

# Modélisation de l'évolution thermique saisonnière du lac du Bourget

## Modelling the seasonal evolution of temperature in lake Bourget (France)

B. Vinçon-Leite, J. M. Mouchel and B. Tassin

Volume 2, Number 4, 1989

URI: <https://id.erudit.org/iderudit/705040ar>

DOI: <https://doi.org/10.7202/705040ar>

[See table of contents](#)

Publisher(s)

Université du Québec - INRS-Eau, Terre et Environnement (INRS-ETE)

ISSN

0992-7158 (print)

1718-8598 (digital)

[Explore this journal](#)

Cite this article

Vinçon-Leite, B., Mouchel, J. M. & Tassin, B. (1989). Modélisation de l'évolution thermique saisonnière du lac du Bourget. *Revue des sciences de l'eau / Journal of Water Science*, 2(4), 483–510. <https://doi.org/10.7202/705040ar>

Article abstract

In 1981, important works including the diversion of the main sewers entering Lake Bourget (one of the largest French alpine lakes) were undertaken in order to restore acceptable water quality standards. A detailed water quality survey will be performed in 1988-89 to complete the data base which already covers ten years. It should help in quantifying the evolution of the lake since the 1981 restoration works. The following activities will be undertaken as part of the survey : measurements within the water column, a study of the bottom sediments, the setting-up of sediment traps and the coupling of Landsat satellite images with measurements performed at some stations at the lake surface. A thermal and biogeochemical (phosphorus, oxygen, nitrogen) model will be used to summarise the information available and to forecast the evolution of water quality and the effect of other restoration measures. This paper reports on the first part of the study : the thermal modelling of Lake Bourget. A one-dimensional, vertical model based on the advection-diffusion equation is used. This equation is solved using a finite difference, semi-implicit method. The resolution grid has 145 layers (1 meter high) and the time step is 3 hours.

The heat fluxes at the air-water interface are computed with the three-hourly meteorological data collected at the Chambéry airport station, at the south end of the lake. The formulas are empirical and well established in the literature.

The expression for the eddy diffusion coefficients is based on a model of the lake of Geneva (Tassin, 1986). Different equations are used for the epilimnion, metalimnion and hypolimnion. In the epilimnion, the eddy diffusion coefficient expresses, by the Richardson number, the interaction between the shear stress of the wind and the water column stability. It depends on the value of the eddy diffusion in neutral conditions and on a stability function which includes the Richardson number. The vertical profile of the horizontal number. The vertical profile of the horizontal currents is computed following Ekman (1905) and Simons (1981) and is approximated by a gradient which decays exponentially.

In the metalimnion and the hypolimnion, the water layer stability is characterised by the Brünt-Väisälä frequency. In the hypolimnion, the eddy diffusion coefficient includes a corrective term, which is a function of depth; this term serves to reduce the dispersion near the bottom of the lake.

The thermal model also includes the mixing of the first layers by waves, the vertical advective transport induced by rivers inflows into the lake and by surface water withdrawal, as well as the thermal convection induced by local instabilities of the water column.

The eight parameters occurring in the heat flux equations and the eddy diffusion coefficients were estimated using data from 1981. The model has been validated over an 8 years period (1976-1983).

Results of the model agree with the observed seasonal and long-term evolutions of temperature in Lake Bourget. The main characteristics of the annual cycle are reproduced : set-up of the thermocline in spring, depth of the epilimnion, thermocline and metalimnion, value of the temperature gradient in the metalimnion, deepening of the thermocline in fall and winter overturn. Significant differences between observed and simulated temperatures occur in the metalimnion and they may be partially explained by internal waves which are dominant features at this level during summer stratification. This kind of mechanism cannot be accounted for in a one-dimensional vertical model.

Profiles and values of eddy diffusion coefficients calculated for Lake Bourget show a good agreement with those obtained in other large lakes from measurements of temperature or natural isotopes concentrations.

In general, the thermal model gives a good account of heat transport mechanisms in Lake Bourget. Accordingly, it provides acceptable dispersion coefficients which can be used to model the distribution of dissolved species in the lake.

# Modélisation de l'évolution thermique saisonnière du lac du Bourget (Savoie, France)

Modelling the seasonal evolution of temperature in lake Bourget (France)

---

B. VINÇON-LEITE, J.M. MOUCHEL, B. TASSIN

---

## RÉSUMÉ

Le lac du Bourget, l'un des principaux lacs alpins situé en France, a fait l'objet en 1981 d'importants travaux d'aménagement en vue de la restauration de la qualité de ses eaux. Une campagne de mesure portant sur les années 1988-89 a été mise en place afin de faire le point sur l'évolution du lac depuis la fin des travaux.

Un modèle thermique et biogéochimique (phosphore, oxygène, azote) sera utilisé pour synthétiser les connaissances, prévoir l'évolution de la qualité des eaux du lac ainsi que l'influence d'éventuels aménagements complémentaires. Les résultats présentés ici concernent la première étape du projet d'études, la modélisation thermique du lac du Bourget.

Le modèle utilisé est un modèle unidimensionnel, vertical, basé sur l'équation d'advection-diffusion.

L'expression des coefficients de dispersion selon la profondeur reprend celle d'un modèle du lac Léman (Tassin, 1986). Les équations utilisées distinguent l'épilimnion, le métalimnion et l'hypolimnion.

Les résultats présentés montrent que le modèle décrit de façon satisfaisante le cycle thermique annuel et l'évolution inter-annuelle des températures dans le lac du Bourget.

Les profils et les valeurs des coefficients de dispersion calculés sur le lac du Bourget sont proches de ceux obtenus sur d'autres lacs à partir de mesures fines de température ou de concentrations d'isotopes naturels.

Les coefficients de dispersion obtenus pourront donc être utilisés dans la modélisation des substances dissoutes dans le lac.

Mots clés : *Modèle thermique, lac, dispersion.*

## SUMMARY

In 1981, important works including the diversion of the main sewers entering Lake Bourget (one of the largest French alpine lakes) were undertaken in order to restore acceptable water quality standards. A detailed water quality survey will be performed in 1988-89 to complete the data base which already covers ten years. It should help in quantifying the evolution of the lake since the 1981 restoration works. The following activities will be undertaken as part of the survey : measurements within the water column, a study of the bottom sediments, the setting-up of sediment traps and the coupling of Landsat satellite images with measurements performed at some stations at the lake surface. A thermal and biogeochemical (phosphorus, oxygen, nitrogen) model will be used to summarise the information available and to forecast the evolution of water quality and the effect of other restoration measures. This paper reports on the first part of the study : the thermal modelling of Lake Bourget. A one-dimensional, vertical model based on the advection-diffusion equation is used. This equation is solved using a finite difference, semi-implicit method. The resolution grid has 145 layers (1 meter high) and the time step is 3 hours.

The heat fluxes at the air-water interface are computed with the three-hourly meteorological data collected at the Chambéry airport station, at the south end of the lake. The formulas are empirical and well established in the literature.

The expression for the eddy diffusion coefficients is based on a model of the Lake of Geneva (Tassin, 1986). Different equations are used for the epilimnion, metalimnion and hypolimnion. In the epilimnion, the eddy diffusion coefficient expresses, by the Richardson gradients number, the interaction between the shear stress of the wind and the water column stability. It depends on the value of the eddy diffusion in neutral conditions and on a stability function which includes the Richardson number. The vertical profile of the horizontal

number. The vertical profile of the horizontal currents is computed following Ekman (1905) and Simons (1981) and is approximated by a gradient which decays exponentially.

In the metalimnion and the hypolimnion, the water layer stability is characterised by the Brünt-Väisälä frequency. In the hypolimnion, the eddy diffusion coefficient includes a corrective term, which is a function of depth ; this term serves to reduce the dispersion near the bottom of the lake.

The thermal model also includes the mixing of the first layers by waves, the vertical advective transport induced by rivers inflows into the lake and by surface water withdrawal, as well as the thermal convection induced by local instabilities of the water column.

The eight parameters occurring in the heat flux equations and the eddy diffusion coefficients were estimated using data from 1981. The model has been validated over an 8 years period (1976-1983).

Results of the model agree with the observed seasonal and long-term evolutions of temperature in Lake Bourget. The main characteristics of the annual cycle are reproduced : set-up of the thermocline in spring, depth of the epilimnion, thermocline and metalimnion, value of the temperature gradient in the metalimnion, deepening of the thermocline in fall and winter overturn. Significant differences between observed and simulated temperatures occur in the metalimnion and they may be partially explained by internal waves which are dominant features at this level during summer stratification. This kind of mechanism cannot be accounted for in a one-dimensional vertical model.

Profiles and values of eddy diffusion coefficients calculated for Lake Bourget show a good agreement with those obtained in other large lakes from measurements of temperature or natural isotopes concentrations.

In general, the thermal model gives a good account of heat transport mechanisms in Lake Bourget. Accordingly, it provides acceptable dispersion coefficients which can be used to model the distribution of dissolved species in the lake.

Key-words : *Thermal model, lake, dispersion.*

---

## 1 - INTRODUCTION

---

Le lac du Bourget, d'une surface d'environ 43 km<sup>2</sup>, est le plus grand lac subalpin situé entièrement en France. Sa profondeur maximale de 145 mètres le classe parmi les lacs européens profonds.

Les principales caractéristiques du lac et de son bassin versant sont regroupées dans le tableau 1. La carte du bassin versant est représentée sur la figure 1 (CEMAGREF, 1985).

Tableau 1. - Principales caractéristiques du lac du Bourget et de son bassin versant.

