prentice-Hall, pp. 60-138.

GALE, D. (1967), «On Optimal Development in a Multi-Sector Economy», *Review of Economic Studies*, 34, pp. 1-18.

HARROD, R.F. (1948), *Towards a Dynamic Economics*, MacMillan.

KOOPMANS, T.C. (1965), «On the Concept of Optimal Economic Growth», ***in*** *The Econometric Approach to Development Planning*, Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia, 28, pp. 225-287.

KOOPMANS, T.C. (1975), «Concepts of Optimality and Their Uses», Nobel Memorial Lecture reproduced ***in*** *Mathematical Programing*, 11, (1976), pp. 212-228.

LUCAS, R.E. (1967), «Adjustment Costs and the Theory of Suply», *Journal of Political Economy*, 75, n° 4, pp. 321-334.

MALINVAUD, E. (1965), «Croissances optimales dans un modèle macroéconomique» ***in*** *The Econometric Approach to Development Planning*, Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia, 28, pp. 301-378.

MICHEL, Ph. (1990-a), Criticism of the Social Time-Preference Hypothesis in Optimal Gowth, C.O.R.E. Discussion Paper n° 9039.

MICHEL, Ph. (1990-b), «Some Clarifications on the Transversality Condition», *Econometrica*, 58, pp. 705-723.

RAMSEY, F.P. (1928), «A Mathematical Theory of Saving», *Economic Journal*, 38, pp. 543-559.

WEITZMAN, M.L. (1973), «Duality Theory for Infinite Horizon Convex Models», *Management Science*, 19, pp. 783-789.