Surface du lac	43.10 <sup>6</sup> m <sup>2</sup>
Profondeur maximale	145 m
Profondeur moyenne	80 m
Volume total	3,5.10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup>
Volume moyen de l'épilimnion	0,5.10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup>
Volume moyen de l'hypolimnion	3.10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup>
Superficie du bassin versant	550.10 <sup>6</sup> m <sup>2</sup>
Débit moyen annuel des tributaires	15 m <sup>3</sup> /s
Temps de séjour moyen de l'eau	7 ans

La dégradation de la qualité des eaux du lac du Bourget, notable à partir des années 60 a été enrayée par la mise en service, en 1981, d'un ceinturage qui détourne hors du bassin versant l'essentiel des effluents des villes de Chambéry, Aix-les-Bains et Le Bourget-du-Lac, soit environ 400 000 équivalents-habitants. Cependant, les importants travaux entrepris n'ont pas conduit à toute l'amélioration escomptée de la qualité des eaux.

Une campagne de mesure a été mise en oeuvre (1988-89) avec la collaboration de divers organismes scientifiques<sup>1</sup> et permettra de faire le point sur l'évolution du lac. Cette campagne comprend :

- des mesures de température, de concentration des éléments chimiques et de chlorophylle, à fréquence régulière sur toute la profondeur de la colonne d'eau,
- des analyses sédimentologiques,
- la pose de trappes à sédiment à différentes profondeurs,
- le couplage de mesures sur le lac avec le passage du satellite Landsat. On associera ainsi des images synoptiques du lac à des mesures ponctuelles.

Ces données récentes et le suivi antérieur du lac du Bourget vont représenter un ensemble de 10 années de mesures consécutives. Afin de synthétiser ces connaissances, de prévoir l'évolution de la qualité des eaux du lac ainsi que l'influence de possibles aménagements complémentaires (ceinturage complet du lac, siphonage des eaux profondes, ...), nous avons entrepris la modélisation thermique et biogéochimique du lac.

<sup>1</sup> Cellule technique du lac du Bourget ; CEMAGREF ; Université de Savoie ; Université de Genève.

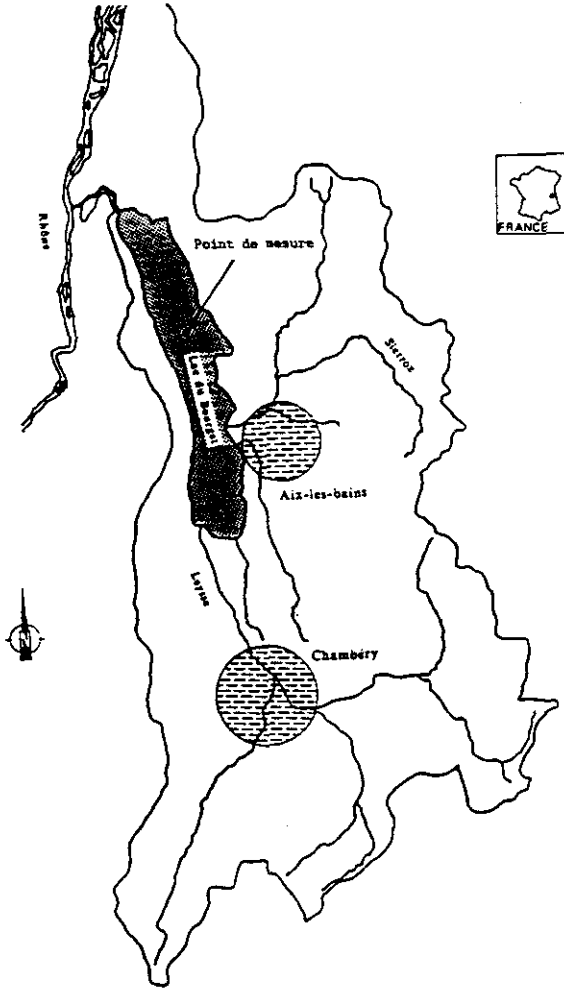


Figure 1. - Carte du bassin versant du lac du Bourget.

L'état trophique d'un lac est notablement influencé par son comportement physique. La température est un facteur déterminant du fonctionnement hydrodynamique et de la cinétique des réactions chimiques et des processus biologiques. C'est donc la première variable à modéliser. Ce sont les résultats du modèle thermique qui vont être présentés ici.

## 2 - DESCRIPTION DU MODELE THERMIQUE

En raison de la profondeur importante du lac du Bourget, de sa nette stratification estivale et de son temps de séjour long (environ 7 ans), les phénomènes prédominants surviennent selon l'axe vertical.

De plus, la localisation d'une unique station de mesure des variables météorologiques située à l'extrémité sud du lac et le suivi privilégié des températures au point de profondeur maximale justifient le choix d'un modèle unidimensionnel vertical qui représente l'évolution des températures dans la fosse centrale du lac.

Le modèle utilisé se base sur des formulations appliquées initialement avec succès au lac de Nantua (CHAHUNEAU, 1984) et modifiées pour le lac Léman (TASSIN, 1986).

Il s'agit d'un modèle de type "dispersif" par opposition aux modèles à bilan d'énergie (KRAUS et TURNER, 1967 ; NIILER et KRAUS, 1977).

Le transport de chaleur vertical est exprimé par l'équation d'advection-diffusion moyennée dans le plan horizontal :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = & \frac{1}{A(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ A(z)K(z, t) \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right] && \text{Transport par dispersion} \\ & - \frac{1}{A(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ A(z)W(z, t)T(z, t) \right] && \text{Transport par advection} \\ & + SS(z, t) && \text{Sources et puits de chaleur} \end{aligned} \quad (1)$$

Le lac est discrétisé en 145 couches de 1 mètre d'épaisseur. Cette épaisseur des couches, utilisée dans le modèle du lac Léman (TASSIN, 1986), s'est révélée satisfaisante pour la stabilité de la méthode numérique employée ainsi que pour limiter la diffusion numérique. Sur ce maillage, l'équation est résolue par une méthode aux différences finies semi-implicite non centrée.

Le pas de temps de calcul est de 3 heures, intervalle de temps correspondant à la structure temporelle des fichiers de données fournis par la Météorologie Nationale.

## 2-1 Calcul des échanges thermiques de surface

Le bilan thermique global du lac fait intervenir différents flux de chaleur, calculés à l'aide des moyennes trihoraires des données météorologiques relevées à la station de l'aéroport de Chambéry (Voglans) et de diverses lois physiques complétées par des formulations empiriques (JACQUET, 1983).

Les flux considérés, exprimés en Watts/m<sup>2</sup> sont les suivants :

- flux de radiations solaires (Qsol),
- flux de radiations atmosphériques infra-rouges (Qatm),
- flux radiatif provenant du plan d'eau (Qeau),
- flux de chaleur latente (Qlat),

- flux de chaleur sensible ( $Q_{sens}$ ),
- flux net ( $Q_{net}$ ).

Tous ces flux s'échangent à l'interface air-eau. Seul le flux de radiations solaires,  $Q_{sol}$ , pénètre en grande partie dans le plan d'eau où son intensité décroît selon la loi de Beer-Lambert.

Le flux de radiations solaires incident à la surface du plan d'eau dépend des radiations solaires reçues au sommet de l'atmosphère, calculées en tenant compte de la position du soleil au cours de la journée et de la latitude du lieu.

Ce flux incident de radiations solaires extra-terrestres est intercepté dans l'atmosphère par les nuages et en arrivant à la surface du plan d'eau une partie du rayonnement est réfléchiée en direction de l'atmosphère.

$$Q_{sol} = Q_{extra}(1 - 0,65Neb^2)(1 - Alb) \quad (2)$$

Le flux de radiations atmosphériques infra-rouges est décrit d'après la loi de Stefan-Boltzmann :

$$Q_{atm} = \epsilon_a \cdot \sigma \cdot T_a^4 \quad (3)$$

Selon la formule de Swinbank, l'émittance moyenne de l'atmosphère ne dépend que de la température de l'air :

$$\epsilon_a = 0,937 \cdot 10^{-5} \cdot T_a^2 \quad (4)$$

La réflexion par les nuages augmente les radiations atmosphériques incidentes. Finalement, la formulation du flux de radiations atmosphériques est donnée par :

$$Q_{atm} = (0,937 \cdot 10^{-5} \cdot T_a^2) \cdot \sigma \cdot T_a^4 (1 + 0,17Neb^2) \quad (5)$$

Le flux radiatif en provenance du plan d'eau s'exprime également par la loi de Stefan-Boltzmann :

$$Q_{eau} = \epsilon_w \cdot \sigma \cdot T_w^4 \quad (6)$$

Le flux de chaleur latente est dû à l'évaporation du plan d'eau. Il est fonction du flux d'eau évaporée,  $E$ , et de la chaleur latente de vaporisation (RYAN et HARLEMAN, 1971).

$E$  s'exprime selon la loi de Dalton modifiée pour prendre en compte l'effet du vent :

$$E = \rho_w \cdot A \cdot \text{Vent} \cdot (e_s - e_a) \quad (\text{Kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (7)$$

$e_s$ , pression de vapeur saturante à la température de l'eau de surface, est calculée selon la formule de Magnus-Tetens (WUNDERLICH, 1972) :

$$e_s = \exp \left[ 2,3026 \left( \frac{7,5 \cdot T_{surf}}{T_{surf} + 237,3} + 0,7858 \right) \right] \quad (\text{mb}) \quad (8)$$



La chaleur latente de vaporisation est donnée par la relation suivante :

$$L(T_{\text{surf}}) = 2,5 \cdot 10^6 - 2,36 \cdot 10^3 \cdot T_{\text{surf}} \quad (\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1}) \quad (9)$$

Finalement, le flux de chaleur latente s'exprime selon l'expression suivante :

$$Q_{\text{lat}} = A \cdot \rho_w \cdot \text{Vent} \cdot (e_s - e_a) \cdot L(T_{\text{surf}}) \quad (10)$$

Le flux de chaleur sensible correspond aux échanges de chaleur dûs aux phénomènes convectifs de surface. Cette quantité est liée au flux de chaleur latente par l'intermédiaire du rapport de Bowen, R (EPA, 1985).

$$Q_{\text{sens}} = R \cdot Q_{\text{lat}} \quad (11)$$

$$R = B \cdot \text{Patm} \cdot \frac{T_{\text{surf}} - T_{\text{air}}}{e_s - e_a} \quad (12)$$

Le flux de chaleur sensible s'écrit :

$$Q_{\text{sens}} = A \cdot B \cdot \rho_w \cdot \text{Vent} \cdot \text{Patm} \cdot (T_{\text{surf}} - T_{\text{air}}) \cdot L(T_{\text{surf}}) \quad (13)$$

## 2-2 Formulation de la dispersion verticale

L'équation d'advection-diffusion unidimensionnelle utilisée (1) inclut dans le transport par "dispersion", le transport par diffusion turbulente mais aussi d'autres déplacements verticaux tels que ceux induits par des hétérogénéités spéciales du champ de vitesse : circulation de Langmuir, upwellings ou downwellings, ... (CHAHUNEAU *et al.*, 1983).

La formulation empirique du coefficient de dispersion, variable en fonction de la profondeur et du temps, est celle du modèle thermique du Léman de TASSIN (1986).

La paramétrisation suit la structure thermique du lac : épilimnion, métalimnion et hypolimnion. Durant la période de l'année où il n'y a pas de stratification, la formulation employée dans l'épilimnion est valable pour tout le lac.

### 2-2-1 Epilimnion

L'établissement et la profondeur de la thermocline sont contrôlés par les effets antagonistes, d'une part, de l'énergie cinétique apportée par le vent à la surface du plan d'eau qui tend à approfondir l'épaisseur de la couche mélangée et d'autre part, de la stratification thermique qui s'oppose à l'homogénéisation des couches. L'effet du vent se traduit par la structure verticale des courants, représentée par le gradient vertical des vitesses horizontales. Un indicateur de la stabilité de la colonne d'eau est fourni par la valeur du gradient de densité. Le rapport de ces deux effets antagonistes est quantifié par le nombre de Richardson  $Ri$  :

$$Ri = - \frac{\left[ \frac{g}{\rho_w} \right] \left[ \frac{\partial \rho_w}{\partial z} \right]}{\left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2} \quad \begin{array}{l} \text{stabilité due au} \\ \text{gradient de densité} \end{array} \quad (14)$$

$\left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2$  cisaillement dû au vent

Le coefficient de dispersion verticale s'écrit en fonction d'un coefficient de référence établi en milieu non stratifié,  $K_0$ , et du nombre de Richardson,  $Ri$ , selon une expression de la forme (SIMONS, 1981 ; CHAHUNEAU, 1984 ; HENDERSON-SELLERS, 1984 ; BABAJIMOPOULOS, 1986) :

$$K = K_0 \cdot f(Ri) \quad (15)$$

$f(Ri)$  est une fonction de stabilité qui s'exprime généralement selon :

$$f(Ri) = (1 + \sigma Ri)^{p_1} \quad (16)$$

$\sigma$  et  $p_1$  sont deux paramètres d'ajustement.

Pour  $K_0$ , nous avons repris le calcul proposé par SIMONS (1981) pour le lac Ontario et TASSIN (1986) pour le lac Léman.

En milieu neutre,  $K_0$  s'exprime en fonction de la viscosité turbulente,  $A$  et du nombre de Prandtl,  $Pr$  :

$$K_0 = \frac{A}{Pr} \quad (17)$$

$A$  dépend du gradient des vitesses horizontales,  $\partial u / \partial z$ , et de la longueur de mélange,  $l$ .

$$A = l^2 \cdot (\partial u / \partial z) \quad (18)$$

La formulation du gradient des vitesses horizontales est un point important, mais néanmoins difficile à justifier théoriquement, du calcul des coefficients de dispersion verticale.

HENDERSON-SELLERS (1983), ainsi qu'un grand nombre d'auteurs (WALTERS *et al.*, 1978 ; Mc CORMICK *et al.*, 1981 ; BABAJIMOPOULOS *et al.*, 1986) utilisent un profil de vitesse à décroissance logarithmique :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_s^*}{k \cdot (z_{\text{surf}} - z)} \quad (19)$$

$$u_s^* = \left[ Cd \cdot \frac{\rho_a}{\rho_w} \cdot \text{Vent}^2 \right]^{1/2} \quad (20)$$

Une autre approche, plus rarement utilisée, est proposée par SIMONS (1981). Elle s'appuie sur les calculs d'EKMANN (1905) qui permettent d'exprimer le gradient des vitesses horizontales en fonction du gradient en surface et de la profondeur, à partir de l'hypothèse que la viscosité turbulente est proportionnelle au gradient vertical des vitesses horizontales :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \bigg|_{\text{surf}} \cdot \left[ 1 + \frac{z - z_{\text{surf}}}{D} \right]^2 \quad (21)$$

$$\text{avec } D = 5 \cdot \sqrt{(A_s/f)}.$$

$\partial u / \partial z$  s'annule pour une profondeur égale à  $(z_{\text{surf}} - D)$  et doit rester nul jusqu'au fond du lac. EKMANN précise donc que l'expression obtenue pour  $\partial u / \partial z$  n'est valable que pour les profondeurs inférieures à celle qui annule le gradient des vitesses horizontales. Afin d'obtenir une équation plus simple à utiliser dans les calculs, SIMONS remplace l'expression (21) par la formulation suivante, numériquement très proche pour les faibles profondeurs :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \bigg|_{\text{surf}} \cdot \exp \left[ \frac{z - z_{\text{surf}}}{D'} \right] \quad (22)$$

$$D' \text{ est pris égal à } 2 \cdot \sqrt{(A_s/f)}.$$

Pour estimer  $A_s$  et  $\frac{\partial u}{\partial z} \bigg|_{\text{surf}}$  en fonction de  $u_s^*$ , nous disposons des deux relations suivantes :

- l'équation 18 :

$$A_s = 1^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \bigg|_{\text{surf}}$$

- la condition limite en surface qui relie la vitesse de cisaillement, le gradient de vitesse et la viscosité turbulente :

$$\frac{\partial u}{\partial z} \bigg|_{\text{surf}} = \frac{u_s^{*2}}{A_s} \quad (23)$$

$$\text{d'où } A_s = 1 \cdot u_s^* \quad (24)$$

Par ailleurs, la valeur du paramètre 1, est obtenue à partir du modèle de fermeture de la turbulence développé par MELLOR et DURBIN (1975) et repris par SIMONS (1981).

$$1 = \frac{5}{4} \cdot \delta \cdot \sqrt{(A_s/f)} \quad (25)$$

$\delta$  est un paramètre d'ajustement de l'ordre de 0,1.

En regroupant les équations (22), (23), et (25), et en considérant que le nombre de Prandtl vaut 1 en milieu neutre, on obtient donc l'expression suivante de  $Ko$  :

$$Ko = \frac{\epsilon}{f} \cdot u_s^{*2} \cdot \exp \left[ \frac{z-z_{surf}}{D'} \right] \quad (26)$$

avec  $\epsilon = \frac{25}{16} \cdot \delta^2$

L'expression du gradient de vitesse horizontale doit également être portée dans celle du nombre de Richardson qui s'écrit donc :

$$Ri = \frac{g}{\rho_w} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \left[ \frac{\epsilon}{f} \right]^2 \cdot \exp \left[ \frac{-2(z-z_{surf})}{D'} \right] \quad (27)$$

Pour l'épilimnion jusqu'à la thermocline, c'est-à-dire jusqu'à la profondeur où le gradient de densité de la colonne d'eau est maximal, on écrit finalement le coefficient de dispersion verticale ainsi :

$$K_{\text{épi}} = \frac{\epsilon}{f} \cdot u_s^{*2} \cdot (1 + \sigma Ri)^{p_1} \cdot \exp \left[ \frac{z-z_{surf}}{D'} \right] \quad (28)$$

### 2-2-2 Métalimnion et hypolimnion

En dessous de la thermocline qui agit comme une barrière, l'effet direct du vent sur le mélange des couches est négligeable. On a donc recours à une autre formulation des coefficients de dispersion dans le métalimnion et l'hypolimnion.

La fréquence de Brünt-Väisälä liée au gradient de densité,  $N^2$  (équation 29), est utilisée pour caractériser la stabilité d'une couche par rapport à l'interface physique supérieure : thermocline ou bas du métalimnion (JASSBY et POWELL, 1975 ; WALTERS et al., 1978).

Entre la thermocline et le bas du métalimnion, le coefficient de dispersion est calculé en fonction de sa valeur à la thermocline et du rapport des fréquences de Brünt-Väisälä à la thermocline et à la profondeur considérée (équation 30). Le bas du métalimnion est défini dans les calculs comme la profondeur où le gradient de densité devient inférieur à  $10^{-5} \text{ Kg.m}^{-4}$ .

$$N^2 = - \left[ \frac{g}{\rho_w} \right] \cdot \left[ \frac{\partial \rho_w}{\partial z} \right] \quad (29)$$

$$K_{\text{méta}} = \alpha \cdot K_{th} \cdot \left[ \frac{N_{th}^2}{N(z)^2} \right]^{p_2} \quad (30)$$

$\alpha$  et  $p_2$  sont des paramètres d'ajustement.

Dans l'hypolimnion, à proximité du fond du lac, la dispersion diminue graduellement bien que les gradients de densité diminuent également. On introduit dans l'expression du coefficient de dispersion un terme correctif,  $f_c$ , qui décroît linéairement quand on se rapproche du fond.  $f_c$  s'exprime par le rapport de la cote du point au-dessus du fond à la hauteur totale de l'hypolimnion (TASSIN, 1986).

$$K_{\text{hypo}} = f_c \cdot K_{\text{méta}} \cdot \left[ \frac{N_{\text{méta}}^2}{N(z)^2} \right]^{p^2} \quad (31)$$

$p^2$  : paramètre d'ajustement

$K_{\text{th}}$  : coefficient de dispersion à la thermocline

$N_{\text{th}}^2$  : fréquence de Brünt-Väisälä à la thermocline

$K_{\text{méta}}$  : coefficient de dispersion au bas du métalimnion

$N_{\text{méta}}^2$  : fréquence de Brünt-Väisälä au bas du métalimnion

$N^2(z)$  : fréquence de Brünt-Väisälä à la profondeur  $z$

$$f_c = \frac{z}{z_{\text{méta}}}$$

## 2-3 Calculs annexes

### 2-3-1 Couche d'eau mélangée par les vagues

La hauteur d'eau bien mélangée par les vagues est calculée à chaque pas de temps en fonction de la vitesse du vent et du fetch selon la formulation empirique de SMITH (1979), basée sur des résultats obtenus pour les grands lacs des Etats-Unis. Le fetch est pris constant tout au long de l'année et égal à la moitié de la longueur du lac.

### 2-3-2 Vitesse d'advection verticale

La vitesse d'advection verticale,  $W(z,t)$ , exprimée dans l'équation (1), est due à l'entrée des affluents dans le lac et à la sortie de l'eau à l'exutoire. Etant donné le temps de séjour des eaux dans le lac du Bourget, le modèle est peu sensible à la façon dont les apports sont pris en compte. De ce point de vue, la plupart des lacs naturels et les retenues sont très différents. Le seul facteur important pour le modèle du lac du Bourget est de déterminer si les eaux pénètrent au-dessous ou au-dessus de la thermocline.

L'entrée des deux affluents principaux se fait à une même profondeur calculée en fonction de la densité déterminée par leur température moyenne. La zone d'entrée s'étend sur une épaisseur fixée a priori, de part et d'autre de la couche où l'eau du lac présente la même densité. On calcule la vitesse d'advection verticale en divisant le débit d'entrée par la superficie du lac à la profondeur d'entrée des affluents (TASSIN, 1986).

### 2-3-3 Convection thermique

Un refroidissement rapide des eaux superficielles, notamment en fin de journée ou en automne, entraîne l'augmentation de la densité des couches de surface. Des profils de densité instables apparaissent et provoquent des mouvements de convection verticale très rapides qui conduisent à une homogénéisation des couches instables.

---

## 3 - RÉSULTATS

---

Les données utilisées pour l'ajustement des paramètres du modèle et pour la vérification des résultats ont été recueillies par l'Institut National de la Recherche Agronomique (1976 à 1978) et par le Centre du Machinisme Agricole du Génie Rural des Eaux et des Forêts (1978 à 1983) au point de profondeur maximale du lac (145 mètres - voir figure 1).

### 3-1 Calibration

La calibration a été réalisée d'après les données de l'année 1981.

Le sous-modèle météorologique nécessite l'ajustement de deux paramètres :

- A : calcul du flux de chaleur latente
- B : calcul du flux de chaleur sensible

Le calcul des coefficients de dispersion verticale demande l'ajustement de six paramètres :

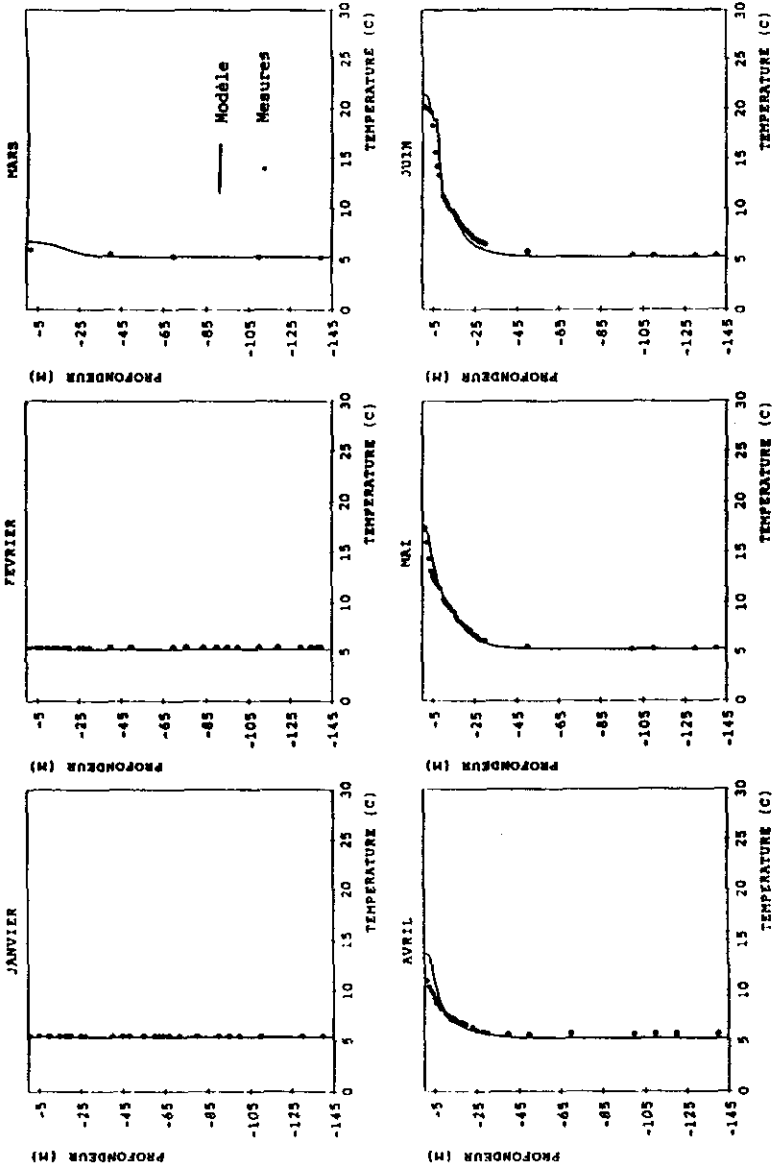
- $\sigma$  et  $p_1$  : calcul de la fonction de stabilité,  $f(Ri)$
- $\alpha$  : calcul de K dans le métalimnion
- $p_2$  : calcul de K dans le métalimnion et l'hypolimnion
- $\delta$  et  $C\delta$  : calcul de K dans l'épilimnion

La calibration a été réalisée sans faire appel à une méthode automatique afin de mieux suivre les réponses du modèle aux variations de chaque paramètre.

Les valeurs retenues pour les paramètres ainsi que celles qui avaient été utilisées pour le modèle du lac Léman (TASSIN, 1986) figurent dans le tableau 2.

12 profils mensuels (figure 2) permettent une évaluation visuelle de l'ajustement.

La figure 3 concerne l'évolution saisonnière des températures au cours de l'année 1981, à quelques profondeurs significatives du cycle thermique du lac du Bourget.



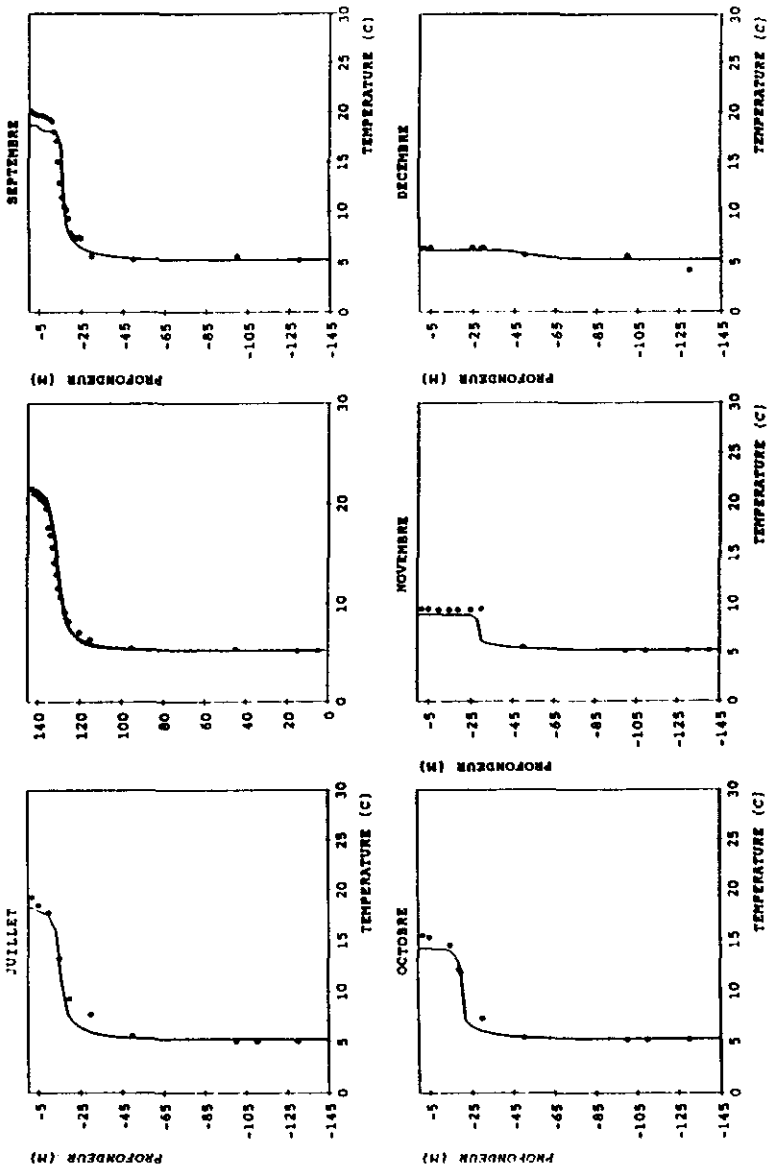
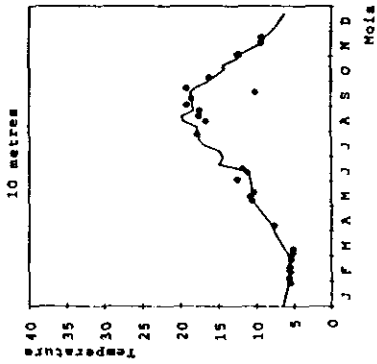
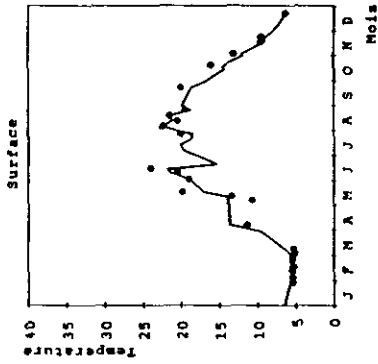
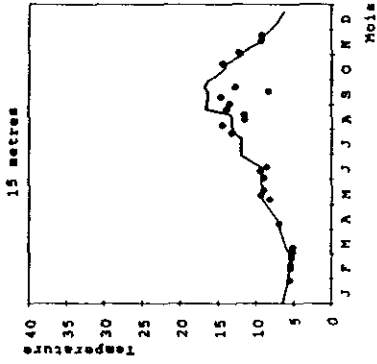
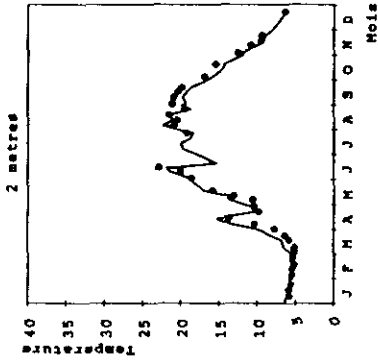
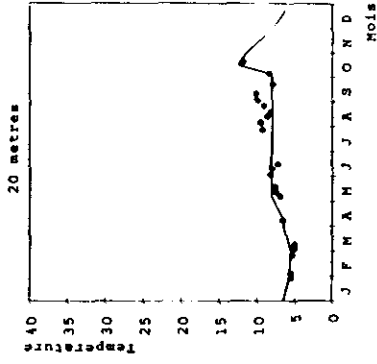
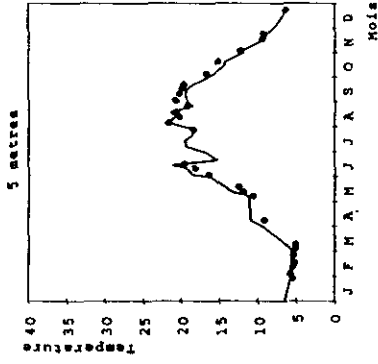


Figure 2. - Calibration - 1981.





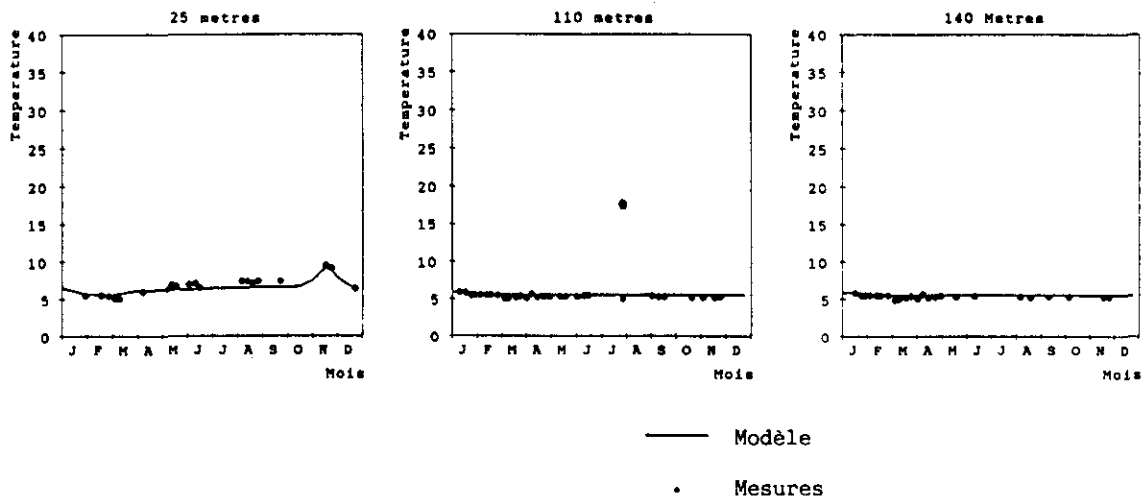


Figure 3. - Evolution des températures au cours de l'année 1981.

Tableau 2. - Valeurs des 8 paramètres du modèle thermique pour le lac du Bourget et pour le lac Léman (TASSIN, 1986).

	Lac du Bourget	Lac Léman
A	$10.10^{-10}$ (hiver) à $40.10^{-10}$ (été)	$16.10^{-10}$
B	$6,7.10^{-4}$	$6,7.10^{-4}$
$\sigma$	7,7	7,7
$p_1$	- 1	- 1
$P_2$	0,67	0,67
$\alpha$	0,35	0,35
Cd	$1,8.10^{-3}$	$1,15.10^{-3}$
$\delta$	$9.10^{-2}$	$10^{-1}$

### 3-2 Vérification

L'importance de la base de données existant sur le lac du Bourget a permis la vérification du modèle thermique sur une période, particulièrement longue, de 8 années comprises entre 1976 et 1983. On a ainsi pu s'assurer que le bilan thermique réalisé par le sous-modèle météorologique restait équilibré sur une longue période et que le modèle était numériquement stable.

L'évolution des températures en surface, dans le métalimnion et au fond du lac est montrée sur la figure 4 (4.a, 4.b, 4.c et 4.d).

### 3-3 Discussion

Les résultats présentés montrent une adéquation satisfaisante entre les températures calculées et celles mesurées dans le lac, en particulier dans l'épilimnion. Il faut préciser que l'on compare des mesures instantanées à des valeurs calculées moyennes journalières. Les variations thermiques des eaux de surface peuvent être rapides et importantes, de l'ordre de 2 degrés pour l'amplitude journalière des températures calculées par le modèle, et expliquer certains écarts.

Les principales caractéristiques de l'évolution saisonnière des températures dans le lac du Bourget sont, dans l'ensemble, correctement reproduites :

- établissement de la thermocline au printemps,
- profondeur de l'épilimnion, de la thermocline et du métalimnion,
- valeur du gradient de température dans le métalimnion,
- érosion de la thermocline à l'automne,
- brassage hivernal des eaux.

La description des températures dans le métalimnion (figure 4.c) est moins satisfaisante. Les écarts observés pourraient s'expliquer par l'existence d'ondes internes dont on connaît l'importance dans le métalimnion des lacs en période de stratification (IMBODEN *et al.*, 1983). Ces phénomènes d'oscillations de la masse d'eau surviennent à la suite de coups de vent et peuvent causer des fluctuations de température de plusieurs degrés à une profondeur donnée. HOLLAN et SIMONS (1978) ont mesuré des variations de température d'environ 2 degrés dans le lac de Constance. PREMAZZI et ROSSI (1984) enregistrent des variations de température de l'ordre de 5 degrés dans le métalimnion du lac de Lugano. Un modèle unidimensionnel vertical ne permet pas de rendre compte de tels mécanismes de structure beaucoup plus complexe et les résultats qu'il donne pour cette région du lac sont moins fiables.

Les profils des coefficients de dispersion verticale (figure 5.a, 5.b, 5.c et 5.d) n'ont pu être vérifiés, faute de mesures réalisées dans le lac. Si les coefficients calculés par le modèle dans l'épilimnion et le métalimnion sont certainement corrects puisqu'ils permettent de simuler l'évolution complexe des températures dans la partie supérieure du lac, la validité des valeurs que nous avons calculées dans l'hypolimnion ne peut pas être vérifiée directement, avant que ne soit entreprise la simulation d'autres variables que la température, qui elles, montrent des gradients notables dans les couches profondes.

Toutefois, les profils calculés sur le lac du Bourget en période de stratification correspondent bien à ceux obtenus avec des coefficients établis à partir de gradients mesurés de températures ou d'isotopes naturels tels le Radon-222 (IMBODEN *et al.*, 1983 ; NYFFELER *et al.*, 1983 ; PREMAZZI et ROSSI, 1984).

L'augmentation des valeurs sous la thermocline, la diminution à proximité du fond ont été observées dans les lacs étudiés (figure 6).

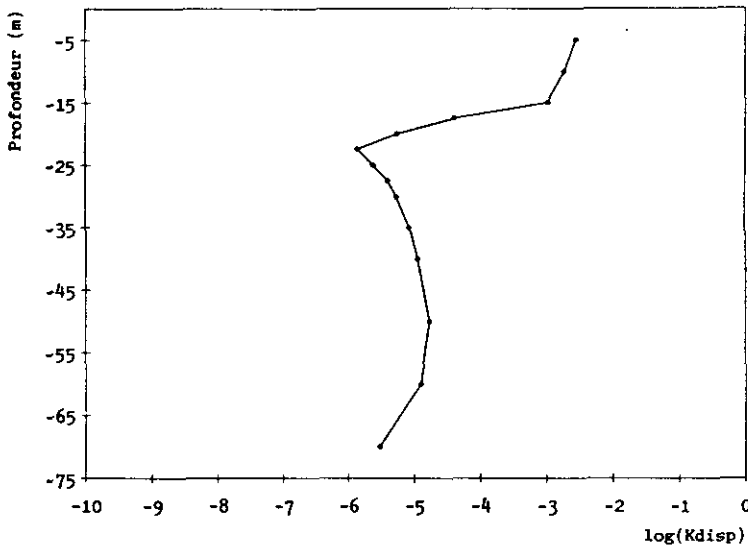


Figure 6. - Coefficients de dispersion ( $m^2/s$ ) dans le lac de Biemme en juillet 1978. (D'après NYFFELER *et al.*, 1983).

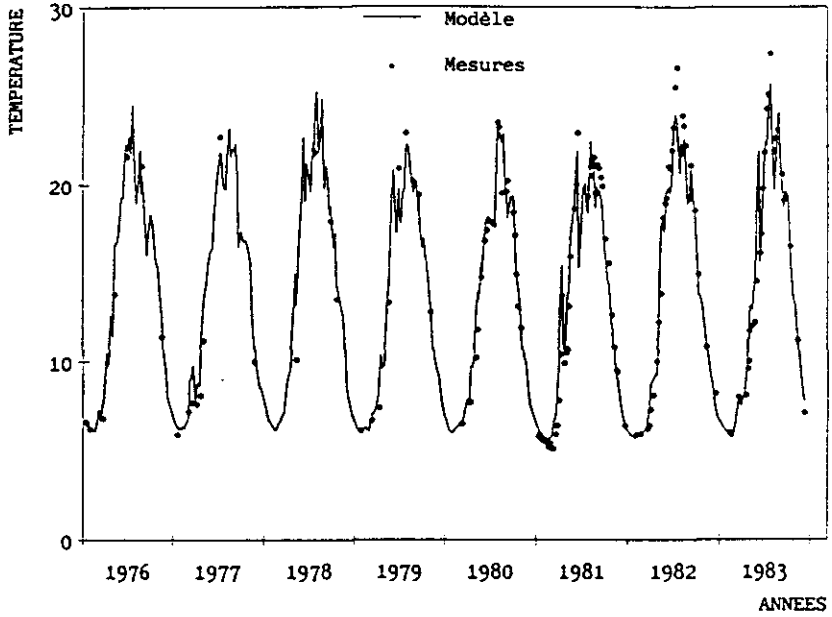


Figure 4.a - Evolution de la température à 2 mètres de 1976 à 1983.

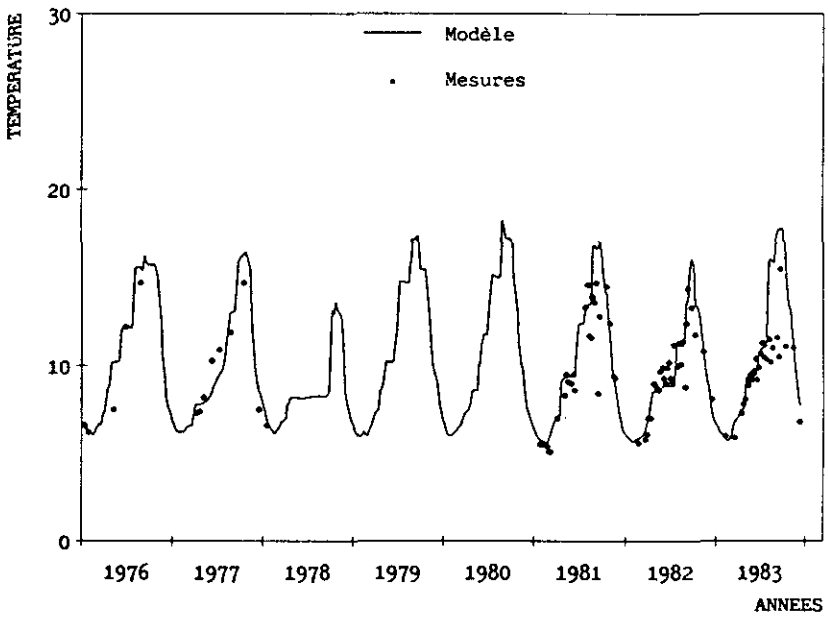


Figure 4.b - Evolution de la température à 15 mètres de 1976 à 1983.

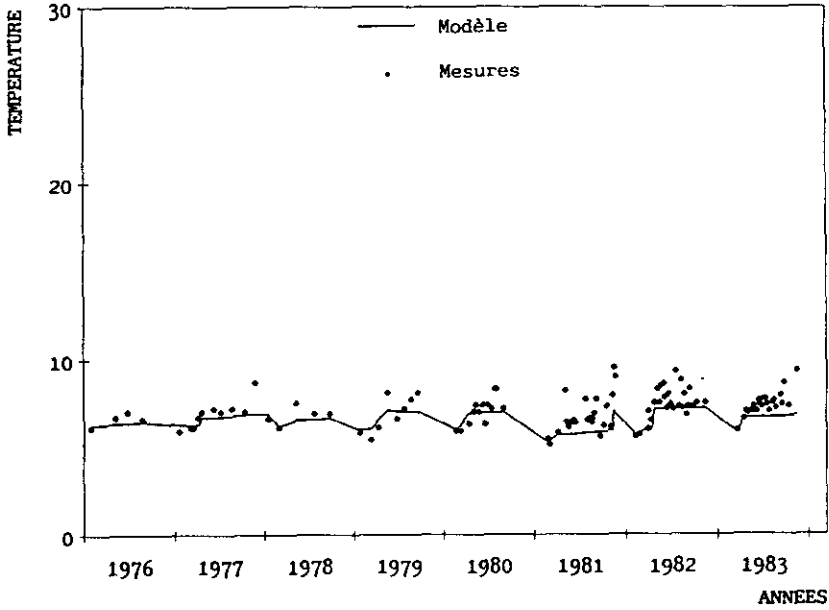


Figure 4.c - Evolution de la température à 30 mètres de 1976 à 1983.

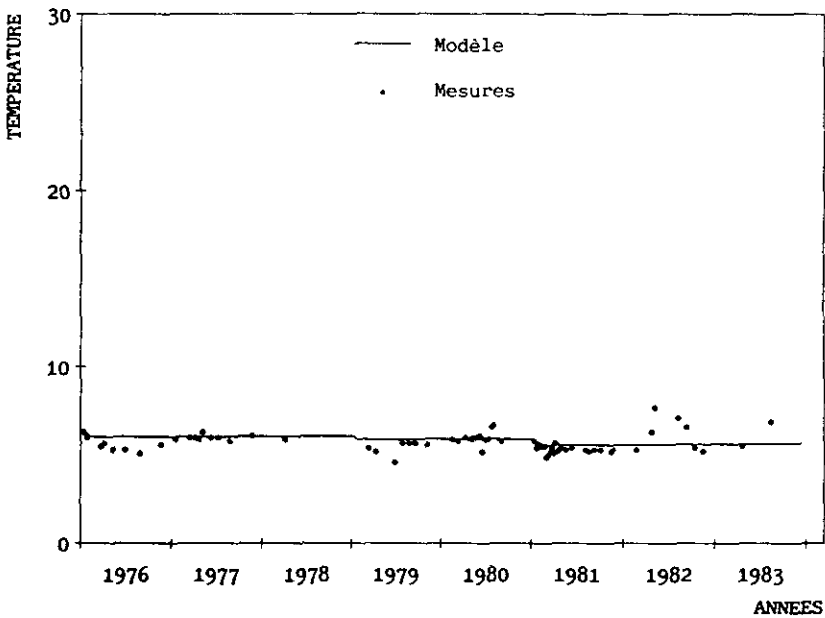


Figure 4.d - Evolution de la température à 140 mètres de 1976 à 1983.

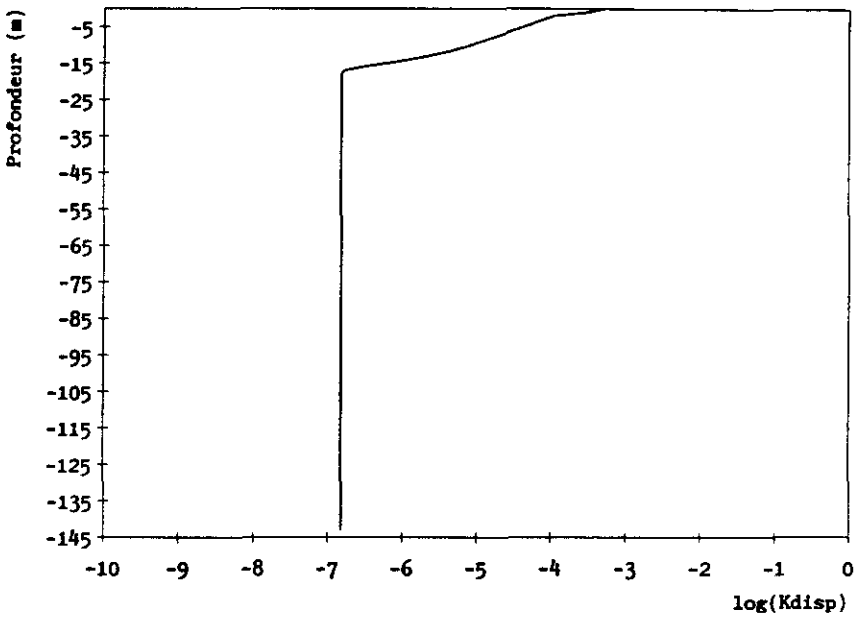


Figure 5.a - Coefficients de dispersion verticale (m<sup>2</sup>/s) - janvier 1981.

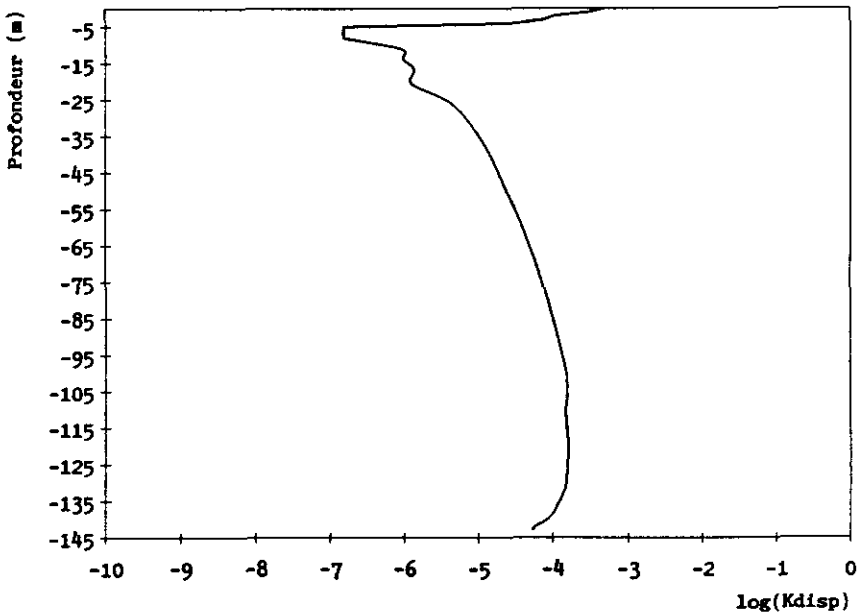


Figure 5.b - Coefficients de dispersion verticale (m<sup>2</sup>/s) - juin 1981.

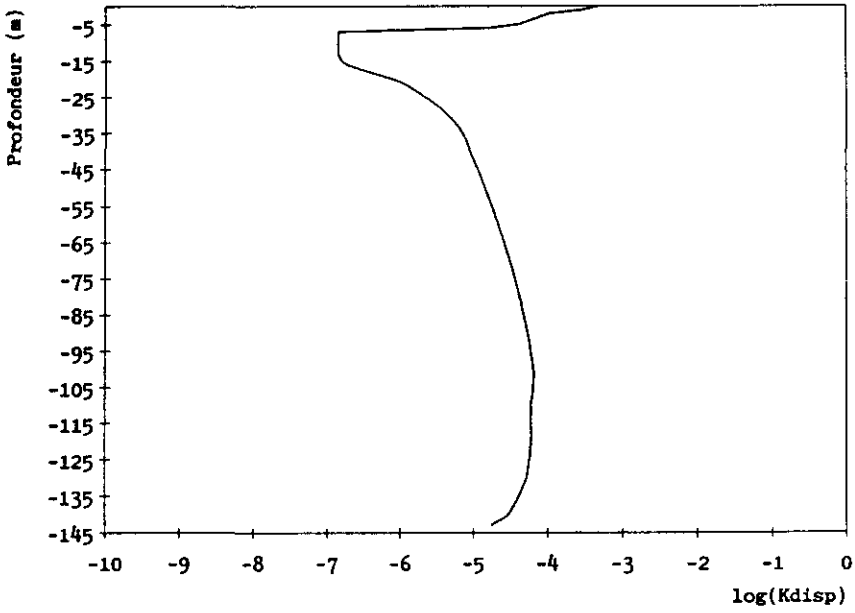


Figure 5.c - Coefficients de dispersion verticale ( $m^2/s$ ) - août 1981.

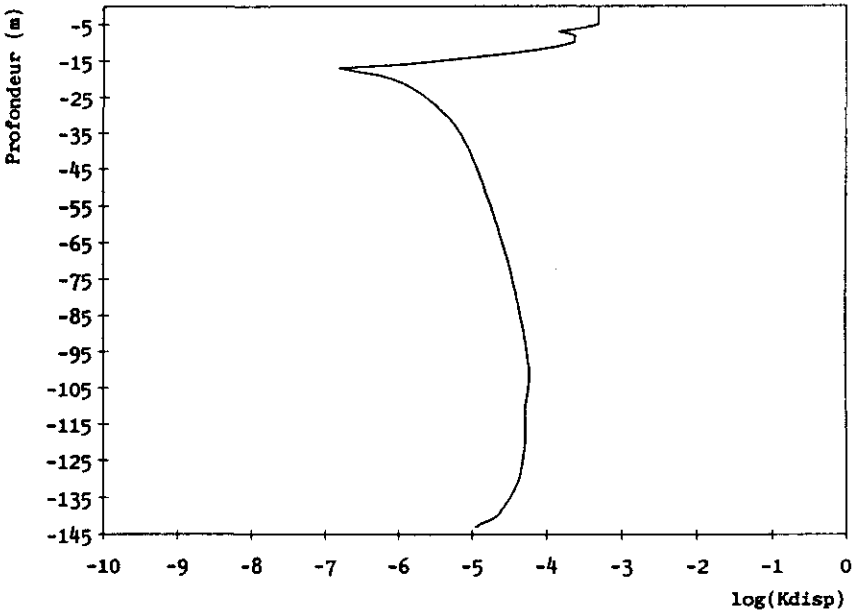


Figure 5.d - Coefficients de dispersion verticale ( $m^2/s$ ) - septembre 1981.



Outre cet accord qualitatif, on note que les ordres de grandeur des coefficients calculés au lac du Bourget sont analogues à ceux établis sur d'autres lacs, à partir de mesures.

Les études approfondies des mécanismes de mélange dans les lacs Baldegg (IMBODEN *et al.*, 1983) et Léman (LEMMIN *et al.*, 1988) ont néanmoins montré que les phénomènes de dispersion dans l'hypolimnion sont complexes, souvent dominés en période de stratification par des ondes internes et des courants de fond. Les coefficients de dispersion calculés par le modèle doivent donc permettre de représenter, à grande échelle afin d'obtenir la stabilisation des phénomènes locaux, les principales caractéristiques des phénomènes de mélange qui se produisent dans le lac. Mais il est probable que certains mécanismes, particulièrement durant la stratification estivale, ne sont pas pris en compte.

Les valeurs des paramètres intervenant dans l'expression des coefficients de dispersion, ajustées d'après les données du lac Léman (TASSIN, 1986) ou celles du lac du Bourget sont extrêmement proches. Cette comparaison indique que la paramétrisation utilisée est facilement transposable pour des lacs naturels profonds. Dans le cas du lac du Bourget, la valeur du paramètre A, présent dans le calcul du flux de chaleur latente, varie en fonction de la saison. L'ajustement de ce paramètre dépend en fait de la représentativité des stations de mesures météorologiques dont les valeurs sont utilisées pour calculer les échanges de chaleur sur le lac et des spécificités météorologiques de chaque lac.

---

#### 4 - CONCLUSION

---

Le modèle thermique proposé décrit de façon satisfaisante l'évolution saisonnière et interannuelle des températures dans le lac du Bourget.

La formulation empirique de la dispersion, précédemment utilisée dans la modélisation du lac Léman, confirme sa validité. Cette paramétrisation confère son originalité au modèle utilisé par la spécificité de l'expression du coefficient de dispersion dans l'épilimnion, le métalimnion et l'hypolimnion. De plus, la paramétrisation du gradient de vitesse horizontale faisant appel à la théorie d'Ekman se distingue de celles employées dans la plupart des modèles dispersifs de lacs. L'accord avec les valeurs et les profils verticaux rencontrés sur d'autres lacs permet de penser que les coefficients calculés par le modèle représentent bien les phénomènes de transport de chaleur dans le lac.

L'étape suivante de la modélisation de la qualité des eaux du lac du Bourget concernera le couplage du modèle thermique à un modèle biogéochimique dont les variables sont le phosphore, l'oxygène et l'azote.

Les coefficients de dispersion calculés seront utilisés dans le modèle biogéochimique pour représenter le transport des éléments dissous. La qualité des résultats obtenus, en particulier dans les régions où on observe de forts gradients de concentration (orthophosphates ou oxygène au fond de l'hypolimnion en fin de stratification estivale, par exemple) permettra de vérifier l'exactitude des coefficients de dispersion.

## REMERCIEMENTS

Ce programme d'études bénéficie de l'aide financière du Syndicat Intercommunal du lac du Bourget, du Syndicat Intercommunal de l'Agglomération de Chambéry et de l'Agence Financière de Bassin Rhône-Méditerranée-Corse.

La campagne de mesure 1988-1989 est réalisée grâce à l'appui technique de la Cellule Technique du lac du Bourget.

Nous remercions l'INRA et le CEMAGREF d'avoir mis leurs données à notre disposition.

## LISTE DES NOTATIONS ET SYMBOLES UTILISÉS

A	: paramètre de calage (calcul du flux de chaleur latente) ( $\text{mb}^{-1}$ )
A	: viscosité turbulente ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
A <sub>s</sub>	: viscosité turbulente en surface ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
A(z)	: superficie de la section horizontale du lac ( $\text{m}^2$ )
Alb	: albédo du plan d'eau
B	: paramètre de calage (calcul du flux de chaleur sensible) ( $^{\circ} \text{C}^{-1}$ )
Cd	: coefficient de frottement du vent (sans dimension)
E	: flux d'eau évaporée ( $\text{Kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ )
e <sub>a</sub>	: pression de vapeur de l'air (mb)
e <sub>s</sub>	: pression de vapeur saturante à la température de l'eau en surface (mb)
f	: paramètre de Coriolis ( $\text{s}^{-1}$ )
g	: accélération de la gravité ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )
K(z, t)	: coefficient de dispersion verticale ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
K <sub>o</sub>	: coefficient de dispersion en milieu neutre ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
K <sub>méta</sub>	: coefficient de dispersion en bas du métalimnion ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
K <sub>th</sub>	: coefficient de dispersion à la thermocline ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )
l	: longueur de mélange (m)
L(Tsurf)	: chaleur latente de vaporisation à la température de surface de l'eau ( $\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1}$ )
Neb	: nébulosité (1/10)
N <sup>2</sup> <sub>méta</sub>	: fréquence de Brünt-Väisälä au bas du métalimnion ( $\text{s}^{-2}$ )
N <sup>2</sup> <sub>th</sub>	: fréquence de Brünt-Väisälä à la thermocline ( $\text{s}^{-2}$ )

---

$N(\bar{z})$	: fréquence de Brünt-Väisälä à la profondeur $z$ ( $s^{-2}$ )
$p_1$	: paramètre de calage (fonction de stabilité)
$p_2$	: paramètre de calage (coefficient de dispersion dans le métalimnion et l'hypolimnion)
$P_{atm}$	: pression atmosphérique (mb)
$Pr$	: nombre de Prandtl (sans dimension)
$Q_{atm}$	: flux de radiations atmosphériques ( $W.m^{-2}$ )
$Q_{eau}$	: flux de radiations émises par le plan d'eau ( $W.m^{-2}$ )
$Q_{extra}$	: flux de radiations solaires au sommet de l'atmosphère ( $W.m^{-2}$ )
$Q_{lat}$	: flux de chaleur latente ( $W.m^{-2}$ )
$Q_{sens}$	: flux de chaleur sensible ( $W.m^{-2}$ )
$Q_{sol}$	: flux de radiations solaires ( $W.m^{-2}$ )
$R$	: rapport de Bowen (sans dimension)
$Ri$	: nombre de Richardson de gradient (sans dimension)
$SS(z, t)$	: sources et puits de chaleur à la profondeur $z$ et au temps $t$ ( $^{\circ} C.s^{-1}$ )
$t$	: temps (s)
$T(z, t)$	: température ( $^{\circ} C$ )
$T_a$	: température absolue de l'air au-dessus du plan d'eau ( $^{\circ} K$ )
$T_{air}$	: température de l'air ( $^{\circ} C$ )
$T_{surf}$	: température de l'eau en surface ( $^{\circ} C$ )
$T_w$	: température absolue de l'eau en surface ( $^{\circ} K$ )
$Vent$	: vitesse du vent ( $m.s^{-1}$ )
$u_s^*$	: vitesse de cisaillement du vent en surface ( $m.s^{-1}$ )
$W(z, t)$	: vitesse d'advection verticale ( $m.s^{-1}$ )
$z$	: profondeur, l'axe est orienté positivement vers le haut, l'origine est au fond du lac (m)
$Z_{surf}$	: cote de la surface du lac (m)
$\alpha$	: paramètre d'ajustement (coefficient de dispersion dans le métalimnion)
$\delta$	: paramètre d'ajustement (calcul de la longueur de mélange)
$\epsilon_a$	: émittance moyenne de l'atmosphère
$\epsilon_w$	: émittance de l'eau
$\partial \rho / \partial z$	: gradient vertical de densité ( $Kg.m^{-4}$ )
$\partial u / \partial z$	: gradient vertical des vitesses horizontales ( $s^{-1}$ )
$\kappa$	: constante de Von Karman (sans dimension)
$\rho_a$	: masse spécifique de l'air ( $Kg.m^{-3}$ )
$\rho_w$	: masse spécifique de l'eau ( $Kg.m^{-3}$ )
$\sigma$	: constante de Stefan-Boltzmann ( $5.67.10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$ )
$\sigma$	: paramètre de calage (fonction de stabilité)

---

 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES
 

---

- BABAJIMOPOULOS C., PAPADOPOULOS F. (1986). Mathematical prediction of thermal stratification of lake Ostrove (Vergoritis), Greece. *Water Resour. Res.*, 22 : 1590-1596.
- CEMAGREF (1985). *Lac du Bourget - Synthèse des études GEMAGREF. Rapport DQPP.* Lyon. France. (15 p.).
- CHAHUNEAU F., DES CLERS S., MEYER J.A. (1983). Analysis of prediction uncertainty : Monte Carlo simulation and non-linear least-squares estimation of a vertical transport submodel for lake Nantua. In : M.B. Bech and G. Van Straten (Ed.), *Uncertainty and forecasting of water quality*, Springer Verlag, 183-203.
- CHAHUNEAU F. (1984). Modélisation saisonnière du lac de Nantua. *Verh. Internat. Limnol.*, 22 : 125-131.
- EKMAN V.W. (1905). On the influence of the earth's rotation on ocean currents. *Ark. Met. Astr. Fys.*, 2 (11) : 1-52.
- EPA (1985). Surface heat budget. In : *Rates, Constants, and Kinetics Formulations in Surface Water Quality Modeling (Second Edition)*, Athens, p. 61-76.
- HENDERSON-SELLERS B., Mc CORMICK M.J., SCAVIA D. (1983). A comparison of the formulation for eddy diffusion in two one-dimensional stratification models. *Appl. Math. Modeling*, 7 : 212-215.
- HENDERSON-SELLERS B. (1984). Development and application of "U.S.E.D." : a hydroclimate lake stratification model. *Ecological Modeling*, 21 : 233-246.
- HOLLAN E., SIMONS T.J. (1978). Wind-induced changes of temperature and currents in lake Constance. *Arch. Met. Geoph. Biokl.*, 27 : 333-373.
- IMBODEN D.M., LEMMIN U., JOLLER T., SCHURTER M. (1983). Mixing processes in lakes : mechanisms and ecological relevance. *Schweiz. Z. Hydrol.*, 45 : 11-44.
- JACQUET J. (1983). Simulation of thermal regime of rivers. In : G.T. Orlob (Ed.), *Mathematical modeling of water quality : streams, lakes and reservoirs*. Wiley - IIASA. (170-175).
- JASSBY A., POWELL T. (1975). Vertical patterns of eddy diffusion during stratification in Castle lake, California. *Limnol. Oceanogr.*, 20 : 530-543.
- KRAUS E.B., TURNER J.S. (1967). A one-dimensional model of the seasonal thermocline - I. A laboratory experiment and its interpretation. II. The general theory and its consequences. *Tellus*, 14 : 88-105.
- LEMMIN U., PERRINJAQUET C., GRAF W. (1988). Etude de la variation saisonnière des phénomènes de mélange dans l'hypolimnion du Léman - Campagne 1987. In : *Rapports sur les études et recherches entreprises dans le bassin lémanique*. CIPEL, Lausanne, Suisse. 85-95.
- Mc CORMICK M.J., SCAVIA D. (1981). Calculation of vertical profiles of lake-averaged temperature and diffusivity in lake Ontario and Washington. *Water Resour. Res.*, 17 : 305-310.
- MELLOR G.L., DURBIN P.A. (1975). The structure and dynamics of the ocean surface mixed layer. *J. Phys. Ocean.*, 5 : 718-728.
- NIILER P.P., KRAUS E.B. (1977). One-dimensional model of the upper ocean. In : E.B. Kraus (Ed.), *Modeling and prediction of the upper layers of the ocean*. Pergamon Press, 143-172.
- NYFFELER U.P., SCHINDLER P.W., WIRZ U.E., IMBODEN D.M. (1983). Chemical and geochemical studies of lake Biel, a chemical approach to lake mixing. *Schweiz. Z. Hydrol.*, 45 : 45-61.
- PREMAZZI G., ROSSI G. (1984). Phosphorus cycle in a eutrophic subalpine lake. Commission of the european communities. EUR. 9116. (54 p.).
- RYAN P.J., HARLEMAN D.R.F., (1971). Prediction of the annual cycle of temperature changes in a stratified lake or reservoir : mathematical model and user's manual. Report n° 137, Ralph M. Parsons laboratory for water resources and hydrodynamics, Massachusetts Institute of Technology, U.S.A..
- SIMONS T.J. (1981). The seasonal climate of the upper ocean : data analysis and model development. Interim report, National Water Research Institute, Ontario, Canada, 22-26.
- SMITH I.R. (1979). Hydraulic conditions in isothermal lakes. *Freshwater Biol.*, 9 : 119-145.

TASSIN B. (1986). *Modélisation hydro-dynamique, thermique et biogéochimique du lac Léman*. Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris (250 p.).

WALTERS R.A., CAREY G.F., WINTER D.K. (1978). Temperature computation for temperate lakes. *Appl. Math. Modelling*, 2 : 41-48.

WUNDERLICH W.O. (1972). Heat and mass transfer between a water surface and the atmosphere. Tennessee Valley Authority, Report n° 14, Norris, U.S.A..